

УДК 539.3

КОЭФФИЦИЕНТНЫЕ ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНЫХ МАТЕРИАЛОВ*

© 2014 г.

Ватульян А.О., Нестеров С.А.

*Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича
Южного федерального университета, Ростов-на-Дону, Российская Федерация*

vatulyan@math.rsu.ru

Поступила в редакцию 12.11.2014

На основе обобщенного соотношения взаимности получены интегральные уравнения, позволяющие построить итерационный процесс реконструкции термомеханических характеристик неоднородных тел. Рассмотрена процедура реконструкции термомеханических характеристик неоднородного слоя и полого цилиндра. Прямая задача для слоя решена на основе аппарата интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода. Прямая задача для цилиндра решена на основе метода пристрелки.

Ключевые слова: функционально-градиентные материалы, обратная задача, термоупругость, идентификация, итерационный процесс, слой, полый цилиндр.

Введение

Для анализа работоспособности и прочности различных элементов конструкций, находящихся в условиях термосилового нагружения, часто приходится решать задачи, связанные с нахождением полей температуры и напряжений. Многие годы термомеханические расчеты проводились для слоистых композитов, которые широко применялись в различных областях техники. Однако серьезным недостатком слоистых композитов является скачок термомеханических характеристик на поверхности раздела между дискретными материалами, который может привести к большой концентрации напряжений и возникновению пластической деформации или растрескиванию. В качестве альтернативы слоистым композитам в последние годы выступают функционально-градиентные материалы [1, 2], в которых избегают скачков материальных свойств на поверхности раздела, благодаря их непрерывному изменению. Однако практическая ценность функционально-градиентных материалов зависит от знания точных законов неоднородности после изготовления. Для решения этой задачи требуется разработка методов идентификации неоднородных характеристик термоупругих тел, т.е. решение коэффициентных обратных задач (КОЗ) термоупругости.

* Выполнено при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (проект №9.665.2014/К на выполнение научно-исследовательской работы в рамках проектной части государственного задания в сфере научной деятельности).

К настоящему времени имеется много работ по исследованию обратных задач теплопроводности и теории упругости, обзор которых подробно изложен в монографиях [3, 4]. Однако количество работ по исследованию КОЗ термоупругости еще невелико [5, 6]. Это связано со сложностью построения операторных соотношений для решения нелинейных обратных задач. В работах [4, 7] разработан подход к решению нелинейных обратных задач, основанный на применении обобщенного соотношения взаимности. В [8–10] этот подход применен для идентификации неоднородных характеристик термоупругого стержня. В настоящей работе этот подход распространен на решение задачи идентификации характеристик слоя и полого цилиндра.

1. Общая постановка обратной задачи термоупругости

Рассмотрим задачу о колебаниях термоупругого тела, имеющего объем V и кусочно-гладкую границу $S = S_u \cup S_\sigma = S_\theta \cup S_q$:

$$\sigma_{ij,j} = \rho(M)\ddot{u}_i, \quad (1)$$

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl}(M)u_{k,l} - \gamma_{ij}(M)\theta, \quad (2)$$

$$(k_{ij}(M)\theta_{,j}(M,t))_{,i} - c_\varepsilon(M)\dot{\theta} - T_0\gamma_{ij}(M)\dot{u}_{i,j} = 0, \quad (3)$$

$$\theta|_{S_\theta} = 0, \quad -k_{ij}\theta_{,i}n_j|_{S_q} = q(M,t), \quad (4)$$

$$u_i|_{S_u} = 0, \quad \sigma_{ij}n_j|_{S_\sigma} = P_i(M,t), \quad (5)$$

$$\theta(M,0) = u_i(M,0) = \dot{u}_i(M,0) = 0. \quad (6)$$

Здесь M – произвольная точка термоупругого тела с координатами $M(x, y, z)$, $\sigma_{ij}(M, t)$ – компоненты тензора напряжений, $u_i(M, t)$ – компоненты вектора перемещения, $\theta(M, t) = T(M, t) - T_0$ – приращение температуры $T(M, t)$ от естественного состояния с температурой T_0 , $c_{ijkl}(M)$ – компоненты тензора модулей упругости, $\rho(M)$ – плотность, $c_\varepsilon(M)$ – удельная объемная теплоемкость при постоянном тензоре деформации, $\gamma_{ij}(M)$ – компоненты тензора температурных напряжений, n_j – компоненты единичного вектора внешней нормали к S_σ , $p_i(M, t)$ – компоненты вектора активной нагрузки, приложенной к телу, $q(M, t)$ – плотность теплового потока, $k_{ij}(M)$ – компоненты тензора теплопроводности.

