

УДК 539.3

**ЗАКОН СЛОЖНОЙ РАЗГРУЗКИ МАТЕРИАЛОВ  
В ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ****В.Г. Зубчанинов***Тверь*

Представлены закон сложной разгрузки материалов и его экспериментальное обоснование. Дана краткая историческая справка об исследованиях закономерностей разгрузки материалов при простых и сложных процессах деформирования.

**1. Введение**

Остаточные (пластические) деформации при пропорциональном нагружении–разгрузке материалов были впервые обнаружены в опытах Ф.Герстнера в 1824 году при растяжении и последующем разгрузке фортепианных струн [1]. В этих опытах при нагружении струн зависимость между нормальными напряжениями  $\sigma$  и относительной деформацией  $\varepsilon$  описывалась параболической функцией

$$\sigma = E\varepsilon - B\varepsilon^2, \quad (1.1)$$

где  $E$  и  $B$  – упругие постоянные. При разгрузке имела место линейная зависимость, причем полная деформация в момент начала разгрузки разлагалась на упругую  $\varepsilon^e$  и остаточную (пластическую)  $\varepsilon^p$  части, то есть

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p, \quad \varepsilon^e = \sigma / E. \quad (1.2)$$

В 1843 году И. Ходкинсон выполнил эксперименты на растяжение железных стержней и получил те же зависимости (1.1), (1.2) [1]. При разгрузке он измерял только остаточные деформации и отметил, что даже при самых малых деформациях имеют место измеряемые остаточные деформации, учитываемые формулой (1.1) наряду с обратимыми упругими деформациями. Более того, Ходкинсон наблюдал при разгрузке упругое последствие в форме ограниченной ползучести. Баушингер исследовал большие остаточные деформации [1]. Он первым обнаружил, что относительное изменение объема при больших деформациях при растяжении нелинейно, но практически упруго. Его главным открытием является то, что он заметил снижение предела упругости при знакопеременном нагружении. Теперь это явление известно как эффект Баушингера. Баушингер также был первым, кто отметил, что так называемый "предел пропорциональности" заметно уменьшается с увеличением точности измерения остаточных деформаций. Это относится к таким понятиям, как пределы упругости и текучести. Все они на практике определяются по различным допускам на остаточную деформацию и поэтому могут быть названы просто *условными пределами текучести* либо *упругости* с указанием величины допуска на оста-

точную деформацию. В 1924 году Г. Генки был первым, кто рассмотрел разгрузку материалов при сложном напряженно-деформированном состоянии (НДС) в своей деформационной теории течения идеальных упругопластических сред [2]. Он представил полные деформации  $\varepsilon_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) тензора деформаций как сумму упругих  $\varepsilon_{ij}^e$  и пластических (остаточных)  $\varepsilon_{ij}^p$  частей

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p, \quad \Theta_{ij} = \Theta_{ij}^e + \Theta_{ij}^p, \quad (1.3)$$

где

$$\Theta_{ij} = \varepsilon_{ij} - \delta_{ij} \varepsilon_0, \quad \Theta = \sqrt{\Theta_{ij} \Theta_{ij}}, \quad \varepsilon_0 = \varepsilon_{ii} / 3 \quad (1.4)$$

– компоненты девиатора деформаций, его модуль и средняя деформация соответственно,  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера.

Появление остаточных деформаций при сложном НДС в идеальном упругопластическом материале Генки объяснил возможным саморазгрузением [2]. Для упругих деформаций в теории Генки используется закон Гука:

$$\varepsilon_0^e = \frac{\sigma_0}{3K}, \quad \Theta_{ij}^e = \frac{S_{ij}}{2G}, \quad K = \frac{E}{3(1-2\mu)}, \quad (1.5)$$

а для пластических деформаций – закон Генки:

$$\Theta_{ij}^p = \varepsilon_{ij}^p = \frac{\Phi(\sigma)}{2G} S_{ij}, \quad \varepsilon_0^p = 0, \quad (1.6)$$

где

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma_0, \quad \sigma = \sqrt{S_{ij} S_{ij}}, \quad \sigma_0 = \sigma_{ii} / 3 \quad (1.7)$$

– компоненты девиатора напряжений, его модуль и среднее напряжение соответственно;  $K$  – объемный модуль упругости Бриджмена,  $G$  – упругий модуль сдвига Кулона,  $E$  – продольный модуль Эйлера–Юнга,  $\mu$  – коэффициент Пуассона,  $\Phi(\sigma) = (2G\Theta - \sigma) / \sigma$  ( $\sigma = \sigma^T$ ) – функция Генки.

