

УДК 539.3:532.5:517.95

DOI: 10.32326/1814-9146-2025-87-1-81-92

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМЫ ИЗМЕРЕНИЯ ДАВЛЕНИЯ ГАЗОЖИДКОСТНЫХ СРЕД*

© 2025 г.

Вельмисов П.А., Анкилов А.В.

*Ульяновский государственный технический университет,
Ульяновск, Российская Федерация*

velmisov@ulstu.ru, ankil@ulstu.ru

Поступила в редакцию 14.10.2024

Проведено математическое моделирование механической системы, предназначенной для измерения давления рабочей среды в авиационных двигателях и состоящей из трубопровода и датчика давления, представляющего собой упругую пластину с чувствительным элементом. Для описания колебаний чувствительного элемента используется нелинейная модель механики твердого деформируемого тела – нелинейная система дифференциальных уравнений в частных производных для определения как поперечных, так и продольных деформаций. В математической модели механической системы учтено аэрогидродинамическое и тепловое воздействия на пластину. Для описания движения рабочей среды в трубопроводе используются уравнения аэрогидродинамики в модели несжимаемой среды. На основании метода малого параметра получены асимптотические уравнения, описывающие совместные движения рабочей среды и чувствительного элемента. Для определения температуры пластины и рабочей среды в трубопроводе используются уравнения нестационарной теплопроводности. Построена математическая модель, представляющая собой связанную нелинейную краевую задачу для системы дифференциальных уравнений в частных производных для определения пяти неизвестных функций – продольной и поперечной компонент перемещений пластины, потенциала скорости, температуры рабочей среды в трубопроводе, температуры материала пластины. Для решения тепловой задачи используется метод Фурье. Для решения дифференциальных уравнений, описывающих совместную динамику упругой пластины и рабочей среды в трубопроводе, применяются методы Фурье и Бубнова – Галеркина. Решение задачи сведено к исследованию системы обыкновенных дифференциальных уравнений, связывающих величину давления в двигателе с величиной деформации чувствительного элемента. С помощью разработанной программы в системе Mathematica 12.0 произведен численный эксперимент для конкретных параметров механической системы и построены графики поперечной и продольной компонент перемещений пластины в средней точке пластины. Результаты численного эксперимента предназначены для анализа частоты и амплитуды колебаний упругого элемента датчика давления.

* Выполнено при поддержке РНФ (грант №23-21-00517).

Ключевые слова: аэрогидроупругость, упругий элемент, датчик давления, трубопровод, дифференциальные уравнения, метод Бубнова – Галеркина.

Введение

Актуальной задачей на этапе проектирования конструкций и приборов, составной частью которых являются контактирующие с газожидкостной средой деформируемые элементы, является задача исследования их динамики. В большом количестве научных публикаций исследуется динамика упругих элементов каналов и трубопроводов, являющихся составной частью этих конструкций, при протекании в них жидкости, среди которых отметим [1–9].

Практические и теоретические вопросы проектирования датчиков давления газожидкостных сред рассмотрены в [10–16]. В статьях [10–14] описаны принципы работы датчиков давления и определены их технические характеристики. В [15, 16] приводятся основные принципы проектирования датчиков давления. При математическом моделировании датчиков необходимо учитывать не только аэрогидродинамическое воздействие на пластину рабочих сред, давление которых измеряется, но и негативное действие высоких температур этих сред, что не позволяет производить измерения с необходимой точностью. Основным способом ослабить тепловое воздействие является отведение датчика от двигателя на некоторое расстояние с помощью трубопровода [17–19], в котором происходит охлаждение рабочей среды.

В настоящей статье изучается система измерения давления газожидкостных сред в авиационных двигателях, состоящая из недеформируемого трубопровода и датчика давления, чувствительным элементом которого является упругая пластина. На основе предложенного численно-аналитического метода проведено исследование деформации чувствительного элемента датчика, величина которой позволяет вычислять давление в камере сгорания авиационного двигателя.

Математическая модель механической системы

Принципиальная схема механической системы для измерения давления рабочей среды в камере сгорания двигателя представлена на рис. 1.

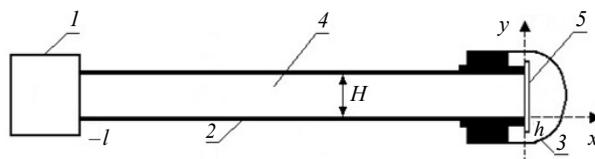


Рис. 1. Трубопровод с датчиком

В системе для ослабления воздействия температур двигатель 1 соединен с помощью трубопровода 2 длиной l и шириной H с датчиком давления 3 . Изменение давления в камере сгорания двигателя (при $x = -l$) приводит к изменению давления рабочей среды 4 , что, в свою очередь, влечет за собой деформацию чувствительного элемента 5 ($x \in [0, h]$) датчика. Элемент, предназначенный для измерения давления, моделируется упругой пластиной длиной H и толщиной h .

Введем обозначения: $w(y, t)$ и $u(y, t)$ – поперечная и продольная компоненты перемещений упругой пластины; $P(x, y, t)$ и $\Phi(x, y, t)$ – давление и потенциал скоро-

сти рабочей среды в трубопроводе; $T_1(x, t)$ и $T_2(x, t)$ – распределения температур по длине трубопровода $x \in (-l, 0)$ и по сечению упругой пластины $x \in (0, h)$.