Прямая задача термоупругости заключается в определении функций $u_i(M, t)$ и $\theta(M, t)$ из (1)–(6) при известных термомеханических характеристиках $c_{ijkl}(M)$, $\rho(M)$, $c_\varepsilon(M)$, $k_{ij}(M)$, $\gamma_{ij}(M)$.

В обратной задаче требуется определить термомеханические характеристики из (1)–(6) по дополнительной информации о полях перемещений $u_i|_{S_\sigma} = g_i(M, t)$, $t \in [T_1, T_2]$ или температуры $\theta|_{S_q} = f(M, t)$, $t \in [T_3, T_4]$.

Коэффициентные обратные задачи термоупругости являются нелинейными задачами. Одним из методов решения задач такого типа является построение итерационного процесса, на каждом этапе которого решается линейная задача. В [8, 9] на основе обобщенного соотношения взаимности в пространстве трансформант по Лапласу были получены два линейризованных интегральных уравнения Фредгольма 1-го рода относительно поправок $\delta k_{ij}^{(n-1)}(M)$, $\delta c_\varepsilon^{(n-1)}(M)$, $\delta \rho^{(n-1)}(M)$, $\delta c_{ijkl}^{(n-1)}(M)$, $\delta \gamma_{ij}^{(n-1)}(M)$:

$$\int_V \delta c_{ijkl}^{(n-1)} \tilde{u}_{i,j}^{(n-1)} \tilde{u}_{k,l}^{(n-1)} dV + p^2 \int_V \delta \rho^{(n-1)} (\tilde{u}_i^{(n-1)})^2 dV - \int_V \delta \gamma_{ij}^{(n-1)} \tilde{u}_{i,j}^{(n-1)} \tilde{\theta}^{(n-1)} dV = \int_{S_\sigma} \tilde{P}_i (\tilde{g}_i - \tilde{u}_i^{(n-1)}) dS, \quad (7)$$

$$\int_V \delta k_{ij}^{(n-1)} \tilde{\theta}_i^{(n-1)} \tilde{\theta}_j^{(n-1)} dV + p \int_V \delta c_\varepsilon^{(n-1)} (\tilde{\theta}^{(n-1)})^2 dV + p T_0 \int_V \delta \gamma_{ij}^{(n-1)} \tilde{u}_{i,j}^{(n-1)} \tilde{\theta}^{(n-1)} dV = \int_{S_q} \tilde{q} (\tilde{f} - \tilde{\theta}^{(n-1)}) dS. \quad (8)$$

2. Задача термоупругости для слоя

В качестве первого примера рассмотрим случай неустановившихся колебаний трансверсально-изотропного неоднородного по координате x_3 термоупругого слоя, занимающего область $(x_1 \in (-\infty, \infty), x_3 \in [0, h])$, под действием системы нагрузок на верхней грани $x_1 = h$. Начально-краевая задача имеет вид:

$$c_{11} u_{1,1} + (c_{13} u_{3,3})_{,1} + ((c_{55} (u_{1,3} + u_{3,1}))_{,3} - \gamma_{11} \theta_{,1}) = \rho \dot{u}_1, \quad (9)$$

$$c_{13} u_{1,1} + (c_{33} u_{3,3})_{,3} + ((c_{55} (u_{1,3} + u_{3,1}))_{,1} - (\gamma_{33} \theta)_{,3}) = \rho \dot{u}_3, \quad (10)$$

$$k_{11} \theta_{,11} + (k_{33} \theta_{,3})_{,3} = c \dot{\theta} + T_0 \gamma_{11} \dot{u}_{1,1} + T_0 \gamma_{33} \dot{u}_{3,3}, \quad (11)$$