В качестве условия пластичности в теории Генки принят критерий полной пластичности Мизеса

$$\sigma = \sqrt{S_{ij} S_{ij}} = \sigma^T, \quad (1.8)$$

где  $\sigma^T = \sqrt{2/3} \sigma_T$ ,  $\sigma_T$  – предел текучести при растяжении. Условие пластичности Треска–Сен-Венана

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_i - \sigma_j}{2} = k \quad (i < j; i, j = 1, 2, 3),$$

где  $\sigma_i, \sigma_j$  – главные нормальные напряжения,  $k$  – предел текучести при плоском чистом сдвиге, Генки считал малопригодным для пластических расчетов, хотя и более обоснованным с физической точки зрения. Он предпочел использовать в своей теории критерий Мизеса (1.8).

М.Рош и А.Эйхингер в опытах со стальными трубчатыми образцами, подвергавшимися одновременному растяжению, кручению и внутреннему давлению, установили универсальный закон единой кривой упрочнения  $\sigma = \Phi(\Theta)$  при простом (пропорциональном) нагружении. В этих опытах для простого нагружения при слож-

ном напряженном состоянии они показали, что полные деформации могут быть представлены в виде суммы упругих и пластических частей [3].

А.А. Ильюшин принял закон единой кривой упрочнения в своей теории малых упругопластических деформаций при простом нагружении с начальным условием пластичности Мизеса [4]. Он записал закон упрочнения в виде

$$\sigma = \Phi(\varepsilon) = 2G_p \varepsilon, \quad (1.9)$$

где  $2G_p = 2G(1 - \omega)$  – секущий или пластический модуль сдвига,  $\omega$  – параметр пластичности.

Условие пластичности Мизеса  $\sigma = \sigma^T$  соответствует состоянию полной пластичности и не допускает, чтобы частица тела деформировалась в каком-либо направлении, то есть не допускает состояний неполной пластичности.

Ильюшин получил разложение для модуля девиатора деформации:

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p, \quad \varepsilon^e = \frac{\sigma}{2G}, \quad \varepsilon^p = \frac{\omega \sigma}{2G(1 - \omega)},$$

однако он считал, что в опытах следует измерять полные деформации.

Если начиная с некоторой точки  $K$  на диаграмме  $\sigma - \varepsilon$  модули напряжений и деформаций начинают убывать, то разгрузка следует прямой линии, параллельной упругому участку. Законы упругой разгрузки принимают вид:

$$\Delta S_{ij} = 2G \Delta \varepsilon_{ij}, \quad \Delta \sigma = 2G \Delta \varepsilon, \quad (1.10)$$

где  $\Delta \sigma = \sigma - \sigma_K$ ,  $\Delta \varepsilon = \varepsilon - \varepsilon_K$ .

Таким образом, в теориях пластичности при простом нагружении был принят закон упругой линейной разгрузки (1.10) как для упрочняющихся, так и для идеальных упругопластических сред. В теориях течения Прандтля–Рейсса–Хилла в силу гипотезы о возможности разложения полных деформаций на упругие и пластические части этот закон был принят автоматически.

## 2. Гипотеза о разгрузке при сложном напряженном состоянии и сложном разгрузении

В работе [5] А. Хаар и Т. Карман ввели для активных процессов нагружения и деформирования понятия о полных и неполных состояниях пластичности материалов. Основные уравнения неполного пластического состояния идеальной упругопластической среды при действии на частицу тела главных нормальных напряжений  $\sigma_m$  ( $m = 1, 2, 3$ ) имеют вид [6]:

$$\sigma_1 = \lambda \theta + G(\varepsilon_1 + \varepsilon_3) + k, \quad \sigma_2 = \lambda \theta + 2G\varepsilon_2, \quad \sigma_3 = \lambda \theta + G(\varepsilon_1 + \varepsilon_3) - k, \quad (2.1)$$

где  $\theta = 3\varepsilon_0$  – относительное изменение объема,  $\lambda$  – параметр Ламе,  $k$  – предел текучести материала при плоском чистом сдвиге.

