

УДК 539.3

DOI: 10.32326/1814-9146-2019-81-3-369-380

**О КОЛЕБАНИЯХ НЕОДНОРОДНОГО ПЬЕЗОДИСКА**

© 2019 г.

**Ватульян А.О.<sup>1</sup>, Зубков Ю.Н.<sup>2</sup>**<sup>1</sup>*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Российская Федерация*<sup>2</sup>*Университет Небраски, Линкольн, США*

vatulyan@math.rsu.ru, izubkov2@unl.edu

*Поступила в редакцию 25.07.2019*

В рамках модели связанной электроупругости неоднородных тел рассмотрена задача об установившихся колебаниях тонкого пьезодиска с неоднородными свойствами, в частности, при наличии радиальной поляризации. Произведены необходимые упрощения в рамках традиционных гипотез, сформулированная краевая задача приведена к канонической системе дифференциальных уравнений первого порядка относительно безразмерных компонент радиального смещения и радиального напряжения с соответствующими граничными условиями. Прямая задача о колебаниях неоднородного диска решена численно на основе метода пристрелки путем численного анализа вспомогательных задач Коши. Проведен анализ амплитудно-частотных характеристик и резонансных частот в зависимости от различных законов изменения неоднородных свойств пьезодиска, которые в представленной модели характеризуются двумя функциями, одна из которых характеризует изменение упругого модуля, вторая – изменение пьезомодуля. Сформулирована обратная задача в первой постановке, в которой восстановлены законы изменения неоднородности пьезодиска (две функции) по значениям функций, характеризующих радиальное смещение и напряжение, известных в конечном наборе точек. Представлены результаты вычислительных экспериментов по решению обратной задачи в первой постановке, обсуждены различные аспекты реконструкции. Сформулирована вторая постановка обратной задачи по определению пьезоэлектрической характеристики диска, где известными считаются функция, описывающая законы изменения упругой характеристики диска, и амплитудно-частотная характеристика. Для решения обратной задачи в этой постановке сформулировано интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода с гладким ядром. Представлены результаты численных экспериментов по решению интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода с помощью регуляризирующего метода Тихонова, обсуждены различные аспекты реконструкции.

*Ключевые слова:* неоднородный диск, электроупругость, амплитудно-частотные характеристики, регуляризация, идентификация.

**Введение**

В разных областях машиностроения, вычислительной и диагностической техники, автоматики и радиоэлектроники находят применение функциональные элементы, основанные на использовании пьезоэффекта [1, 2], причем в настоящее время

наиболее употребительными являются пьезокерамики, имеющие различный состав и разные технологии изготовления. Свойства поляризованной керамики в значительной степени определяются ее доменной структурой, которая приводит к появлению неоднородных свойств модели. Часто при моделировании предполагается, что материал однороден и его свойства определяются набором констант. Однако во многих задачах гипотеза однородности не является адекватной и физические свойства моделируемого объекта зависят от координат. Например, характерной особенностью сегнетоэлектриков является наличие в определенном диапазоне температур спонтанной поляризации, которая не остается однородной по объему кристалла. Из-за многоуровневости технологического процесса создания пьезоэлемента в изготовленном пьезокерамическом функциональном элементе часто наблюдаются несоответствия установленным нормам, что выражается в неоднородности упругих и пьезоэлектрических свойств. Умение оценить степень отклонения свойств от заявленных норм (определение реальных характеристик) пьезоэлемента помогает проверить возможность применения его в конкретном функциональном элементе и позволяет осуществлять более точные расчеты.

Актуальность изучения неоднородных свойств электроупругих материалов не вызывает сомнений: в настоящее время на эту тему написаны десятки статей, проведено множество исследований, в которых изучается вопрос об определении закона изменения пьезомодуля в зависимости от координаты; отметим публикации [3–12]. Ряд разделов монографии [4] посвящен решению задачи идентификации свойств неоднородных электроупругих материалов для стержневых элементов конструкций в рамках линейной теории электроупругости, где поставлены общие задачи, выведены соотношения, которые позволяют переходить от сложных моделей к более частным, представлены итерационные схемы исследования сформулированных коэффициентных обратных задач.

Большой популярностью пользуются функционально-градиентные пьезоматериалы (ФГП), физические характеристики которых непрерывно зависят от координат, причем законы неоднородности продиктованы некоторыми функциональными требованиями различного типа и создаются в результате реализации некоторых технологических процессов. Знание точных характеристик для конструктивных элементов из таких материалов крайне важно для правильной их эксплуатации и выбора режимов нагружения. В [13, 14] авторы рассматривают методы частотного анализа кольцевых ФГП преобразователей на упругом основании. Решению обратных задач для стержневых ФГП посвящена статья [15]. В [16] рассматриваются обратные задачи об идентификации характеристик материалов с функционально-градиентным покрытием.