$$u_1(x_1, 0, t) = u_3(x_1, 0, t) = \theta(x_1, 0, t) = 0, \quad (12)$$

$$\sigma_{33}(x_1, h, t) = F_1(x_1, t), \quad (13)$$

$$\sigma_{13}(x_1, h, t) = F_2(x_1, t), \quad (14)$$

$$q(x_1, h, t) = F_3(x_1, t), \quad (15)$$

$$u_1(x_1, x_3, 0) = u_3(x_1, x_3, 0) = \dot{u}_1(x_1, x_3, 0) = \dot{u}_3(x_1, x_3, 0) = \theta(x_1, x_3, 0) = 0. \quad (16)$$

Для упрощения представленной задачи применим к (9)–(16) преобразование Фурье по координате x_1 . Тогда, если положить параметр преобразования Фурье равным нулю, рассматриваемая задача распадается на две более простые задачи относительно усредненных по x_1 полей.

Задача 1:

$$\frac{\partial}{\partial x_3} \left(c_{55} \frac{\partial \hat{u}_1}{\partial x_3} \right) = \rho(x_3) \frac{\partial^2 \hat{u}_1}{\partial t^2}, \quad (17)$$

$$\hat{u}_1(0, t) = 0, \quad c_{55} \frac{\partial \hat{u}_1}{\partial x_3} \Big|_{x_3=h} = \phi_1(t), \quad (18)$$

$$\hat{u}_1(x_3, 0) = 0. \quad (19)$$

Задача 2:

$$\frac{\partial}{\partial x_3} \left(c_{33} \frac{\partial \hat{u}_3}{\partial x_3} \right) - \frac{\partial}{\partial x_3} (\gamma_{33} \hat{\theta}) = \rho \frac{\partial^2 \hat{u}_3}{\partial t^2}, \quad (20)$$

$$c(x_3) \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_3} \left(k_{33} \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial x_3} \right) + T_0 \gamma_{33} \frac{\partial^2 \hat{u}_3}{\partial x_3 \partial t} = 0, \quad (21)$$

$$\hat{u}_3(0,t) = \hat{\theta}(0,t) = \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial x_3}(0,t) = 0, \quad (22)$$

$$c_{33} \frac{\partial \hat{u}_3}{\partial x_3} - \gamma_{33} \hat{\theta} \Big|_{x_3=h} = \phi_2(t), \quad (23)$$

$$\hat{\theta}(x_3,0) = \hat{u}_3(x,0) = \frac{\partial \hat{u}_3}{\partial t}(x_3,0) = 0. \quad (24)$$

Задачи 1 и 2 аналогичны задачам теории упругости и термоупругости для стержня, хорошо изученным в [4, 8, 9]. Для задачи 2 введем безразмерные параметры и функции, обозначая:

$$z = \frac{x_3}{h}, \quad U = \frac{\hat{u}_3}{h}, \quad W = \frac{\gamma_{33}^{\max} \hat{\theta}}{c_{33}^{\max}}, \quad v_0 = \sqrt{\frac{c_{33}^{\max}}{\rho^{\max}}}, \quad t_1 = \frac{h}{v_0}, \quad \tau = \frac{t}{t_1}, \quad \bar{k}(z) = \frac{k_{33}(zh)}{k_{33}^{\max}},$$

$$\bar{E}(z) = \frac{c_{33}(zh)}{c_{33}^{\max}}, \quad \bar{\rho}(z) = \frac{\rho(zh)}{\rho^{\max}}, \quad \bar{c}(z) = \frac{c(zh)}{c^{\max}}, \quad \bar{\gamma}(z) = \frac{\gamma_{33}(zh)}{\gamma_{33}^{\max}},$$

$$\varepsilon = \frac{t_2}{t_1} = \frac{k_{33}^{\max}}{c_{33}^{\max} h} \sqrt{\frac{\rho^{\max}}{c_{33}^{\max}}}, \quad \delta_0 = \frac{\gamma_{33}^{\max} T_0}{c^{\max} c_{33}^{\max}}.$$