Математическая постановка задачи имеет вид:

$$\Phi_{xx}(x, y, t) + \Phi_{yy}(x, y, t) = 0, \quad x \in (-l, w(y, t)), \quad y \in (0, H), \quad (1)$$

$$\Phi_y(x, 0, t) = \Phi_y(x, H, t) = 0, \quad x \in (-l, 0), \quad (2)$$

$$\Phi_x(x, y, t) g_x(x, y, t) + \Phi_y(x, y, t) g_y(x, y, t) = -g_t(x, y, t),$$

$$g(x, y, t) = 0, \quad y \in (0, H), \quad (3)$$

$$P(-l, y, t) = \tilde{F}(y, t), \quad y \in (0, H), \quad (4)$$

$$-EF(u_y(y, t) + 0,5(w_y(y, t))^2)_y + Mu_{tt}(y, t) - \beta_2 Fu_{yyt} = 0, \quad y \in (0, H), \quad (5)$$

$$-EF[w_y(y, t)(u_y(y, t) + 0,5(w_y(y, t))^2)]_y + Dw_{yyyy}(y, t) + Mw_{tt}(y, t) + N(t)w_{yy}(y, t) +$$

$$+ \gamma w(y, t) + \beta_1 w_t(y, t) + \beta_2 Iw_{yyyt}(y, t) = P(w(y, t), y, t) - \bar{P}, \quad y \in (0, H), \quad (6)$$

$$u(0, t) = u(H, t) = 0, \quad w(0, t) = w(H, t) = 0, \quad w_y(0, t) = w_y(H, t) = 0, \quad (7)$$

где индексы x, y, t обозначают частные производные по переменным.

Движение рабочей среды (в модели несжимаемой среды) в трубопроводе описывается уравнением Лапласа (1) с граничными условиями (2)–(4), означающими непроницаемость стенок трубопровода $y = 0, y = H$ и упругого элемента $g(x, y, t) = 0$ (или в явном виде $x = w(y, t)$) и изменение давления $\tilde{F}(y, t)$ рабочей среды на входе в трубопровод. В отличие от проведенных ранее исследований [18, 19], для изучения динамики упругого элемента используется нелинейная модель деформируемого твердого тела, представляющая собой систему нелинейных дифференциальных уравнений (5), (6) для определения продольной $u(y, t)$ и поперечной $w(y, t)$ компонент перемещений упругой пластины при условиях (7) жесткого неподвижного закрепления ее концов. В уравнениях (5), (6) введены следующие обозначения параметров механической системы: \bar{P} – действующая на пластину распределенная внешняя нагрузка; E, M, D, β_2 – модуль упругости, удельная масса, изгибная жесткость и коэффициент демпфирования пластины; $N(t)$ – сжимающее или растягивающее пластину усилие; γ, β_1 – коэффициенты жесткости и демпфирования обжимного слоя пластины.

Давление $P(x, y, t)$ и потенциал скорости $\Phi(x, y, t)$ связаны формулой

$$P(x, y, t) = P_0 - \rho_1(\Phi_t(x, y, t) + 0,5(\Phi_x(x, y, t))^2 + 0,5(\Phi_y(x, y, t))^2), \quad (8)$$

где ρ_1 – плотность рабочей среды; P_0 – давление в покоящейся жидкости.

Коэффициенты F, I, M, D вычисляются по формулам:

$$F = h(1 - \nu)^{-1}, \quad I = h^3(12(1 - \nu^2))^{-1}, \quad D = EI, \quad M = \rho_2 h,$$

где ν – коэффициент Пуассона; ρ_2 – плотность пластины.

Функция $N(t)$, входящая в уравнение (6), определяется по формуле:

$$N(t) = N_0 + \frac{E\alpha_T}{1 - \nu} \int_0^h T_2(x, t) dx, \quad (9)$$

где N_0 – постоянная составляющая усилия, созданная при закреплении пластины; α_T – температурный коэффициент линейного расширения.

Представим коэффициент α_T и функции $u(y, t), w(y, t), \Phi(x, y, t), \tilde{F}(y, t)$ в виде разложения по малому параметру $\varepsilon = h/H$:

$$u(y,t) = u_0(y) + \varepsilon u_1(y,t) + \dots, \quad w(y,t) = w_0(y) + \varepsilon w_1(y,t) + \dots, \quad (10)$$

$$\alpha_T = \varepsilon \alpha_{T1} + \dots, \quad \Phi(x,y,t) = \varepsilon \varphi(x,y,t) + \dots, \quad \tilde{F}(y,t) = P_0 + \varepsilon P_*(y,t) + \dots,$$

где $P_*(y,t)$ – избыточное давление на входе в трубопровод (в сечении $x = -l$).

Учитывая (10), запишем уравнение поверхности упругого элемента в виде

$$g(x,y,t) = x - w(y,t) = x - w_0(y) - \varepsilon w_1(y,t) - \dots = 0. \quad (11)$$

Подставляя (10), (11) в (1)–(4), (8) и ограничиваясь членами порядка ε , получим

$$\varphi_{xx}(x,y,t) + \varphi_{yy}(x,y,t) = 0, \quad x \in (-l, w_0(y)), \quad y \in (0, H), \quad (12)$$

$$\varphi_y(x, 0, t) = \varphi_y(x, H, t) = 0, \quad x \in (-l, 0), \quad (13)$$

$$\varphi_x(w_0(y), y, t) - w_{0y}(y) \varphi_y(w_0(y), y, t) = w_{1t}(y, t), \quad (14)$$

$$-\rho_1 \varphi_t(-l, y, t) = P_*(y, t), \quad (15)$$

$$P(x, y, t) = P_0 - \rho_1 \varepsilon \varphi_t(x, y, t), \quad x \in (-l, w_0(y)), \quad y \in (0, H). \quad (16)$$