Из (2.1) следует, что во втором направлении материал следует закону Гука, а в двух других испытывает пластическое деформирование. Для упрочняющейся среды картина не изменяется [6]. Из сказанного следует, что для упрочняющихся сред при сложном НДС трудно разграничить понятия нагружения и разгрузки материала. Особенно непросто это сделать в условиях сложного нагружения. Тем не менее в теориях течения, а до недавнего времени в общей теории пластичности и теории процессов, описывающих сложные процессы нагружения и деформирова-

ния [7], допускалось разложение полных деформаций  $\varepsilon_{ij}$  на упругие  $\varepsilon_{ij}^e$  и пластические  $\varepsilon_{ij}^p$  части, то есть принималось  $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p$ . Для установления общих законов связи напряжений и деформаций при сложных НДС и сложных нагружениях и разгрузках А.А. Ильюшиным в работе [7] сформулирована гипотеза о разгрузке в векторной форме. Вектор полной деформации  $\mathfrak{E}$  представлен там в виде суммы упругой  $\mathfrak{E}^e$  и пластической  $\mathfrak{E}^p$  частей:

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}^e + \mathfrak{E}^p. \quad (2.2)$$

Такое представление полного вектора деформаций  $\mathfrak{E}$  через вспомогательные векторы  $\mathfrak{E}^e$  и  $\mathfrak{E}^p$  подразумевает, что все возможные траектории деформирования, являющиеся продолжением заданной из некоторой точки  $K$ , можно разбить на два множества, разделенных между собой предельной поверхностью  $F(\mathfrak{E})$ , которая проходит через эту точку  $K$ . Любое продолжение траектории внутрь  $F(\mathfrak{E})$  представляет собой пассивную деформацию, то есть разгрузку, при которой изменяется только упругая составляющая  $\mathfrak{E}^e$  при постоянном значении  $\mathfrak{E}^p$ . Любое продолжение траекторий из точки  $K$ , при котором кроме  $\mathfrak{E}^e$  изменяется и пластическая часть деформации  $\mathfrak{E}^p$ , представляет собой активную деформацию. При этом считается, что при разгрузке  $\mathfrak{E}^e = 0$  при  $\sigma = 0$  [7].

А.А. Ильюшиным при формулировании гипотезы о разгрузке было отмечено, что упругие деформации при разгрузке должны определяться с учетом приобретенной в точке  $K$  траектории деформационной анизотропии [7]. Однако до настоящего времени систематических испытаний по различным криволинейным либо ломаным траекториям при сложном разгрузении материалов, помимо наших работ, по-видимому, не проводилось, и в большинстве теорий пластичности по-прежнему используется линейная гипотеза об упругой разгрузке, которая, строго говоря, пренебрегает тем, что полные деформации при сложном нагружении и разгрузении не могут быть разложены на упругие и пластические части. В связи с этим ниже излагается иная точка зрения автора на закономерности сложного разгрузения материалов.

### 3. Критерии активного и пассивного состояний процессов сложного нагружения и деформирования

Макроскопическое состояние сплошной среды в механике в любой момент времени однозначно определяется процессом [8]. Критерием состояния процесса деформирования материала является знак приращения энергии деформирования

$$dA = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} = \sigma_0 d\theta + S_{ij} d\mathfrak{E}_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (3.1)$$

где  $dA_0 = \sigma_0 d\theta$  – приращение энергии всестороннего растяжения-сжатия;  $\theta = \varepsilon_{ij} \delta_{ij}$  – относительное изменение объема;  $dA_\Phi = S_{ij} d\mathfrak{E}_{ij} = \sigma d\mathfrak{E} = \sigma ds \cos \vartheta_1$  – приращение энергии деформирования формоизменения;  $\sigma$  и  $\mathfrak{E}$  – векторы напряжений и деформаций,  $\sigma = |\sigma|$ ,  $ds = |d\mathfrak{E}|$ ;  $s$  – длина дуги траектории деформирования в текущей точке  $K$ ;  $\vartheta_1$  – угол сближения между направлениями вектора напряжений  $\sigma$  и касательной к траектории деформирования в ее текущей точке.

Критерием состояния процесса нагружения является знак приращения энергии напряжений (дополнительной работы)

$$dB = \theta d\sigma_0 + \mathfrak{E}_{ij} dS_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (3.2)$$

где  $dB_0 = \theta d\sigma_0$  – приращение дополнительной работы всестороннего растяжения-

сжатия,  $dB_\Phi = \mathfrak{E}_{ij} dS_{ij} = \mathfrak{E} d\sigma = \mathfrak{E} d\Sigma \cos \vartheta_1^*$  – приращение энергии напряжений (дополнительной работы) формоизменения;  $\mathfrak{E} = |\mathfrak{E}|$ ,  $d\Sigma = |d\sigma|$ ,  $\Sigma$  – длина дуги траектории нагружения,  $\vartheta_1^*$  – угол запаздывания между направлениями вектора деформации  $\mathfrak{E}$  и касательной к траектории нагружения в ее текущей точке.