В новых переменных задача 2 примет вид:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\bar{E}(z) \frac{\partial U}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} (\bar{\gamma}(z) W) = \bar{\rho}(z) \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2}, \quad (25)$$

$$\varepsilon \frac{\partial}{\partial z} \left(\bar{k}(z) \frac{\partial W}{\partial z} \right) = \bar{c}(z) \frac{\partial W}{\partial \tau} + \delta_0 \bar{\gamma}(z) \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial \tau}, \quad (26)$$

$$U(0,\tau) = W(0,\tau) = \frac{\partial W}{\partial z}(0,\tau) = 0, \quad \bar{E}(z) \frac{\partial U}{\partial z} - \bar{\gamma} W \Big|_{z=1} = \phi_2(\tau), \quad (27)$$

$$W(z,0) = U(z,0) = \frac{\partial U}{\partial \tau}(z,0) = 0, \quad (28)$$

Прямая задача (25)–(28) после применения преобразования Лапласа по τ сведена к системе интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода в трансформантах, как в [8]. Решение системы интегральных уравнений проводилось на основе метода коллокаций с использованием квадратурной формулы трапеций. Для нахождения оригиналов температуры и перемещений применялась теория вычетов.

3. Задача термоупругости для цилиндра

В качестве второго примера рассмотрим случай радиальных колебаний неоднородного длинного полого цилиндра под действием равномерно распределенной нагрузки, приложенной на внешней поверхности $r = b$. Внутренняя поверхность цилиндра $r = a$ теплоизолирована. Тогда:

$$\sigma_{rr} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial r} + \lambda \frac{u}{r} - \gamma\theta, \quad (29)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \lambda \frac{\partial u}{\partial r} + (\lambda + 2\mu) \frac{u}{r} - \gamma\theta, \quad (30)$$

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (31)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(k(r)r \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) = c_\varepsilon(r) \frac{\partial \theta}{\partial t} + T_0 \gamma(r) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial t} \right), \quad (32)$$

$$\theta(r,0) = u(r,0) = \frac{\partial u}{\partial t}(r,0) = 0, \quad (33)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial r}(a,t) = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial r}(b,t) = 0, \quad (34)$$

$$\sigma_{rr}(a,t) = 0, \quad \sigma_{rr}(b,t) = \varphi(t). \quad (35)$$

После введения безразмерных переменных и применения преобразования Лапласа прямая задача для цилиндра решается методом пристрелки. Для нахождения оригиналов решений применяется метод Дурбина [11].

4. Итерационная схема решения обратных задач термоупругости

В обратной задаче требуется определить одну из термомеханических характеристик цилиндра и слоя при известных остальных характеристиках по дополнительной информации. Так, в случае теплового нагружения цилиндра дополнительной информацией является значение температуры $W(1, \tau) = f(\tau)$, $\tau \in [a, b]$, а в случае механического нагружения – смещение $U(1, \tau) = g(\tau)$, $\tau \in [c, d]$ на внешней поверхности цилиндра.

Процедура восстановления термомеханических коэффициентов состоит из двух этапов. На первом этапе определяется начальное приближение в классе положительных ограниченных линейных функций $\bar{a}^{(0)}(z) = kz + b$ на основе минимизации функционала невязки, который в случае теплового нагружения цилиндра имеет вид:

$$J_1 = \int_a^b (f(\tau) - W(1, \tau))^2 d\tau, \quad (36)$$

а в случае механического нагружения:

$$J_2 = \int_c^d (g(\tau) - U(1, \tau))^2 d\tau. \quad (37)$$

На втором этапе уточняется закон изменения восстанавливаемой функции на основе построения итерационного процесса по схеме:

$$\bar{a}^{(n)}(z) = \bar{a}^{(n-1)}(z) + \delta \bar{a}^{(n-1)}(z). \quad (38)$$