Подставляя (16) и ограничиваясь членами порядка ε , с учетом (10) представим систему уравнений (5), (6) в виде:

$$-EF(u_{0y}(y) + 0,5(w_{0y}(y))^2)_y = 0, \quad (17)$$

$$-EF[w_{0y}(y)(u_{0y}(y) + 0,5(w_{0y}(y))^2)]_y + Dw_{0yyyy} + N_0 w_{0yy} + \gamma w_0 = P_0 - \bar{P}, \quad (18)$$

$$-EF(u_{1y}(y,t) + w_{0y}(y)w_{1y}(y,t))_y + Mu_{1tt}(y,t) - \beta_2 Fu_{1yyt} = 0, \quad (19)$$

$$-EF[(w_{0y}(y)u_{1y}(y,t) + (u_{0y}(y) + 1,5w_0^2(y))w_{1y}(y,t))]_y + Dw_{1yyyy} + Mw_{1tt} + N_1(t)w_{0yy} + N_0 w_{1yy} + \gamma w_1 + \beta_1 w_{1t} + \beta_2 I w_{1yyyyt} = -\rho_1 \varphi_t(w_0(y), y, t), \quad (20)$$

где

$$N_1(t) = \frac{E\alpha_{T1}}{1-\nu} \int_0^h T_2(x,t) dx$$

согласно (9).

В силу граничных условий (7) для функций $u(y,t)$, $w(y,t)$ запишем граничные условия для функций $u_0(y,t)$, $u_1(y,t)$, $w_0(y,t)$, $w_1(y,t)$:

$$u_0(0) = u_0(H) = 0, \quad w_0(0) = w_0(H) = 0, \quad w_{0y}(0) = w_{0y}(H) = 0, \quad (21)$$

$$u_1(0,t) = u_1(H,t) = 0, \quad w_1(0,t) = w_1(H,t) = 0, \quad w_{1y}(0,t) = w_{1y}(H,t) = 0. \quad (22)$$

Получили нелинейную краевую задачу (17), (18), (21) для системы обыкновенных дифференциальных уравнений для определения двух неизвестных функций $u_0(y)$, $w_0(y)$ и линейную краевую задачу (12)–(15), (19), (20), (22) для системы дифференциальных уравнений в частных производных для определения трех неизвестных функций $u_1(y,t)$, $w_1(y,t)$, $\varphi(x,y,t)$.

Решение задачи методом Бубнова – Галеркина

Решим аэрогидродинамическую задачу (12)–(15). Предположим, что избыточное давление не зависит от координаты y , то есть $P_*(y,t) = P_*(t)$. Тогда при отыскании потенциала скорости $\varphi(x,y,t)$ в виде

$$\varphi(x, y, t) = -\frac{1}{\rho_0} \int_0^t P_*(z) dz + (x+l)\alpha(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(t) \cos(\lambda_n y) \operatorname{sh}(\lambda_n(x+l)), \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{H}, \quad (23)$$

уравнение (12) и условия (13), (15) выполняются.

Согласно методу Бубнова – Галеркина, функции $w_1(y, t)$ и $u_1(y, t)$ раскладываются в ряды по полным на отрезке $[0, H]$ системам базисных функций $\{\xi_n(y)\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\sin \lambda_n y\}_{n=1}^{\infty}$, удовлетворяющим граничным условиям, соответствующим условиям жесткого закрепления концов пластины (22):

$$w_1(y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) \xi_n(y), \quad u_1(y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin(\lambda_n y), \quad (24)$$

где

$$\xi_n(y) = \operatorname{ch}(\mu_n y) - \cos(\mu_n y) - \frac{\operatorname{ch}(\mu_n H) - \cos(\mu_n H)}{\operatorname{sh}(\mu_n H) - \sin(\mu_n H)} (\operatorname{sh}(\mu_n y) - \sin(\mu_n y)),$$

а μ_n являются корнями уравнения $\operatorname{ch}(\mu_n H) \cos(\mu_n H) = 1$.

Введем обозначения

$$A_n = \lambda_n \int_0^H (\cos(\lambda_n y) \operatorname{ch}(\lambda_n(w_0(y)+l)) + w_{0y}(y) \sin(\lambda_n y) \operatorname{sh}(\lambda_n(w_0(y)+l))) dy,$$

$$C_{nk} = \lambda_n \int_0^H (\cos(\lambda_n y) \operatorname{ch}(\lambda_n(w_0(y)+l) + w_{0y}(y) \sin(\lambda_n y) \operatorname{sh}(\lambda_n(w_0(y)+l))) \cos(\lambda_k y)) dy,$$

$$V_{nk} = \int_0^H \xi_n(y) \cos(\lambda_k y) dy, \quad B_n = \int_0^H \xi_n(y) dy.$$

Подставляя (23), (24) в условие (14) и проецируя на полную систему функций $\{\cos(\lambda_k y)\}_{k=0}^{\infty}$ согласно методу Бубнова – Галеркина, получим

$$\alpha(t) = -\frac{1}{H} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \varphi_n(t) + \frac{1}{H} \sum_{n=1}^{\infty} B_n w_{nt}(t), \quad (25)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (V_{nk} w_{nt}(t) - C_{nk} \varphi_n(t)) = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