Элементы с неоднородной поляризацией часто обладают выраженным затуханием. В настоящее время изучением таких свойств занимается большое количество групп ученых и исследователей. Обычно моделирование затухания осуществляется в рамках концепции динамических модулей либо на основе введения малых комплексных добавок, пропорциональных частоте колебаний. Например, в рамках такого подхода в статье [17] исследуется задача о колебаниях цилиндрического пьезоцилиндра с неоднородной окружной поляризацией с учетом затухания. Исследования колебаний неоднородных пьезоструктур продолжается на основе различных, в том числе и конечно-элементных, подходов. Настоящая работа посвящена одному из них.

## 1. Постановка задачи для неоднородного пьезоэлектрического диска

Рассмотрим установившиеся колебания пьезоэлектрического диска радиусом  $a$ , толщиной  $h$  ( $h/a \ll 1$ ) [1]. Будем считать, что границы  $z = \pm h/2$  электродированы. При подаче на торцевые электроды переменной во времени с частотой  $\omega$  разности потенциалов  $\varphi$  с амплитудой  $V_0$  в диске будут возникать радиальные осесимметричные колебания.

Классическая постановка задачи о радиальных колебаниях тонкой пьезокерамической пластинки рассмотрена в монографии [1]. Осесимметричное электроупругое поле диска описывается уравнениями движения при стационарных колебаниях

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \rho \omega^2 u_r &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \sigma_{rz} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \rho \omega^2 u_z &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

и уравнением электростатики

$$\frac{\partial D_r}{\partial r} + \frac{1}{r} D_r + \frac{\partial D_z}{\partial z} = 0, \quad (2)$$

где  $u_r, u_z$  – радиальные и осевые смещения диска соответственно.

Для напряжений  $\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{rz}, \sigma_{zz}$  и составляющих вектора электрической индукции  $D_r, D_z$  имеем следующие определяющие соотношения [1]:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= c_{11}^E \frac{\partial u_r}{\partial r} + c_{13}^E \frac{\partial u_z}{\partial z} + c_{12}^E \frac{u_r}{r} + e_{31} \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \\ \sigma_{\theta\theta} &= c_{12}^E \frac{\partial u_r}{\partial r} + c_{13}^E \frac{\partial u_z}{\partial z} + c_{11}^E \frac{u_r}{r} + e_{31} \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \\ \sigma_{rz} &= c_{44}^E \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} \right) + e_{15} \frac{\partial \varphi}{\partial r}, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{zz} &= c_{13}^E \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} \right) + c_{33}^E \frac{\partial u_z}{\partial z} + e_{33} \frac{\partial \varphi}{\partial z}; \\ D_r &= -\varepsilon_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + e_{15} \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} \right), \end{aligned} \quad (4)$$

$$D_z = -\varepsilon_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial z} + e_{31} \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} \right) + e_{33} \frac{\partial u_z}{\partial z}.$$

Будем считать, что упругие и пьезоэлектрические параметры зависят от радиальной координаты, то есть  $c_{ij}^E = c_{ij}^E(r), e_{ij} = e_{ij}(r), i, j = 1, 5$ ; а  $\varepsilon_{11}$  – диэлектрическая постоянная.

Граничные условия представимы в форме:

$$\sigma_{rr}|_{r=a} = 0, \quad \sigma_{rz}|_{r=a} = 0, \quad \sigma_{rz}|_{z=\pm h/2} = \sigma_{zz}|_{z=\pm h/2} = 0, \quad D_r|_{r=a} = 0, \quad \varphi|_{z=\pm h/2} = \pm V_0. \quad (5)$$

Упростим общую постановку сформулированной задачи с помощью некоторых гипотез.

Так, используя гипотезу о том, что диск находится в условиях плоского напряженного состояния, можно считать, что  $\sigma_{zz} \approx 0, u_r = u_r(r)$ ; кроме того, будем счи-

тать, что  $\varphi = 2V_0z/h$ , при этом граничные условия на электродах выполнены автоматически.

Тогда, исходя из (1) и представленных выше гипотез, можно получить систему дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} = \frac{\sigma_{rr}}{r} \left( \frac{c_{12}^*}{c_{11}^*} - 1 \right) + \frac{u_r}{r^2} c_{11}^* \left( 1 - \left( \frac{c_{12}^*}{c_{11}^*} \right)^2 \right) - \rho \omega^2 u_r + \frac{2V_0}{rh} e_{31}^* \left( 1 - \frac{c_{12}^*}{c_{11}^*} \right), \\ \frac{\partial u_r}{\partial r} = \frac{1}{c_{11}^*} \sigma_{rr} - \frac{c_{12}^*}{c_{11}^*} \frac{u_r}{r} - \frac{e_{31}^*}{c_{11}^*} \frac{2V_0}{h}, \end{cases} \quad (6)$$