Поскольку для большинства материалов энергия объемного расширения-сжатия обратима, критерием активного необратимого процесса деформирования можно считать условие  $dA_\Phi > 0$  ( $\vartheta_1 < \pi/2$ ), а пассивного –  $dA_\Phi < 0$  ( $\vartheta_1 > \pi/2$ ). Для активных процессов нагружения  $dB_\Phi > 0$  ( $\vartheta_1^* < \pi/2$ ), для пассивных –  $dB_\Phi < 0$  ( $\vartheta_1^* > \pi/2$ ).

В случае простых процессов нагружения (по лучевым траекториям) понятия активного и пассивного процессов деформирования и активного и пассивного процессов нагружения соответствуют друг другу и достаточно пользоваться одним из них, как это и делается, например, в деформационной теории пластичности [4]. При сложном деформировании либо нагружении эти понятия таким соответствием не обладают. Поэтому при сложном нагружении активность либо пассивность процессов в различных направлениях векторного пространства характеризуют приращения удельных энергий локальных процессов формоизменения  $dA_k = S_k d\mathfrak{E}_k$ ,  $dB_k = \mathfrak{E}_k dS_k$  ( $k = 1, 2, \dots, 5$ ).

В основе теории течения при сложном нагружении и деформационной теории пластичности при простом нагружении лежит согласующееся с концепцией существования предельных поверхностей предположение о возможности разложения полных деформаций на упругие и пластические части:

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}^e + \mathfrak{E}^p, \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p, \quad \mathfrak{E}_{ij} = \mathfrak{E}_{ij}^e + \mathfrak{E}_{ij}^p.$$

Критерием активных процессов являются условия

$$dA_\Phi^p = \sigma d\mathfrak{E}^p > 0, \quad dB_\Phi^p = \mathfrak{E}^p d\sigma > 0,$$

а критерием пассивных – условия  $dA_\Phi^p = 0$ ,  $dB_\Phi^p = 0$ .

Современная теория процессов не отвергает концепцию существования предельных поверхностей, но вкладывает в это понятие несколько иной смысл. Вне предельных поверхностей материал может находиться в состоянии полной либо неполной пластичности по Хаару и Карману, а внутри предельных поверхностей – в состояниях полной и неполной упругости. В работе [9] С.А. Христианович отметил, что невозможно объяснить в рамках механики сплошных сред предположение о том, что частица материала может находиться либо только в упругом состоянии, либо только в пластическом состоянии. Например, невозможно объяснить особенности пластического деформирования материалов в окрестности точек излома траекторий и наблюдаемые процессы "частичных разгрузок" на диаграммах прослеживания процессов. В работе [9] была предложена модель статически однородной упрочняющей среды, содержащей структурные элементы различной прочности и жесткости наподобие поликристаллических материалов, образованных множеством зерен-кристаллов. Такая модель объясняет состояния полной и неполной пластичности при активных процессах нагружения по Хаару и Карману. Эта точка зрения принята и нами для описания не только активных, но и пассивных процессов сложного разгрузки материалов с образованием на диаграммах деформирования и прослеживания процессов так называемых "нырков" напряжений и деформаций [10–12].

#### 4. Описание процессов сложного разгрузки материалов

В результате многочисленных систематических экспериментальных исследований [10–14] выяснено, что при сложной непропорциональной разгрузке сформулированная выше гипотеза [7] имеет частный характер и не может быть принята в качестве закона о разгрузке общей математической теории пластичности и теории процессов. После излома криволинейных либо прямолинейных траекторий на диаграммах прослеживания процессов  $\sigma - s$  и диаграммах деформирования  $\sigma - \mathcal{E}$  были обнаружены прямые и обратные "нырки" напряжений, а на диаграммах  $\mathcal{E} - \Sigma$  – "нырки" деформаций. Разгрузка на ниспадающих ветвях "нырков" напряжений имела практически линейный характер и получила название частичной разгрузки [9]. Минимальное напряжение на "нырке"  $\sigma_{\min}^T$  получило название *вторичного предела текучести* [11]. При достижении  $\sigma_{\min}^T$  происходит смена пассивного процесса деформирования (частичной разгрузки) на активный процесс неполного упругого деформирования (частичной пластической догрузки), реализуемый на восходящей ветви "нырка" напряжений. Что касается процесса сложного разгрузки, то как на нисходящей, так и на восходящей ветви "нырка" напряжений процесс является пассивным. Этому процессу на "нырке" деформаций  $\mathcal{E} - \Sigma$  соответствует только ниспадающая часть вплоть до значения  $\mathcal{E}_{\min}^T$ . Это минимальное значение модуля деформаций на "нырках" деформаций либо напряжений может быть названо *вторичным пределом пластического деформирования*. На восходящем участке обратного "нырка" напряжений в одном из направлений продолжается упругое разгрузку, а в других имеет место активный процесс пластического догружения и деформирования. Это состояние, в отличие от состояния Хаара и Кармана, было нами названо *неполным упругим*.