Введем обозначения

$$U_{nk} = \frac{2\lambda_k}{H} \int_0^H w_{0y}(y) \xi_{ny}(y) \cos(\lambda_k y) dy, \quad D_k = \rho_1 \int_0^H (w_0(y)+l) \xi_k(y) dy,$$

$$E_{nk} = \rho_1 \int_0^H \cos(\lambda_n y) \operatorname{sh}(\lambda_n(w_0(y)+l)) \xi_k(y) dy, \quad F_{nk} = \int_0^H \xi_{nyyy}(y) \xi_k(y) dy,$$

$$J_k = \int_0^H w_{0yy} \xi_k(y) dy, \quad G_{nk} = \int_0^H \xi_{nyy}(y) \xi_k(y) dy, \quad H_{nk} = \lambda_n \int_0^H w_{0y}(y) \cos(\lambda_n y) \xi_{ky}(y) dy,$$

$$K_{nk} = -\int_0^H ((u_{0y}(y) + 1,5w_{0y}^2(y)) \xi_{ny}(y))_y \xi_k(y) dy =$$

$$= \int_0^H (u_{0y}(y) + 1,5w_{0y}^2(y)) \xi_{ny}(y) \xi_{ky}(y) dy.$$

Подставляя (23), (24) в систему уравнений (19), (20) и проецируя (19) на систему функций $\{\sin(\lambda_k y)\}_{k=1}^{\infty}$, а (20) на систему функций $\{\xi_k(y)\}_{k=1}^{\infty}$, получим

$$Mu_{ktt}(t) + \beta_2 F \lambda_k^2 u_{kt}(t) + EF \lambda_k^2 u_k(t) + EF \sum_{n=1}^{\infty} U_{nk} w_n(t) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left[EFH_{nk} u_n(t) + \left(MH\delta_{nk} + \frac{D_k B_n}{H} \right) w_{nt}(t) + (\beta_1 H\delta_{nk} + \beta_2 IF_{nk}) w_{nt}(t) + \right. \\ \left. + (DF_{nk} + N_0 G_{nk} + \gamma H\delta_{nk} + EFK_{nk}) w_n(t) - \right. \\ \left. - \left(\frac{D_k A_n}{H} - E_{nk} \right) \varphi_{nt}(t) \right] = B_k P_*(t) - J_k N_1(t), \quad k = 1, 2, \dots \quad (27) \end{aligned}$$

В результате получена система линейных обыкновенных дифференциальных уравнений (25), (26), (27) для определения неизвестных функций $u_n(t)$, $w_n(t)$, $\varphi_n(t)$.

Решение тепловой задачи методом Фурье

Для определения теплового поля в системе имеем следующую краевую задачу:

$$\rho_1 c_1 T_{1t}(x, t) = k_1 T_{1xx}(x, t) - \alpha_{11} (T_1(x, t) - T_0), \quad (28)$$

$$T_1(-l, t) = T_*(t), \quad (29)$$

$$T_{1x}(0, t) = 0, \quad (30)$$

$$\rho_2 c_2 T_{2T}(x, t) = k_2 T_{2xx}(x, t), \quad (31)$$

$$T_{2x}(h, t) = 0, \quad (32)$$

$$-k_2 T_{2x}(0, t) = \alpha_{12} (T_1(0, t) - T_2(0, t)). \quad (33)$$

В формулах (28)–(33) введены обозначения: T_0 – температура окружающей среды; $k_1, k_2, c_1, c_2, \rho_1, \rho_2$ – коэффициенты теплопроводности, удельные теплоемкости и плотности рабочей среды и материала чувствительного элемента; $0,5H\alpha_{11}$ – коэффициент теплопередачи от боковой поверхности трубопровода к окружающей среде; α_{12} – коэффициент теплоотдачи от рабочей среды к элементу (поверхность $x = 0$). Уравнения (28), (31) описывают нестационарное распределение температуры T_1 в рабочей среде в трубопроводе и T_2 в материале чувствительного элемента; условие (29) задает значение температуры $T_*(t)$ на выходе из камеры сгорания двигателя (на входе в трубопровод, $x = -l$); условие (30) учитывает, что тепловой поток, проникающий через левую границу пластины $x = 0$, пренебрежимо мал вследствие малости теплоемкости пластины и теплоизоляции внешней стороны пластины (32) при $x = h$; (33) – условие теплообмена между рабочей средой и материалом чувствительного элемента.

Решение задачи (28)–(33), полученное методом разделения переменных, имеет вид

$$\begin{aligned} T_1(x, t) = T_*(t) - \sum_{n=0}^{\infty} \chi_n \exp(-\gamma_n t) \sin(v_n(x+l)) \times \\ \times \left[\frac{\beta_1^0 T_0}{\gamma_n} - T_1^0 + \exp(\gamma_n t) \left(T_*(t) - \frac{\beta_1^0 T_0}{\gamma_n} \right) - a_1^2 v_n^2 \int_0^t \exp(\gamma_n \tau) T_*(\tau) d\tau \right], \quad (34) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_2(x, t) &= \tilde{T}(t) + \sum_{n=0}^{\infty} \bar{A}_n \exp(-\delta_n t) \cos(\bar{\mu}_n(x-h)) \left[T_2^0 - T_1^0 - \int_0^t \exp(-\delta_n t) \tilde{T}'(t) dt \right] = \\
&= \tilde{T}(t) + \sum_{n=0}^{\infty} \bar{A}_n \exp(-\delta_n t) \cos(\bar{\mu}_n(x-h)) \times \\
&\times \left[T_2^0 - T_1^0 - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\chi_k \gamma_k \sin(v_k l)}{\delta_n - \gamma_k} \left(\frac{\beta_1^0 T_0}{\gamma_k} - T_1^0 + \frac{a_1^2 v_k^2 T_*(t)}{\gamma_k} \right) (\exp((\delta_n - \gamma_k)t) - 1) \right], \quad (35)
\end{aligned}$$