где введены следующие обозначения:

$$c_{11}^* = c_{11}^E \left( 1 - \frac{c_{13}^{E^2}}{c_{33}^E c_{11}^E} \right), \quad c_{12}^* = c_{12}^E \left( 1 - \frac{c_{13}^{E^2}}{c_{33}^E c_{12}^E} \right), \quad e_{31}^* = e_{31}^E \left( 1 - \frac{c_{13}^E e_{33}}{e_{31} c_{33}} \right).$$

Введем следующие безразмерные характеристики и функции:

$$\xi = \frac{r}{a}, \quad \xi \in [0, 1], \quad \kappa^2 = \frac{\rho \omega^2 a^2}{c_{11}^*}, \quad T(\xi) = \frac{\sigma_{rr}}{c_{11}^*}, \quad U(\xi) = \frac{u_r}{a},$$

$$\gamma_1(\xi) = \frac{c_{12}^*(\xi)}{c_{11}^*}, \quad \gamma_2(\xi) = \frac{e_{31}^*(\xi)}{c_{11}^*} \frac{2V_0}{h}.$$

Таким образом, получаем безразмерную каноническую систему дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \frac{dT}{d\xi} = \frac{T}{\xi} (\gamma_1 - 1) + \frac{U}{\xi^2} (1 - \gamma_1^2) - U \kappa^2 + \frac{\gamma_2}{\xi} (1 - \gamma_1), \\ \frac{dU}{d\xi} = T - \gamma_1 \frac{U}{\xi} - \gamma_2. \end{cases} \quad (7)$$

Обычно в случае постоянных параметров дополнительным условием является условие ограниченности в нуле, и решение строится в виде линейной комбинации функций Бесселя первого и второго рода. Условие ограниченности в нуле сразу позволяет исключить из решения функции Бесселя второго рода в силу их неограниченности в нуле. В случае численного решения задачи методом пристрелки этого сделать нельзя и для численного построения решения применяется следующий прием. Считается, что в окрестности начала координат имеется отверстие малого радиуса  $\epsilon_0$ , свободное от напряжений, поэтому граничные условия представимы в форме:  $T(\epsilon_0) = 0$ ,  $T(1) = 0$ , где граничное условие на внутренней границе формулируется для малого внутреннего радиуса.

## 2. Решение прямой задачи и результаты вычислительных экспериментов для различных законов неоднородности

Представим систему (7) в матричном виде  $(\underline{X})' = \underline{A}\underline{X} + \underline{B}$ , где введены обозначения:

$$\underline{X} = \begin{pmatrix} U \\ T \end{pmatrix}, \quad \underline{A} = \begin{pmatrix} \frac{a_{11}}{\xi} & \frac{a_{12}}{\xi^2} - \kappa^2 \\ a_{21} & \frac{a_{22}}{\xi} \end{pmatrix}, \quad \underline{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \xi \end{pmatrix},$$

причем элементы матрицы  $\underline{A}$  и вектора  $\underline{B}$  определены следующим образом:

$$a_{11} = (\gamma_1 - 1), \quad a_{12} = 1, \quad a_{21} = (1 - \gamma_1^2), \quad a_{22} = -\gamma_1 \text{ и } b_1 = -\gamma_2, \quad b_2 = \gamma_2(1 - \gamma_1).$$

Тогда решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений (7) можно получить, используя метод пристрелки, который заключается в том, что решение отыскивается в виде линейной комбинации решений двух задач Коши следующей структуры:

$$(\underline{X}^1)' = \underline{A}\underline{X}^1 + \underline{B}, \quad \underline{X}^1(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ и } (\underline{X}^2)' = \underline{A}\underline{X}^2, \quad \underline{X}^2(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Апробация метода была произведена для случая постоянных параметров системы дифференциальных уравнений (7) путем сравнения численно полученных собственных частот с аналитически найденными в [1]. Сравнительный анализ показал достаточную точность решения, полученного методом пристрелки. На основе этого подхода будем исследовать зависимость резонансных частот (7) от переменных параметров  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ , зависящих от  $\xi$ , при  $\epsilon_0 = 10^{-6}$ .

Пусть зависимости  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  имеют вид:

$$\gamma_1 = \gamma_{10} \frac{1 - f_1(\xi)}{1 - f_2(\xi)}, \quad \gamma_2 = \gamma_{20} \frac{1 - f_3(\xi)}{1 - f_2(\xi)},$$

где

$$\gamma_{10} = \max \begin{pmatrix} c_{12}^* \\ c_{11}^* \end{pmatrix}, \quad \gamma_{20} = \max \begin{pmatrix} e_{31}^* \frac{2V_0}{h} \\ c_{11}^* \end{pmatrix}.$$

В таблице 1 представлены различные значения первых трех собственных частот неоднородного пьезокерамического диска для различных законов изменения функций  $f_1(\xi)$ ,  $f_2(\xi)$ ,  $f_3(\xi)$ .