Описанный выше механизм сложного разгрузки проиллюстрирован результатами испытания стального трубчатого образца по двузвенной ломаной траектории с углом излома  $135^\circ$  (рис. 1).

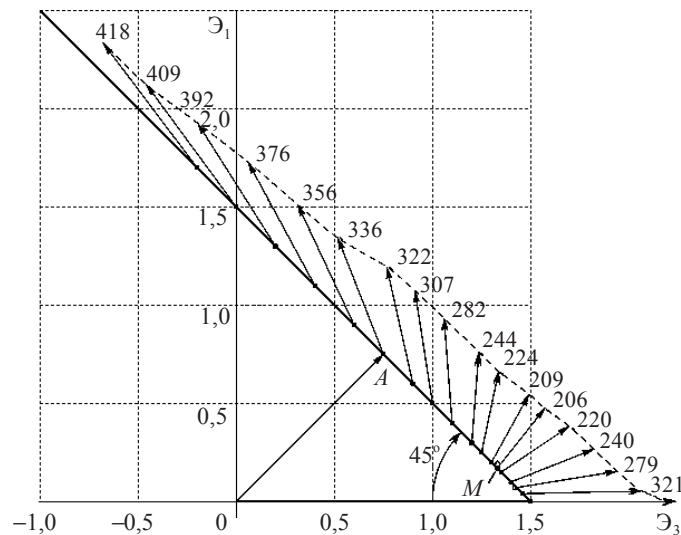


Рис. 1

На первом звене трубчатый образец из стали 45 скручивался до значения  $\mathcal{E}_3^0 = 1,5\%$ , а затем подвергался одновременному растяжению и кручению. До точки

$M$  на втором звене имели место одновременно пассивные процессы деформирования ( $dA_\Phi < 0$ ,  $\vartheta_1 > \pi/2$ ) и разгрузки ( $dB_\Phi < 0$ ,  $\vartheta_1^* > \pi/2$ ), то есть частичная упругая разгрузка. После точки  $M$  локальный процесс по кручению продолжал быть пассивным, то есть продолжалось упругое разгружение ( $dB_\Phi < 0$ ,  $\vartheta_1^* > \pi/2$ ), а локальный процесс по растяжению соответствовал активному процессу деформирования ( $dA_\Phi > 0$ ,  $\vartheta_1 < \pi/2$ ) вплоть до точки  $A$ . После точки  $A$ , соответствующей минимальному модулю деформации  $\Xi_{\min}^T$ , оба процесса – деформирования и нагружения – вновь становились активными. Следовательно, точка  $A$  соответствовала окончанию "нырков" сложного разгружения. На рис. 2 приведены экспериментальные диаграммы прослеживания процесса  $\sigma - s$  (кривая 1) и деформирования  $\sigma - \Xi$  (кривая 2). Пунктиром на рис. 2 показана универсальная кривая простого деформирования  $\sigma = \Phi(\Xi)$ , полученная в опыте при простом нагружении. Прямой и обратный "нырки" сложного разгружения описывают кривые  $KMA$ . Ниспадающие ветви  $KM$  отвечают упругой частичной разгрузке и пассивным процессам деформирования и разгрузки. Восходящие ветви  $MA$  соответствуют активным процессам деформирования, но пассивным процессам нагружения.

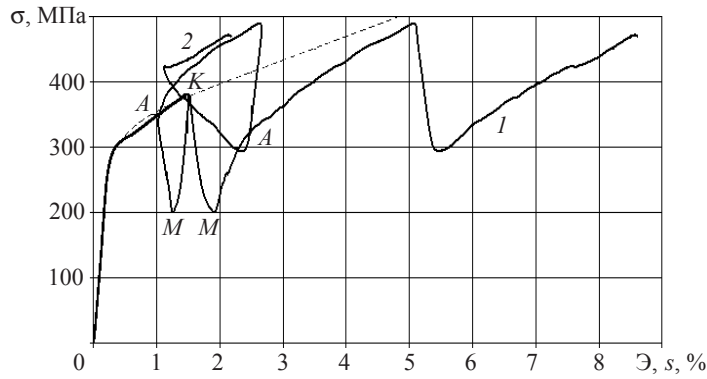


Рис. 2

## 5. Закон сложного разгружения материалов

Определяющее соотношение общей теории процессов, описывающее как активные, так и пассивные процессы деформирования и нагружения, с учетом постулата макроскопической определенности имеет вид [11, 12]:

$$\frac{d\sigma}{ds} = M_1 \hat{p}_1 + M \hat{\sigma} + M_3 \hat{p}_3, \quad (5.1)$$