где

$$a_1^2 = \frac{k_1}{\rho_1 c_1}, \quad a_2^2 = \frac{k_2}{\rho_2 c_2}, \quad \gamma_n = a_1^2 v_n^2 + \beta_1^0, \quad \delta_n = a_2^2 \bar{\mu}_n^2, \quad \chi_n = \frac{4}{\pi(2n+1)},$$

$$T_1^0 = T_1(x, 0) = \text{const}, \quad T_2^0 = T_2(x, 0) = \text{const}, \quad \tilde{T}(t) = T_1(0, t),$$

$$\bar{A}_n = \frac{2(-1)^n \alpha_{12} \sqrt{\alpha_{12}^2 + \lambda_2^2 \bar{\mu}_n^2}}{\bar{\mu}_n [h(\alpha_{12}^2 + k_2^2 \bar{\mu}_n^2) + k_2 \alpha_{12}]}, \quad v_n = \frac{\pi(2n+1)}{2l}, \quad \beta_1^0 = \frac{\alpha_{11}}{\rho_1 c_1},$$

а значения $\bar{\mu}_n$ ($n=0, 1, 2, \dots$) – положительные корни уравнения $\text{tg}(\bar{\mu}_n h) = \alpha_{12} / (k_2 \bar{\mu}_n)$.

Учитывая (35), найдем функцию $N_1(t)$, входящую в правую часть (27):

$$\begin{aligned}
N_1(t) &= \frac{E \alpha_{T1}}{1-v} \int_0^h T_2(x, t) dx = \frac{E \alpha_{T1}}{1-v} \left(\tilde{T}(t) h + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{\mu_n} \exp(-\delta_n t) \sin(\mu_n h) \times \right. \\
&\times \left. \left[T_2^0 - T_1^0 - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\chi_k \gamma_k \sin(v_k l)}{\delta_n - \gamma_k} \left(\frac{\beta_1^0 T_0}{\gamma_k} - T_1^0 + \frac{a_1^2 v_k^2 T_*(t)}{\gamma_k} \right) (\exp((\delta_n - \gamma_k)t) - 1) \right] \right). \quad (36)
\end{aligned}$$

Численный эксперимент

Приведем пример численного расчета, ограничивая количество слагаемых в разложениях (23), (24) числом $m=4$. Приняты следующие значения параметров механической системы: $l = 0,5$ м; $h = 7 \cdot 10^{-4}$ м; $H = 0,02$ м; $T_0 = 293,15$ К; $T_* = 1800$ К; $0,25 H \alpha_{11} = 15,5$ Вт·м⁻²·К⁻¹; $\alpha_{12} = 21$ Вт·м⁻²·К⁻¹; $T_*(t) = 10^5 (10 - \cos(10t))$ Па; $P_0 - \bar{P} = 5 \cdot 10^5$ Па; $\rho_1 = 1000$ кг·м⁻³; $\rho_2 = 7800$ кг·м⁻³; $\beta_1 = 4$ Па·с·м⁻¹; $\beta_2 = 4$ Па·с·м⁻¹; $c_1 = 4182$ Дж·кг⁻¹·К⁻¹; $c_2 = 460$ Дж·кг⁻¹·К⁻¹; $k_1 = 0,683$ Вт·м⁻¹·К⁻¹; $k_2 = 45,4$ Вт·м⁻¹·К⁻¹; $\eta = 0,3$; $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па; $F = 10^{-3}$ м; $I = 3,14 \cdot 10^{-11}$ м²; $\alpha_T = 7,3 \cdot 10^{-6}$ ·К⁻¹; $D = 6,28$ Н·м; $M = 5,46$ кг·м⁻²; $N_0 = 10^5$ Па·м; $\gamma = 4$ Па·м⁻¹.

Сначала, решая в системе Mathematica численно систему нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (17), (18) с краевыми условиями (21), найдем неизвестные функции $u_0(y)$, $w_0(y)$. Затем, решая систему (25)–(27) с начальными условиями $w_k(0) = 0$, $w_{kt}(0) = 0$, $k = 1, \dots, m$, в программе Mathematica, взяв отрезки рядов в формулах длиной $m = 4$, построим графики функции деформации

$$w(y, t) = w_0(y) + \varepsilon \sum_{n=1}^m w_n(t) \xi_n(y) \quad \text{и} \quad u(y, t) = u_0(y) + \varepsilon \sum_{n=1}^m u_n(t) \sin(\lambda_n y).$$

На рис. 2, 3 представлены графики зависимости поперечной $w(y, t)$ и продольной $u(y, t)$ компонент перемещений пластины в точке пластины $y = 0,01$ м от времени при $m = 4$.

Результаты численного эксперимента, состоящего из совокупности аналогичных расчетов для различных параметров механической системы, предназначены для анализа частоты и амплитуды колебаний упругого элемента датчика давления.