Таблица 1

$f_1, f_2, f_3$	$\kappa_1$	$\kappa_2$	$\kappa_3$
$l$	2	3	4
$f_1(\xi) = 0$ $f_2(\xi) = 0$ $f_3(\xi) = 0$	2,211427	5,443457	8,605408
$f_1(\xi) = 0,5$ $f_2(\xi) = 0,099\xi + 0,001$ $f_3(\xi) = 0,5$	2,052484	5,387192	8,569666
$f_1(\xi) = 0,99$ $f_2(\xi) = 0,099\xi + 0,001$ $f_3(\xi) = 0,99$	1,845919	5,332565	8,536985
$f_1(\xi) = 0,1$ $f_2(\xi) = 0,099\xi + 0,001$ $f_3(\xi) = 0,1$	2,191248	5,431066	8,596182

Таблица 1 (продолжение)

<i>I</i>	2	3	4
$f_1(\xi) = 0,099\xi + 0,001$ $f_2(\xi) = 0,1$ $f_3(\xi) = 0,1$	2,232701	5,457418	8,615952
$f_1(\xi) = 0,9999$ $f_2(\xi) = 0,0099\xi + 0,0001$ $f_3(\xi) = 0,9999$	1,841229	5,331454	8,536323

Анализ данных из таблицы 1 показал, что наибольшее влияние на резонансные частоты оказывает закон изменения функции  $f_2(\xi)$ .

### 3. Обратная задача о реконструкции законов неоднородности.

#### Первая постановка. Результаты вычислительных экспериментов

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений (7). Сформулируем постановку задачи об определении законов неоднородности по некоторой дополнительной информации о решении. Рассмотрим простейшую постановку, в которой известны компоненты физических полей внутри диска на некоторой фиксированной частоте. В рамках этой постановки будем считать, что значения функций  $U, T$  известны в конечном наборе точек  $\xi_k, k = 1, 2, \dots, N$ .

Сформулируем обратную задачу об определении функций  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ . Из (7) видно, что эти функции могут быть определены, если известны не только функции  $U, T$ , но и их производные. Для нахождения производных этих функций воспользуемся сплайн-аппроксимацией пятого порядка [18]. Хотя система (7) – нелинейная система относительно  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  (в правую часть первого уравнения входят величины  $\gamma_1^2$  и  $\gamma_2\gamma_1$ ), возможно однозначно определить эти функции по формулам в явном виде:

$$\gamma_1 = \frac{U\kappa^2\xi^2 + T\xi^2 + U'\xi - U}{U'\xi - U}, \quad \gamma_2 = -\frac{U\kappa^2\xi^2 + UT'\xi^2 + U'^2\xi^2 - U'T\xi^2 + TU\xi - U^2}{(U'\xi - U)\xi}.$$

Нетрудно видеть, что когда  $U = C\xi$ , знаменатель обращается в ноль. Это может вызывать трудности в восстановлении законов изменения переменных физических параметров в низкочастотной области (близкая к описанной форма колебаний имеет место, когда частоты колебаний низки). В случае когда закон изменения функции  $U(\xi)$  отличен от линейного, эти соотношения позволяют восстанавливать искомые функции с достаточно высокой степенью точности. Максимальное отклонение решения, построенного по этим формулам, составляет 15–20% и наблюдается в точках, близких к центру диска, в остальных точках погрешность реконструкции гладких законов не превосходит долей процента.

В рамках первой постановки обратной задачи восстанавливались различные законы изменения функций  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ . Рассматривались линейные, степенные, тригонометрические, экспоненциальные зависимости и их комбинации. Типичный пример реконструкции представлен на рис. 1 ( $\gamma_1 = 0,59 - 0,59\xi - 0,059\sin 10\xi$ , число точек разбиения  $m = 15$ ). Представленная схема также позволяет рассматривать кусочно-непрерывные законы изменения физических характеристик (рис. 2):

$$\gamma_2 = \begin{cases} \frac{-0,5}{1-0,5\xi}, & \xi < 0,3, \\ \frac{-0,5}{0,6-0,3\xi}, & 0,3 \leq \xi < 0,6, \\ -1,2+0,6\xi, & \xi \geq 0,6, \end{cases}$$

$m = 15$ , что соответствует диску, составленному из колец с существенно различающимися физическими характеристиками. Сплошной линией изображено точное решение, точками – построенное численно.