где

$$\hat{\sigma} = \cos \vartheta_1 \hat{p}_1 + \sin \vartheta_1 (\cos \vartheta_2 \hat{p}_2 + \sin \vartheta_2 \hat{p}_3), \quad (5.2)$$

$$\begin{cases} M = \frac{d\sigma}{ds} - M_1 \cos \vartheta_1 - M_3 \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2, & \frac{d\sigma}{ds} = P \cos \vartheta_1, \\ M_1 = \frac{\sigma}{\sin \vartheta_1} \left[ \frac{M_3}{\sigma} \cos \vartheta_1 \sin \vartheta_2 - \left( \frac{d\vartheta_1}{ds} + \kappa_1 \cos \vartheta_2 \right) \right], \\ M_3 = \frac{\sigma}{\cos \vartheta_2} \left[ \sin \vartheta_1 \left( \frac{d\vartheta_2}{ds} + \kappa_2 \right) - \kappa_1 \cos \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \right], \end{cases} \quad (5.3)$$

где  $\hat{\sigma}$  – единичный вектор напряжений;  $M, P, M_1, M_3$  – функционалы процесса сложного упругопластического деформирования;  $\kappa_1, \kappa_2$  – параметры кривизны и кручения траектории деформирования;  $\hat{p}_k$  ( $k=1,2,3$ ) – ортонормированный базис Френе, построенный в текущей точке траектории деформирования с длиной дуги  $s$ ;  $\vartheta_1, \vartheta_2$  – углы сближения и депланации.

При сложном НДС согласно гипотезе о разгрузке [7] имеет место линейная упругая разгрузка. Простейшим предположением в этом случае является  $M=0, M_3=0$ , откуда  $M_1=P=2G$ . Тогда, без учета деформационной анизотропии, из (5.1) получаем определяющее соотношение

$$d\sigma = 2Gd\vartheta. \quad (5.4)$$

При сложном НДС и сложном разгрузении по любой ломаной или криволинейной траектории до достижения вторичного предела текучести  $\sigma_{\min}^T$  на "нырке" напряжений имеет место квазипростой упругий процесс разгрузки, называемый частичной разгрузкой. Для любого квазипростого процесса функционал  $M_3=0$  и соотношение (5.1) принимает вид

$$\frac{d\sigma}{ds} = \frac{d\Sigma}{ds} \hat{q}_1 = M_1 \hat{p}_1 + M \hat{\sigma}, \quad (5.5)$$

где  $\hat{q}_1$  – ортонормированный базис Френе в текущей точке траектории нагружения,

$$\hat{\sigma} = \cos \vartheta_1 \hat{p}_1 + \sin \vartheta_1 \hat{p}_2. \quad (5.6)$$

При активном квазипростом процессе [11]

$$M_1 = \frac{\sigma}{\vartheta}, \quad M_1 = \frac{d\sigma}{ds} - \frac{\sigma}{\vartheta} \cos \vartheta_1, \quad P = \frac{d\sigma}{ds} \frac{1}{\cos \vartheta_1} \quad (\vartheta_1 \neq 0).$$

При пассивном квазипростом процессе (частичной разгрузке)

$$M_1 = P = 2G, \quad M = 0. \quad (5.7)$$

При сложном квазипростом образе упругого частичного разгрузки из (5.1) либо (5.5) с учетом (5.7) получаем определяющее соотношение

$$d\sigma = 2Gd\vartheta. \quad (5.8)$$

Допуская, что квазипростой образ процесса нагружения сохраняется на всем протяжении "нырка"  $KMA$  сложного разгрузки, мы вправе использовать соотношение (5.5). Умножая (5.5) скалярно на  $\hat{q}_1$  и  $\hat{p}_1$ , получаем соотношения

$$\frac{d\Sigma}{ds} = M_1 \cos \gamma + M \cos \vartheta, \quad \frac{d\Sigma}{ds} = \cos \gamma = M_1 + M \cos \vartheta_1, \quad (5.9)$$

где

$$\cos \gamma = \hat{p}_1 \cdot \hat{q}_1, \quad \cos \vartheta = \hat{\sigma} \cdot \hat{q}_1, \quad \cos \vartheta_1 = \hat{\sigma} \cdot \hat{p}_1. \quad (5.10)$$

Решая систему уравнений (5.9), с учетом равенств (5.10) найдем

$$M_1 = \frac{d\Sigma \sin \vartheta}{ds \sin \vartheta_1}, \quad M = -\frac{d\Sigma \sin \gamma}{ds \sin \vartheta_1}, \quad P = M_1 = \frac{d\sigma}{ds} \frac{1}{\cos \vartheta_1} = \frac{d\Sigma \cos \vartheta}{ds \cos \vartheta_1}, \quad (5.11)$$

где учтено, что  $d\sigma = d\Sigma \cos \vartheta$ .