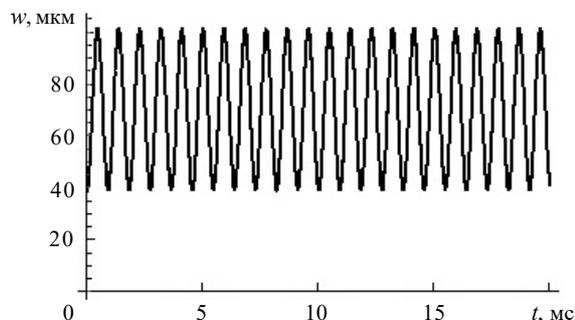


Рис. 2. Поперечная компонента перемещения пластины

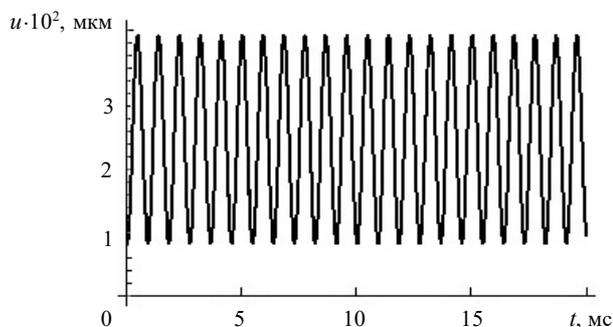


Рис. 3. Продольная компонента перемещения пластины

Заключение

Предложена и исследована математическая модель системы, практическое применение которой состоит в измерении рабочего давления в камере сгорания авиационного двигателя. Модель представляет собой нелинейную начально-краевую задачу, для решения которой разработан комбинированный численно-аналитический метод. На первом этапе получены асимптотические уравнения, позволяющие исследовать динамику рабочей среды в трубопроводе и динамику чувствительного элемента датчика. На втором этапе решение полученных асимптотических дифференциальных уравнений с частными производными сведено к исследованию систем обыкновенных дифференциальных уравнений. На третьем этапе произведены численные эксперименты в системе компьютерной алгебры Mathematica 12.0 на основе разработанного модуля «Датчик давления», введенного дополнительно в программный комплекс [20]. Модуль позволяет получать графики продольной и поперечной компонент перемещений чувствительного элемента при различном задании параметров механической системы при изменении давления и температуры рабочей среды в двигателе с течением времени.

Список литературы

1. Chehrehgani M., Misra A.K., Paidoussis M.P. Dynamics of a cantilevered pipe conveying fluid and partially subjected to a confined counter-current external axial flow of a different fluid.

Journal of Sound and Vibration. 2024. Vol. 590. Article No 118574. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2024.118574>.

2. Chehrehgani M., Shaaban A., Misra A.K., Paidoussis M.P. Experimental investigation of the dynamics of slightly curved cantilevered pipes conveying fluid. *Nonlinear Dynamics*. 2023. Vol. 111. P. 22101–22117. <https://doi.org/10.1007/s11071-023-08384-z>.

3. Chen W., Wang L., Peng Z. A magnetic control method for large-deformation vibration of cantilevered pipe conveying fluid. *Nonlinear Dynamics*. 2021. Vol. 105. P. 1459–1481. <https://doi.org/10.1007/s11071-021-06662-2>.

4. Guo Y., Zhu B., Li Y. Nonlinear dynamics of fluid-conveying composite pipes subjected to time-varying axial tension in sub- and super-critical regimes. *Applied Mathematical Modelling*. 2022. Vol. 101. P. 632–653. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2021.09.017>.

5. Reddy R.S., Panda S., Natarajan G. Nonlinear dynamics of functionally graded pipes conveying hot fluid. *Nonlinear Dynamics*. 2020. Vol. 99. P. 1989–2010. <https://doi.org/10.1007/s11071-019-05426-3>.

6. Stetsiuk S., Doroshenko Y., Bondarenko R., Filipchuk O., Volovetskyi V. Investigation on the dynamics of movement of cylindrical cleaning pigs through the bends of pipeline systems for fluid transportation. *Scientific Journal of Silesian University of Technology. Series Transport*. 2024. Vol. 123. P. 303–317. <https://doi.org/10.20858/sjsutst.2024.123.15>.

7. Kondratov D.V., Kondratova T.S., Popov V.S., Popova M.V. Modeling hydroelastic response of the channel wall resting on a nonlinear elastic foundation. *Proceedings of the 9th International Conference on Industrial Engineering (ICIE 2023)*. Cham, Switzerland: Springer, 2023. P. 261–270. https://doi.org/10.1007/978-3-031-38126-3_27.

8. Mogilevich L.L., Popova E.V. Longitudinal waves in the walls of an annular channel filled with liquid and made of a material with fractional nonlinearity. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2023. Vol. 31. Iss. 3. P. 365–376. <https://doi.org/10.18500/0869-6632-003040>.

9. Vel'misov P.A., Ankilov A.V., Pokladova Yu.V. On the stability of solutions of certain classes of initial-boundary-value problems in aerohydroelasticity. *Journal of Mathematical Sciences*. 2021. Vol. 259. P. 296–308. <https://doi.org/10.1007/s10958-021-05618-6>.

10. Дмитриенко А.Г., Исаков С.А., Белозубов Е.М. Датчики давления на основе нано- и микроэлектромеханических систем для ракетной и авиационной техники. *Датчики и системы*. 2012. №9 (160). С. 19–25.

11. Стучебников Е.Г., Васьков Ю.А., Савченко Е.Г. Специальные датчики давления промышленной группы «МИДА». *Компоненты и технологии*. 2021. №5(238). С. 12–15.

12. Белозубов Е.М., Васильев В.А., Чернов П.С. Метрологический самоконтроль интеллектуальных датчиков измерительных и управляющих систем. *Измерительная техника*. 2018. №7. С. 11–17.