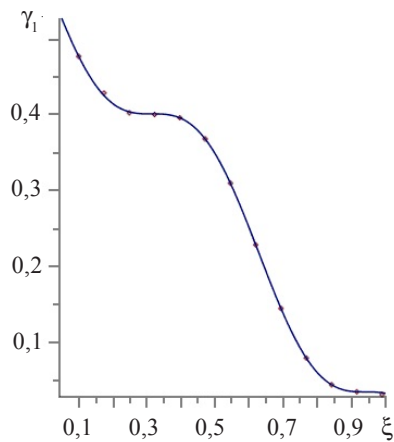


Рис. 1

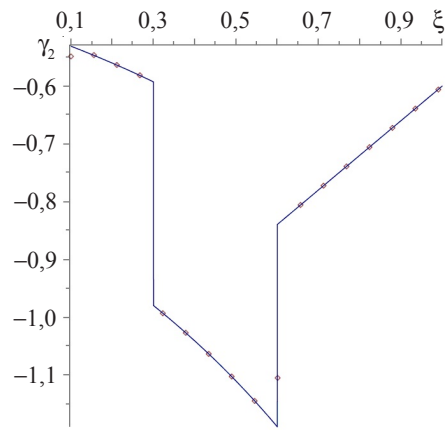


Рис. 2

#### 4. Обратная задача во второй постановке.

##### Формулировка интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода. Результаты вычислительных экспериментов

Первая постановка обратной задачи труднореализуема на практике, однако позволяет изучить возможные сложности процесса идентификации характеристик. Более реальной с точки зрения практического приложения является такая постановка, в которой известна амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) смещений на границе диска в некоторой частотной области. Отметим, что обе функции  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  невозможно однозначно восстановить из информации о поле смещений на границе. Таким образом, иная постановка заключается в том, чтобы на основе информации об АЧХ и функции  $\gamma_2$  восстанавливать закон изменения физической характеристики  $\gamma_1$ , которая входит коэффициентом в однородную часть системы дифференциальных уравнений (7). В таком случае получается коэффициентная обратная задача, которая является существенно нелинейной. Обычно в исследованиях в этой ситуации строится итерационный процесс типа метода Ньютона [19].

Вторая постановка посвящена исследованию задачи об определении функции  $\gamma_2$ , которая входит только в правую часть оператора, и обратная задача оказывается линейной. Пусть известны АЧХ  $U|_{\xi=1} = f(\kappa)$  на некотором частотном диапазоне  $\kappa \in [\kappa_1, \kappa_2]$  и функция  $\gamma_1$ , характеризующая упругую характеристику пьезодиска. По этой информации восстановим функцию  $\gamma_2$  которая характеризует его пьезоэлектрические свойства.

Определим скалярное умножение как  $(\underline{X}, \underline{Y}_\xi) = \int_{\varepsilon_0}^1 \underline{X} \cdot \underline{Y}_\xi d\xi$ . Умножим уравнения (7) скалярно справа на вектор  $\underline{Y}_\xi : (\underline{X})' \underline{Y}_\xi = \underline{A} \underline{X} \underline{Y}_\xi + \underline{B} \underline{Y}_\xi$ , где  $\underline{Y}_\xi$  является решением сопряженной задачи

$$(\underline{Y})'_\xi = -\underline{A}^T \underline{Y}_\xi$$

с краевыми условиями

$$\begin{cases} Y_{\xi_1}(1) = 1, \\ Y_{\xi_1}(\varepsilon_0) = 0. \end{cases}$$

Проинтегрируем полученное соотношение от  $\varepsilon_0$  до 1 и с учетом введенного скалярного произведения получим соотношение

$$\int_{\varepsilon_0}^1 (\underline{X})' \cdot \underline{Y}_\xi d\xi = \underline{X} \cdot \underline{Y}_\xi \Big|_{\varepsilon_0}^1 - \int_{\varepsilon_0}^1 (\underline{Y})'_\xi d\xi = (\underline{X}, \underline{A}^T \underline{Y}_\xi) + (\underline{B}, \underline{Y}_\xi).$$

Так как

$$(\underline{U} \underline{Y}_{\xi_1} + \underline{T} \underline{Y}_{\xi_2}) \Big|_{\varepsilon_0}^1 = 0 \text{ и } U \Big|_{\xi=1} = f(\kappa),$$

получим интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода

$$\int_{\varepsilon_0}^1 K(\kappa, \xi) \gamma_2(\xi) d\xi = f(\kappa), \quad \kappa \in [\kappa_1, \kappa_2], \quad (8)$$

где

$$K(\kappa, \xi) = -Y_{\xi_1} + \frac{1 - \gamma_1}{\xi} Y_{\xi_2}$$

– непрерывное ядро при  $\xi \in [\varepsilon_0, 1]$ ,  $\kappa \in [\kappa_1, \kappa_2]$ . Решение интегрального уравнения (8) представляет собой некорректную задачу, которая решена с помощью метода регуляризации А.Н. Тихонова [20].

Были проведены вычислительные эксперименты для степенных и экспоненциальных законов неоднородности. На рис. 3 представлены результаты вычислительных экспериментов при постоянном параметре  $\gamma_1$ .