Если угол  $\gamma$  мал и стремится к нулю, то, согласно (5.10),  $\hat{p}_1 = \hat{q}_1$ ,  $\vartheta_1 = \vartheta$ , функционалы (5.11) принимают вид:

$$M_1 = P = \frac{d\Sigma}{ds} = \frac{d\sigma}{ds} \frac{1}{\cos \vartheta_1}, \quad M = 0, \quad (5.12)$$

и им соответствует закон сложной разгрузки материалов

$$d\sigma = Pd\varepsilon. \quad (5.13)$$

Для описанного выше опыта с нагружением по двузвенной ломаной траектории на рис. 3 построены характерные углы  $\vartheta_1^*$ ,  $\theta$ ,  $\vartheta$ ,  $\vartheta_1$ ,  $\gamma$  в зависимости от приращения длины дуги  $\Delta s$  после точки излома  $K$  на всем протяжении "нырка"  $KMA$  сложного разгрузки, помеченные соответственно цифрами 1–5.

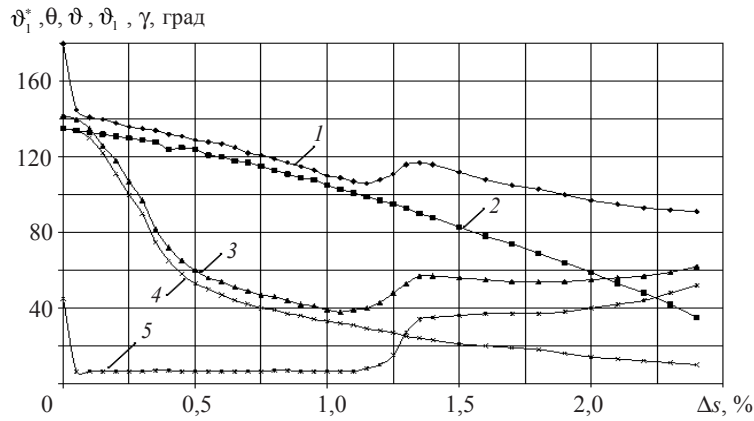


Рис. 3

Из рис. 3 видно, что интересующий нас характерный угол  $\gamma$  действительно мал и с удивительной точностью составляет значение порядка  $6,5^\circ$ , что укладывается в оценку точности ( $7-8^\circ$ ) теории пластичности простых процессов. Это дает основание считать, что выражение (5.13) достоверно описывает процесс сложного разгрузки и может быть принято в качестве закона разгрузки при сложном деформировании.

Для функционала  $\sigma$  рекомендуется использовать аппроксимацию

$$\sigma = \Phi(s) + Af_0 \Omega(\Delta s),$$

где  $A$  – постоянный параметр;  $\Phi(s)$  – универсальная функция прослеживания процесса для траекторий средней кривизны и кручения;  $f_0 = (1 - \cos \vartheta_1^0)/2$  – функция сложности процесса;  $\vartheta_1^0$  – угол сближения в точке излома траектории деформирования;  $\Omega(\Delta s) = -\eta \Delta s e^{-\eta \Delta s} + b(1 - e^{-\eta \Delta s})$  – функция, описывающая "нырок" напряжений;  $\Delta s = s - s_k$  – приращение длины  $s$  дуги траектории деформирования,  $s_k$  – длина дуги в точке излома;  $b$ ,  $\eta$  – постоянные параметры,

$$A\eta = \frac{d\Phi_0}{ds} + 2G,$$

$\Phi_0 = \Phi(s_k)$  – значение функции прослеживания процесса в точке излома.