13. Pirogov S.P., Cherentsov D.A., Chuba A.Yu., Ustinov N.N. Simulation of forced oscillations of pressure monitoring devices. *International Journal of Engineering Trends and Technology*. 2022. Vol. 70. Iss. 2. P. 37–47. <https://doi.org/10.14445/22315381/IJETT-V70I2P205>.

14. Haijun L., Douglas A.O., Miao Yu. Modeling of an air-backed diaphragm in dynamic pressure sensors: Effects of the air cavity. *Journal of Sound and Vibration*. 2014. Vol. 333. Iss. 25. P. 7051–7075. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2014.07.004>.

15. Эткин Л.Г. *Виброчастотные датчики. Теория и практика*. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. 408 с.

16. Аш Ж., Андре П., Бофрон Ж. и др. *Датчики измерительных систем. В 2-х кн.* Кн. 1. М.: Мир, 1992. 480 с., Кн. 2. М. Мир, 1992. 424 с.

17. Вельмисов П.А., Тамарова Ю.А. Нелинейная математическая модель систем измерения давления в газожидкостных средах. *Журнал Средневолжского математического общества*. 2023. Т. 25. №4. С. 313–325. <https://doi.org/10.15507/2079-6900.25.202304.313-325>.

18. Vel'misov P.A., Pokladova Yu.V. Mathematical modelling of the “Pipeline – pressure sensor” system. *Journal of Physics: Conference Series*. 2019. Vol. 1353. Iss. 1. P. 012085-1–012085-6. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1353/1/012085>.

19. Вельмисов П.А., Тамарова Ю.А. Математическое моделирование динамики аэроупругой системы «трубопровод – датчик давления». *Вестник Пермского национального*

исследовательского политехнического университета. *Механика*. 2024. Вып. 2. С. 69–78. <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2024.2.08>.

20. Анкилов А.В., Вельмисов П.А., Тамарова Ю.А. Программный комплекс для математического моделирования динамики упругого элемента конструкции при аэрогидродинамическом воздействии. Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ 2021610978, 20.01.2021. Заявка №2021610043 от 11.01.2021.

References

1. Chehrehghani M., Misra A.K., Paidoussis M.P. Dynamics of a cantilevered pipe conveying fluid and partially subjected to a confined counter-current external axial flow of a different fluid. *J. Sound Vib.* 2024. Vol. 590. Article No 118574. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2024.118574>.
2. Chehrehghani M., Shaaban A., Misra A.K., Paidoussis M.P. Experimental investigation of the dynamics of slightly curved cantilevered pipes conveying fluid. *Nonlinear Dyn.* 2023. Vol. 111. P. 22101–22117. <https://doi.org/10.1007/s11071-023-08384-z>.
3. Chen W., Wang L., Peng Z. A magnetic control method for large-deformation vibration of cantilevered pipe conveying fluid. *Nonlinear Dyn.* 2021. Vol. 105. P. 1459–1481. <https://doi.org/10.1007/s11071-021-06662-2>.
4. Guo Y., Zhu B., Li Y. Nonlinear dynamics of fluid-conveying composite pipes subjected to time-varying axial tension in sub- and super-critical regimes. *Appl. Math. Model.* 2022. Vol. 101. P. 632–653. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2021.09.017>.
5. Reddy R.S., Panda S., Natarajan G. Nonlinear dynamics of functionally graded pipes conveying hot fluid. *Nonlinear Dyn.* 2020. Vol. 99. P. 1989–2010. <https://doi.org/10.1007/s11071-019-05426-3>.
6. Stetsiuk S., Doroshenko Y., Bondarenko R., Filipchuk O., Volovetskyi V. Investigation on the dynamics of movement of cylindrical cleaning pigs through the bends of pipeline systems for fluid transportation. *Scientific Journal of Silesian University of Technology. Series Transport.* 2024. Vol. 123. P. 303–317. <https://doi.org/10.20858/sjsutst.2024.123.15>.
7. Kondratov D.V., Kondratova T.S., Popov V.S., Popova M.V. Modeling hydroelastic response of the channel wall resting on a nonlinear elastic foundation. *Proceedings of the 9th International Conference on Industrial Engineering (ICIE 2023)*. Cham, Switzerland. Springer. 2023. P. 261–270. https://doi.org/10.1007/978-3-031-38126-3_27.
8. Mogilevich L.I., Popova E.V. Longitudinal waves in the walls of an annular channel filled with liquid and made of a material with fractional nonlinearity. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2023. Vol. 31. Iss. 3. P. 365–376. <https://doi.org/10.18500/0869-6632-003040>.
9. Vel'misov P.A., Ankilov A.V., Pokladova Yu.V. On the stability of solutions of certain classes of initial-boundary-value problems in aerohydroelasticity. *J. Math. Sci.* 2021. Vol. 259. P. 296–308. <https://doi.org/10.1007/s10958-021-05618-6>.
10. Dmitrienko A.G., Isakov S.A., Belozubov E.M. Datchiki davleniya na osnove nano- i mikroelektromekhanicheskikh sistem dlya raketnoy i aviatsionnoy tekhniki [Pressure sensors on the basis of nano- and microelectromechanical systems for rocket and aeronautical engineering]. *Datchiki i sistemy [Sensors and Systems]*. 2012. No 9(160). P. 19–25 (In Russian).
11. Stuchebnikov E.G., Vaskov Yu.A., Savchenko E.G. Spetsialnye datchiki davleniya promyshlennoy gruppy “MIDA” [Special pressure sensors of the industrial group “MIDA”]. *Komponenty i tekhnologii [Components and Technologies]*. 2021. No 5(238). P. 12–15 (In Russian).
12. Belozubov E.M., Vasilyev V.A., Chernov P.S. Metrologicheskiy samokontrol intellektualnykh datchikov izmeritelnykh i upravlyayushchikh sistem [Metrological self-monitoring of intelligent sensors of measuring and control systems]. *Izmeritelnaya tekhnika*. 2018. No 7. P. 11–17 (In Russian).
13. Pirogov S.P., Cherentsov D.A., Chuba A.Yu., Ustinov N.N. Simulation of forced oscillations of pressure monitoring devices. *International Journal of Engineering Trends and Technology*. 2022. Vol. 70. Iss. 2. P. 37–47. <https://doi.org/10.14445/22315381/IJETT-V70I2P205>.
14. Haijun L., Douglas A.O., Miao Yu. Modeling of an air-backed diaphragm in dynamic