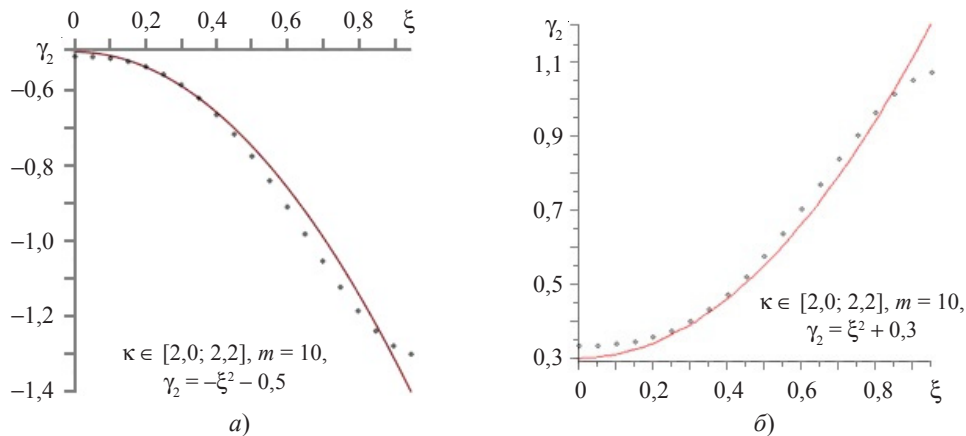


Рис. 3



Сплошной линией изображено точное решение, точками – построенное в результате решения интегрального уравнения (8);  $m$  задает число точек съема информации в частотном диапазоне.

Результаты вычислительных экспериментов показали, что ключевым моментом при восстановлении законов неоднородности является выбор частотного диапазона  $[\kappa_1, \kappa_2]$ , в частности нужно, чтобы этот диапазон был близок к резонансному режиму, где АЧХ изменяется сильно. Также можно отметить, что увеличение числа точек измерения  $m$  не всегда приводит к уменьшению погрешности реконструкции.

### Заключение

Исследована задача о радиальных колебаниях неоднородного пьезокерамического диска. Сформирована система дифференциальных уравнений первого порядка, построено ее решение методом пристрелки. Проведен анализ зависимости амплитудно-частотной характеристики системы дифференциальных уравнений от различных законов неоднородности физических характеристик диска. Рассмотрены обратные задачи в двух постановках. Восстановлены различные варианты законов изменения физических характеристик для обратной задачи в первой постановке. Для обратной задачи во второй постановке построено интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода относительно функции, отвечающей за пьезоэлектрические свойства диска, которое решено на основе метода регуляризации А.Н. Тихонова. Представлены результаты вычислительных экспериментов. Отмечено, что при восстановлении законов неоднородности частотный диапазон наблюдения должен быть близок к резонансному режиму, где АЧХ изменяется сильно, и что увеличение числа точек измерения не всегда приводит к уменьшению погрешности реконструкции.

### Список литературы

1. Паргон В.З., Кудрявцев Б.А. *Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел*. М.: Наука, 1988. 472 с.
2. Домаркас В.И., Кажис Р.И. *Контрольно-измерительные пьезоэлектрические преобразователи*. Вильнюс: Минтис, 1975. 258 с.
3. Ватульян А.О., Дударев В.В. О реконструкции неоднородных свойств пьезоэлектрических тел. *Вычислительная механика сплошных сред*. 2012. Т. 5. С. 259–264.
4. Ватульян А.О., Соловьев А.Н. *Прямые и обратные задачи для однородных и неоднородных упругих и электроупругих тел*. Ростов-на-Дону: Изд-во ЮФУ, 2008. 176 с.
5. Mohammadzadeh-Keleshteri M., Asadi H., Aghdam M.M. Geometrical nonlinear free vibration responses of FG-CNT reinforced composite annular sector plates integrated with piezoelectric layers. *Composite Structures*. 2017. Vol. 171. P. 100–112.
6. Victor M. Franco Correia, José F. Aguillar Madeira, Aurélio L. Araújo, Cristóvão M. Mota Soares. Multiobjective design optimization of laminated composite plates with piezoelectric layers. *Composite Structures*. 2016. Vol. 169. P. 10–20.
7. Parali L., Perchousek J., Sabikoglu I., Novak P., Navarik J., Vujtek M. A digital measurement system based on laser displacement sensor for piezoelectric ceramic discs vibration characterization. *Optik*. 2016. Vol. 127. P. 84–89.
8. Piao A.C., Kim J.-O. Vibration characteristics of an ultrasonic transducer of two piezoelectric discs. *Ultrasonics*. 2017. Vol. 74. P. 72–80.
9. Feng Jin, Peng Li. Propagation behaviors of thickness-twist modes in an inhomogeneous piezoelectric plate with two imperfectly bonded interfaces. *Ultrasonics*. 2012. Vol. 52. P. 33–38.