Интегральные уравнения в трансформантах (7), (8) в случае восстановления одной функции при известных остальных распадаются на независимые интегральные уравнения. Для восстановления на конечном временном промежутке к уравнениям в трансформантах применяются теоремы операционного исчисления. Так, для нахождения поправок удельной теплоемкости цилиндра $\delta \bar{c}^{(n-1)}$ необходимо решать интегральное уравнение

$$\int_0^1 \delta \bar{c}^{(n-1)} R(z, \tau) dz = f(\tau) - W^{(n-1)}(1, \tau), \quad \tau \in [a, b]. \quad (39)$$

Здесь ядро

$$R(z, \tau) = \int_0^{\tau} \frac{\partial W^{(n-1)}(z, \tau_1)}{\partial \tau} \frac{\partial W^{(n-1)}(z, \tau - \tau_1)}{\partial \tau} d\tau_1.$$

Для регуляризации решения интегральных уравнений вида (39) применялся метод А.Н. Тихонова.

Выход из итерационного процесса осуществлялся по достижении функционалами невязки (36), (37) порогового значения, равного 10^{-6} .

4. Результаты вычислительных экспериментов

В расчетах принято: $\phi_1(\tau) = \phi_2(\tau) = \varphi(\tau) = H(\tau)$, $\delta_0 = 0,03$. Выяснено, что измерение температуры достаточно информативно на интервале $[a, b] = [0; 0,5]$ и в четырех точках наблюдения внутри него, а измерение смещения – на интервале $[c, d] = [0; 1]$ и в пяти точках наблюдения внутри него. Восстанавливались гладкие термомеханические характеристики в классах степенных, экспоненциальных, тригонометрических и логарифмических функций. Выяснено, что характеристики восстанавливаются с хорошей точностью: погрешность восстановления монотонных функций не превосходит 3%, а немонотонных – 9%.

На рис. 1 показан результат реконструкции закона изменения удельной теплоемкости цилиндра $\bar{c}(z) = 2 + \cos(3z)$. Начальное приближение $\bar{c}_0 = 3,05 - 1,8z$. Для достижения порогового значения функционалом (36) потребовалось 4 итерации. Погрешность реконструкции на последней итерации не превысила 4%.

На рис. 2 представлен результат реконструкции закона изменения упругого модуля слоя $\bar{E}(z) = 1 + 3z^2$. Начальное приближение $\bar{E}_0 = 0,95 + 3,9z$. Потребовалось 3 итерации. Погрешность реконструкции не превысила 3%.

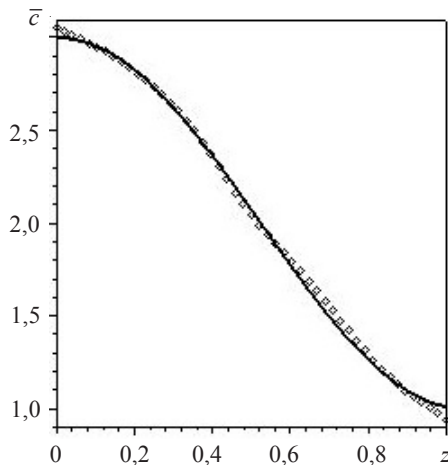


Рис. 1

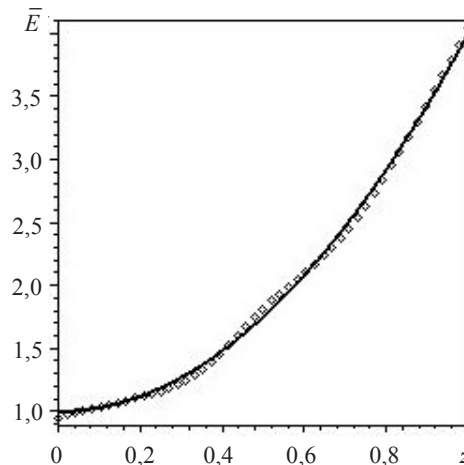


Рис. 2

Список литературы

1. Wetherhold R.C., Seelman S., Wang J. The use of functionally graded materials to eliminated or control thermal deformation // Compos. Sci. Tech. 1996. No. 56. P. 1099–1104.
2. Lee W.Y., Stinton D.P., Bernardt C.C., Erdogan F., Lee Y.D., Mutasin Z. Concept of functionally graded materials for advanced thermal barrier coatings applications // J. American Ceramic Society. 1996. V. 19. P. 3003–3012.

3. Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Румянцев С.В. Экстремальные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1988. 288 с.
4. Ватульян А.О. Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела. М.: Физматлит, 2007. 224 с.
5. Ломазов В.А. Задачи диагностики неоднородных термоупругих сред. Орел: Изд-во ОрелГТУ, 2002. 168 с.
6. Lukasiwicz S.A., Babaei R., Qian R.E. Detection of material properties in a layered body by means of thermal effect // J. Thermal Stresses. 2003. V. 26, No. 1. P. 13–23.
7. Ватульян А.О. К теории обратных коэффициентных задач в линейной механике деформируемого тела // ПММ. 2010. № 6. С. 911–918.
8. Ватульян А.О., Нестеров С.А. Об одном способе идентификации термоупругих характеристик для неоднородных тел // ИФЖ. 2014. Т. 87, №1. С. 217–224.
9. Nedin R., Nesterov S., Vatulyan A. On an inverse problem for inhomogeneous thermoelastic rod // Int. J Solids Struct. 2014. V. 51(3). P. 767–773.
10. Ватульян А.О., Нестеров С.А. Об особенностях идентификации термомеханических характеристик функционально-градиентных материалов // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2014. Т. 14. Вып. 3. С. 329–335.
11. Durbin F. Numerical inversion of Laplace transforms: an efficient improvement to Dubner and Abate's method // The Computer Journal. 1974. V. 17. P. 371–376.

References

1. Wetherhold R.C., Seelman S., Wang J. The use of functionally graded materials to eliminated or control thermal deformation // Compos. Sci. Tech. 1996. No. 56. P. 1099–1104.
2. Lee W.Y., Stinton D.P., Bernardt C.C., Erdogan F., Lee Y.D., Mutasin Z. Concept of functionally graded materials for advanced thermal barrier coatings applications // J. American Ceramic Society. 1996. V. 19. P. 3003–3012.
3. Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Румянцев С.В. Экстремальные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1988. 288 с.
4. Ватульян А.О. Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела. М.: Физматлит, 2007. 224 с.
5. Ломазов В.А. Задачи диагностики неоднородных термоупругих сред. Орел: Изд-во ОрелГТУ, 2002. 168 с.
6. Lukasiwicz S.A., Babaei R., Qian R.E. Detection of material properties in a layered body by means of thermal effect // J. Thermal Stresses. 2003. V. 26, No. 1. P. 13–23.
7. Ватульян А.О. К теории обратных коэффициентных задач в линейной механике деформируемого тела // ПММ. 2010. № 6. С. 911–918.
8. Ватульян А.О., Нестеров С.А. Об одном способе идентификации термоупругих характеристик для неоднородных тел // ИФЖ. 2014. Т. 87, №1. С. 217–224.
9. Nedin R., Nesterov S., Vatulyan A. On an inverse problem for inhomogeneous thermoelastic rod // Int. J Solids Struct. 2014. V. 51(3). P. 767–773.
10. Ватульян А.О., Нестеров С.А. Об особенностях идентификации термомеханических характеристик функционально-градиентных материалов // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2014. Т. 14. Вып. 3. С. 329–335.
11. Durbin F. Numerical inversion of Laplace transforms: an efficient improvement to Dubner and Abate's method // The Computer Journal. 1974. V. 17. P. 371–376.

**COEFFICIENT INVERSE PROBLEMS OF THERMOELASTICITY
FOR FUNCTIONALLY GRADED MATERIALS**

Vatulyan A.O., Nesterov S.A.

On the basis of the generalized reciprocity relation obtained integral equations to construct an iterative process of reconstruction of thermomechanical characteristics of inhomogeneous bodies. A procedure for the reconstruction of the thermomechanical characteristics of the inhomogeneous layer and a hollow cylinder is considered. The direct problem for the layer is solved based on the unit of Fredholm integral equations of the 2nd kind. The direct problem for a cylinder is solved by the method of adjustment.

Keywords: functionally graded materials, inverse problem, thermoelasticity, identification, iterative process, layer, hollow cylinder.