В итоге для функционалов процесса после точки излома траектории деформирования получаем выражения:

$$\begin{cases} \frac{d\sigma}{ds} = P \cos \vartheta_1 = \frac{d\Phi(s)}{ds} - \left( 2G + \frac{d\Phi_0}{ds} \right) f_0 \left( 1 - \frac{\eta \Delta s}{1+b} \right) e^{-\eta \Delta s}, \\ M_1 = \frac{\Phi(s)}{s} + \left( 2G - \frac{\Phi_0}{s_0} \right) f_0 e^{-\eta \Delta s}, \Delta s = s - s_k. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma = \Phi(s) = \begin{cases} 2Gs(1 - \alpha s/2) & (0 \leq s \leq s^T), \\ \sigma^T & (s^T \leq s \leq s_*^T), \\ \sigma^T + 2G_* \Delta s + \sigma_* (1 - e^{-\beta \Delta s}) & (s_*^T \leq s), \end{cases} \\ \frac{d\Phi}{ds} = \begin{cases} 2G(1 - \alpha s) & (0 \leq s \leq s^T), \\ 0 & (s^T \leq s \leq s_*^T), \\ 2G_* + \beta \sigma_* e^{-\beta \Delta s} & (s_*^T \leq s), \end{cases} \end{cases}$$

где  $2G_*$ ,  $\sigma_*$ ,  $\beta$ ,  $\alpha$  – параметры, определяемые при аппроксимации диаграммы растяжения;  $s^T$ ,  $s_*^T$  – длины дуг, соответствующие началу и окончанию площадки текучести на универсальной диаграмме прослеживания процессов  $\sigma = \Phi(s)$  для траекторий деформирования средней кривизны и кручения.

## 6. Заключение

Представлен закон сложной разгрузки материалов в аналитическом виде и его экспериментальное обоснование на классе многозвенных ломаных траекторий.

**Ключевые слова:** эксперимент, сложная разгрузка, простые и сложные процессы деформирования.

### Литература

1. Белл, Д. Экспериментальные основы механики деформируемых твердых тел. Часть 1. Малые деформации / Д. Белл. – М.: Наука, 1984. – 596 с.
2. Генки, Г. К теории пластических деформаций и вызываемых ими в материале остаточных деформаций / Г. Генки // Теория пластичности: Сб. статей. – М.: ИЛ, 1948. – С. 114–135.
3. Рош, М. Опыты, связанные с выяснением вопроса об опасности разрушения / М. Рош, А. Эйхингер // Теория пластичности: Сб. статей. – М.: ИЛ, 1948. – С. 157–167.
4. Ильюшин, А.А. Пластичность / А.А. Ильюшин. – М.-Л.: ГИТТЛ, 1948. – 376 с.
5. Хаар, А. К теории напряженных состояний в пластических и сыпучих средах / А. Хаар, Т. Карман // Теория пластичности: Сб. статей. – М.: ИЛ, 1948. – С. 41–56.
6. Зубчанинов, В.Г. Математические модели полного и неполного пластического деформирования сплошных сред / В.Г. Зубчанинов // Современные проблемы пластичности и устойчивости в механике деформируемого твердого тела. – Тверь: ТГТУ, 2006. – С. 4–13.
7. Ильюшин, А.А. Об основах общей математической теории пластичности / А.А. Ильюшин // Труды. Т. 2. Пластичность (1946–1966). – М.: Физматлит, 2004. – С. 130–161.
8. Ильюшин, А.А. Механика сплошной среды / А.А. Ильюшин. – М.: МГУ, 1990. – 310 с.
9. Христианович, С.А. Деформация упрочняющегося пластического материала / С.А. Христианович // Изв. АН СССР. МТТ. – 1974. – №2. – С. 148–174.
10. Зубчанинов, В.Г. Устойчивость и пластичность. Т. 1. Устойчивость / В.Г. Зубчанинов. – М.: Физматлит, 2007. – 446 с.
11. Зубчанинов, В.Г. Устойчивость и пластичность. Т. 2. Пластичность / В.Г. Зубчанинов.

– М.: Физматлит, 2008. – 336 с.

12. *Зубчанинов, В.Г.* Математическая теория пластичности / В.Г. Зубчанинов. – Тверь: ТГТУ, 2002. – 300 с.

13. *Зубчанинов, В.Г.* Экспериментальная пластичность. Кн. 1. Процессы сложного деформирования / В.Г. Зубчанинов, Н.Л. Охлопков, В.В. Гаранников. – Тверь: ТГТУ, 2003. – 172 с.

14. *Зубчанинов, В.Г.* Экспериментальная пластичность. Кн. 2. Процессы сложного нагружения / В.Г. Зубчанинов, Н.Л. Охлопков, В.В. Гаранников. – Тверь: ТГТУ, 2004. – 184 с.

[26.06.2008]

## **A LAW OF COMPLEX MATERIAL UNLOADING IN THE THEORY OF PLASTICITY**

**V.G. Zubchaninov**

A law of complex material unloading and its experimental justification are presented. A brief historical information on investigating the objective laws of material unloading during simple and complex processes of deformation is given.

**Key words:** experiment, complex unloading, simple and complex processes of deformation.