10. Hussein M., Heyliger P.R. Discrete layer analysis of axisymmetric vibrations of laminated piezoelectric cylinders. *Journal of Sound and Vibration*. 1996 Vol. 192 Iss. 5. P. 995–1013.
11. Jalili H., Goudarzi H.. Modeling the hollow cylindrical piezo-ceramics with axial polarization using equivalent electro-mechanical admittance matrix. *Sensors and Actuators A: Physical*. 2009. Vol. 149. P. 266–276.
12. Zhou Y.Y., Lu C.F., Chen W.Q. Bulk wave propagation in layered piezomagnetic/piezoelectric plates with initial stresses or interface imperfections. *Composite Structures*. 2012. Vol. 94. P. 2736–2745.
13. Wang H.M., Luo D.S. Exact analysis of radial vibration of functionally graded piezoelectric ring transducers resting on elastic foundation. *Applied Mathematical Modeling*. 2016. Vol. 40. P. 2549–2559.
14. Barati M.R., Sadr M.H., Zenkour A.M. Buckling analysis of higher order graded smart piezoelectric plates with porosities resting on elastic foundation. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2016. Vol. 117. P. 309–320.
15. Богачев И.В., Ватульян А.О., Дударев В.В. Идентификация характеристик функционально-градиентного пьезополимерного стержня. *Механика композитных материалов и конструкций*. 2016. Т. 22. №2. С. 201–212.
16. Ватульян А.О., Плотников Д.К., Поддубный А.А. О некоторых моделях индентирования функционально-градиентных покрытий. *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика*. 2018. Т. 18. №4. С. 421–432.
17. Ватульян А.О., Кондратьев В.С. О колебаниях пьезокерамического цилиндра с окружной поляризацией. *Проблемы прочности и пластичности*. 2018. Т. 80. №4. С. 427–437.
18. Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж. *Теория сплайнов и ее приложения*. М.: Мир, 1972. 319 с.
19. Ватульян А.О. *Коэффициентные обратные задачи механики*. М.: Физматлит, 2019. 272 с.
20. Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г. *Численные методы решения некорректных задач*. М.: Наука, 1990. 230 с.

#### References

1. Parton V.Z., Kudryavtsev B.A. *Elektromagnitoupругost p'yezoelektricheskikh i elektroprovodnykh tel [Electromagnetoelasticity of Piezoelectric and Electrically Conductive Bodies]*. Moscow. Nauka Publ. 1988. 472 p. (In Russian).
2. Domarkas V.I., Kazhis R.I. *Kontrolno-izmeritelnye p'yezoelektricheskie preobrazovateli [Measuring Piezoelectric Transducers]*. Vilnius. Minthis Publ. 1975. 258 p. (In Russian).
3. Vatulyan A.O., Dudarev V.V. O rekonstruktsii neodnorodnykh svoystv p'yezoelektricheskikh tel [On the reconstruction of the inhomogeneous properties of piezoelectric bodies]. *Ychislitel'naya mekhanika sploshnykh sred [Computational Continuum Mechanics]*. 2012. Vol. 5. No 4. P. 259–264 (In Russian).
4. Vatulyan A.O., Soloviev A.N. *Pryamye i obratnye zadachi dlya odnorodnykh i neodnorodnykh uprugikh i elektropругikh tel [Direct and Inverse Problems for Homogeneous and Inhomogeneous Elastic and Electroelastic Bodies]*. Rostov-on-Don. YuFU Publ. 2009. 176 p. (In Russian).
5. Mohammadzadeh-Keleshteri M., Asadi H., Aghdam M.M. Geometrical nonlinear free vibration responses of FG-CNT reinforced composite annular sector plates integrated with piezoelectric layers. *Composite Structures*. 2017. Vol. 171. P. 100–112.
6. Victor M. Franco Correia, José F. Aguillar Madeira, Aurélio L. Araújo, Cristóvão M. Mota Soares. Multiobjective design optimization of laminated composite plates with piezoelectric layers. *Composite Structures*. 2016. Vol. 169. P. 10–20.
7. Parali L., Perchousek J., Sabikoglu I., Novak P., Navarik J., Vujtek M. A digital measurement system based on laser displacement sensor for piezoelectric ceramic discs vibration characterization. *Optik*. 2016, Vol. 127. P. 84–89.
8. Piao A.C., Kim J.-O. Vibration characteristics of an ultrasonic transducer of two piezoelectric discs. *Ultrasonics*. 2017. Vol. 74. P. 72–80.