pressure sensors: Effects of the air cavity. *J. Sound Vib.* 2014. Vol. 333. Iss. 25. P. 7051–7075. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2014.07.004>.

15. Etkin L.G. *Vibrochastotnye datchiki. Teoriya i praktika [Vibration Frequency Sensors. Theory and Practice]*. Moscow. MGTU n.a. N.E. Bauman Publ. 2004. 408 p. (In Russian).

16. Asch G., Andre P., Bofron J. et al. *Sensors in Industrial Instrumentation. In 2 books.* Paris. Dunod. 1987. 864 p.

17. Velmisov P.A., Tamarova Yu.A. Nelineynaya matematicheskaya model sistem izmereniya davleniya v gazozhidkostnykh sredakh [Nonlinear mathematical model of pressure measurement systems in gas-liquid media]. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva.* 2023. Vol. 25. No 4. P. 313–325 (In Russian).

18. Velmisov P.A., Pokladova Yu.V. Mathematical modelling of the “Pipeline – pressure sensor” system. *J. Phys. Conf. Ser.* 2019. Vol. 1353. Iss. 1. P. 012085-1–012085-6. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1353/1/012085>.

19. Velmisov P.A., Tamarova Yu.A. Matematicheskoe modelirovanie dinamiki aerouprugoy sistemy “truboprovod – datchik davleniya” [Mathematical modeling of the dynamics of the aeroelastic “Pipeline – pressure sensor” system]. *Vestnik Permskogo natsionalnogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mekhanika [PNRPU Mechanics Bulletin]*. 2024. No 2. P. 69–78 (In Russian).

20. Ankilov A.V., Velmisov P.A., Tamarova Yu.A. *Programmnyy kompleks dlya matematicheskogo modelirovaniya dinamiki uprugogo elementa konstruksii pri aerogidrodinamicheskoy vozdeystvii [Program Complex for Mathematical Modeling of Dynamics of an Elastic Element of a Structure under Aerohydrodynamic Impact]*. Svidetelstvo o registratsii programmy dlya EVM 2021610978, 20.01.2021. Zayavka №2021610043 ot 11.01.2021 [Certificate of registration of the computer program 2021610978, 01/20/2021. Application No 2021610043 dated 11.01.2021] (In Russian).

MATHEMATICAL MODELING OF THE PRESSURE MEASUREMENT SYSTEM OF GAS-LIQUID MEDIA*

Velmisov P.A., Ankilov A.V.

Ulyanovsk State Technical University, Ulyanovsk, Russian Federation

velmisov@ulstu.ru, ankil@ulstu.ru

Received by the Editor 2024/10/14

In this paper, mathematical modelling of a mechanical system designed to measure the working medium in aircraft engines and consisting of a pipeline and a pressure sensor is carried out. On one side the pipeline is connected to the engine combustion chamber in which the pressure is measured, on the other side the pipeline is connected to a sensor that measures this pressure. The pipework is necessary to move the sensor some distance away from the engine in order to mitigate the effects of high temperatures and vibration accelerations on the sensor's sensitive element, which is an elastic plate. To describe the vibrations of the sensing element, a nonlinear model of the mechanics of a solid deformable body is used, which is a nonlinear system of partial differential equations to determine both transverse and longitudinal deformations. The mathematical model of the mechanical system takes into account the aerohydrodynamic and thermal effects on the plate. The aerohydrodynamic equations in the incompressible medium model are used to describe the motion of the working medium in the pipeline. Based on the small parameter method, asymptotic equations describing the joint motion of the working medium and the sensing element are obtained. Unsteady heat conduction equations are used to determine the temperature of the plate and the working medium in the pipeline. As a result, a mathematical model is constructed, which is a coupled nonlinear boundary value problem for

*The research was supported by the Russian Science Foundation (project No 22-19-00138).

the system of partial differential equations to determine five unknown functions – longitudinal and transverse components of the plate deformation, velocity potential, temperature of the working medium in the pipeline, temperature of the plate material. The Fourier method is used to solve the thermal problem. The Fourier and Bubnov–Galerkin methods are used to solve the differential equations describing the joint dynamics of the elastic plate and the working medium in the pipeline. As a result, the solution of the problem is reduced to the study of a system of ordinary differential equations relating the magnitude of pressure in the motor to the magnitude of deformation of the sensing element. With the help of the developed programme in Mathematica 12.0, a numerical experiment for specific parameters of the mechanical system is performed and graphs of the transverse and longitudinal components of the plate deformation at the midpoint of the plate are plotted. The results of the numerical experiment are used to analyse the frequency and amplitude of oscillations of the elastic element of the pressure sensor.

Keywords: aerohydroelasticity, elastic element, pressure sensor, pipeline, differential equations, Bubnov – Galerkin method.