9. Feng Jin, Peng Li. Propagation behaviors of thickness-twist modes in an inhomogeneous piezoelectric plate with two imperfectly bonded interfaces. *Ultrasonics*. 2012. Vol. 52. P. 33–38.
10. Hussein M., Heyliger P.R. Discrete layer analysis of axisymmetric vibrations of laminated piezoelectric cylinders. *Journal of Sound and Vibration*. 1996 Vol. 192 Iss. 5. P. 995–1013.
11. Jalili H., Goudarzi H.. Modeling the hollow cylindrical piezo-ceramics with axial polarization using equivalent electro-mechanical admittance matrix. *Sensors and Actuators A: Physical*. 2009. Vol. 149. P. 266–276.
12. Zhou Y.Y., Lu C.F., Chen W.Q. Bulk wave propagation in layered piezomagnetic/piezoelectric plates with initial stresses or interface imperfections. *Composite Structures*. 2012. Vol. 94. P. 2736–2745.
13. Wang H.M., Luo D.S. Exact analysis of radial vibration of functionally graded piezoelectric ring transducers resting on elastic foundation. *Applied Mathematical Modeling*. 2016. Vol. 40. P. 2549–2559.
14. Barati M.R., Sadr M.H., Zenkour A.M. Buckling analysis of higher order graded smart piezoelectric plates with porosities resting on elastic foundation. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2016. Vol. 117. P. 309–320.
15. Bogachev I.V., Vatulyan A.O., Dudarev V.V. Identifikatsiya kharakteristik funktsional'no-gradientnogo p'yezopolimernogo sterzhnya [Identification of the characteristics of a functional gradient piezopolymer rod]. *Mekhanika kompozitnykh materialov i konstruktsiy* [*Mechanics of Composite Materials and Structures*]. 2016. Vol. 22. No 2. P. 201–212 (In Russian).
16. Vatulyan A.O., Plotnikov D.K., Poddubnyj A.A. O nekotorykh modelyakh indentirovaniya funktsionalno-gradientnykh pokrytiy [On some models of indentation of functional gradient coatings]. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika* [*Izvestiya of Saratov University. New Series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics*]. 2018. Vol. 18. No 4. P. 421–432 (In Russian).
17. Vatulyan A.O., Kondratev V.S. O kolebaniyah p'ezokeramicheskogo cilindra s okruzhnoy polarizatsiej [On the vibrations of piezoceramic cylinder with circumferential polarization]. *Problemy prochnosti i plastichnosti* [*Problems of Strength and Plasticity*]. 2018. Vol. 80. No 4. P. 427–437 (In Russian).
18. Ahlberg J.H., Nilson E.N., Walsh J.L. *The Theory of Splines and Their Applications*. New York–London. Academic Press. 1967. 292 p.
19. Vatulyan A. O. *Koeffitsientnyye obratnye zadachi mekhaniki* [*Coefficient Inverse Problems of Mechanics*]. Moscow. Fizmatlit Publ. 2019. 272 p. (In Russian).
20. Tikhonov A.N., Goncharskiy A.V., Stepanov V.V., Yagola A.G. *Chislennyye metody resheniya nekorrektnykh zadach* [*Numerical Methods for Solving Ill-posed Problems*]. Moscow. Nauka Publ. 1990. 230 p. (In Russian).

## ON THE VIBRATIONS OF INHOMOGENEOUS PIEZO DISC

Vatulyan A.O.<sup>1</sup>, Zubkov Iu.N.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russian Federation*

<sup>2</sup>*University of Nebraska, Lincoln, USA*

In the framework of the model of coupled electroelasticity of inhomogeneous bodies, the problem of steady-state oscillations of a thin piezodisc with inhomogeneous properties is considered, in particular, in the presence of radial polarization. The necessary simplifications are made within the framework of traditional hypotheses, the formulated boundary-value problem is reduced to a canonical system of first-order differential equations with respect to dimensionless components of radial displacement and radial stress with corresponding boundary conditions. The direct problem of oscillations of an inhomogeneous disk is solved numerically based on the shooting method by numerically analyzing auxiliary Cauchy problems. The analysis of the amplitude-frequency characteristics and resonance frequencies depending on various laws of variation of the inhomogeneous properties of the piezodisc is performed, which in the presented model are

characterized by two functions, one of which characterizes the change in the elastic modulus, the second changes in the piezomodule. The inverse problem is formulated in the first statement, in which the laws of variation of the piezodisc heterogeneity (two functions) are restored from the values of the functions characterizing the radial displacement and stress, known in a finite set of points. The results of computational experiments on solving the inverse problem in the first formulation are presented, various aspects of reconstruction are discussed. The second formulation of the inverse problem is formulated to determine the piezoelectric characteristics of the disk, where a function that describes the laws of change in the elastic characteristics of the disk and the amplitude-frequency characteristic is considered known. To solve the inverse problem, in this formulation, the Fredholm integral equation of the first kind with a smooth kernel is formulated. The results of numerical experiments on solving the Fredholm integral equation of the first kind using the Tikhonov regularizing method are presented, various aspects of reconstruction are discussed.

*Keywords:* heterogeneous disk, electroelasticity, amplitude-frequency characteristics, regularization, identification.