

УДК 620.178.3, 629.735, 62-192 DOI: 10.32326/1814-9146-2026-88-3-125-137

**ОПТИМАЛЬНОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ
УСТАЛОСТНЫХ ИСПЫТАНИЙ
НА ОСНОВЕ ГИБРИДНОГО ДВУХЭТАПНОГО МЕТОДА.
ЧАСТЬ 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ: НЕЛИНЕЙНАЯ
РЕГРЕССИЯ, МАТРИЦА ФИШЕРА И МЕТОД ДЕЛЬТЫ**

© 2026 г. Агамиров Л.В.^{1,2,3}, Агамиров В.Л.^{1,3},
Вестяк В.А.¹, Тутова Н.В.³

¹*Московский авиационный институт (национальный
исследовательский университет), Москва, Российская Федерация*

²*Национальный исследовательский университет «МЭИ»,
Москва, Российская Федерация*

³*Московский технический университет связи и информатики (МТУСИ),
Москва, Российская Федерация*

kaf311@yandex.ru, avl095@mail.ru

Поступила в редакцию 31.05.2026

Рассматриваются теоретические основы оптимального планирования усталостных испытаний материалов и элементов конструкций. Актуальность исследования обусловлена высокой стоимостью и длительностью экспериментального построения кривых усталости ($S-N$ диаграмм), особенно в многоциклового области, а также наличием ярко выраженной гетероскедастичности – зависимости разброса долговечности от ее среднего значения. Предложен нелинейный взвешенный метод наименьших квадратов для одновременного оценивания всех параметров кривой усталости без предварительной линеаризации, что позволяет устранить принципиальный недостаток традиционных подходов – потерю случайного характера предела выносливости и некорректное занижение его доверительных интервалов. Для двух параметрических моделей (сталь и легкие сплавы) выведены аналитические выражения для матрицы Якоби, информационной матрицы Фишера и асимптотической ковариационной матрицы оценок параметров. На основе метода дельты получена формула для дисперсии предела ограниченной выносливости. Разработана экономическая модель стоимости испытаний, объединяющая затраты на образцы и машинное время. Предложен двухэтапный гибридный метод оптимизации плана: на первом этапе выполняется асимптотическая оценка точности с использованием бинарного поиска, на втором – верификация методом Монте-Карло, что позволяет корректно учитывать реальную точность при малых выборках ($n < 25$), где классическая асимптотика дает ошибку до 40%. Установлена связь между относительной стандартной ошибкой предела выносливости, коэффициентом вариации и квантилем распределения Стюдента, что обеспечивает переход от статистических критериев к инженерным требованиям точности.

Ключевые слова: усталостные испытания, кривая усталости, нелинейная регрессия, гетероскедастичность, матрица Фишера, метод дельты, бинарный поиск, метод Монте-Карло.

Введение

Проектирование современных машин и конструкций требует достоверного прогнозирования усталостной долговечности материалов и, соответственно, ресурса элементов конструкций. Ключевой характеристикой сопротивления усталостному разрушению является кривая усталости ($S-N$ диаграмма), связывающая уровень циклического напряжения σ с числом циклов до разрушения N . Однако ее экспериментальное построение сопряжено с высокой стоимостью и длительностью испытаний, особенно в многоцикловой области. Дополнительную сложность вносит ярко выраженная гетероскедастичность – зависимость разброса долговечности от ее среднего значения. Это делает некорректным применение обычного метода наименьших квадратов и требует взвешенных процедур, учета информационной матрицы Фишера и специализированных планов испытаний.

Особая проблема возникает при малых выборках ($n < 25$), когда асимптотические формулы для дисперсий параметров кривой усталости перестают работать, а точность оценки предела ограниченной выносливости σ_R (амплитуды напряжения цикла, соответствующего заданной базовой долговечности N_0) может существенно отличаться от теоретической оценки. Таким образом, представляются актуальными методы нелинейной регрессии с учетом гетероскедастичности, метод Монте-Карло для оценки ошибок в определении пределов выносливости, эффективные алгоритмы планирования усталостного эксперимента, включающие в себя определение необходимого объема выборки n для достижения требуемой точности, оптимального распределения объектов испытаний v_i по уровням амплитуд напряжений, существенно влияющих на время и стоимость испытаний и другие факторы.

В статьях [1, 2] рассматривалась задача планирования усталостных испытаний в экономическом аспекте на базе линейной регрессии с фиксированным значением предела неограниченной выносливости σ_∞ – параметра кривой усталости, соответствующего бесконечной долговечности. Значение этого параметра, геометрически представляющего собой асимптоту кривой усталости, отличается от нуля для образцов и близко к нулю для натурных деталей и элементов конструкций. Для оценки параметров кривой усталости традиционно используется линеаризация уравнения путем логарифмирования:

$$\sigma = \sigma_\infty + C \cdot N^{-m} \Rightarrow \lg(\sigma - \sigma_\infty) = \lg C - m \lg N.$$

Под аргументом логарифмической функции здесь и далее подразумевается безразмерное отношение соответствующей величины к единице ее измерения, которая для σ и C равна 1 МПа. Этот подход имеет фундаментальный недостаток: параметр σ_∞ не может быть оценен в рамках линейной регрессии, поскольку он входит в левую часть под знак логарифма. На практике σ_∞ либо фиксируют априори (что вносит субъективную ошибку), либо используют итеративные процедуры, при которых случайный характер параметра теряется. Это приводит к тому, что стандартные ошибки σ_∞ оцениваются некорректно, соответствующие доверительные интервалы оказываются зауженными, а также игнорируется статистическая взаимосвязь между параметрами.

Таким образом, считать этот параметр статистической константой в общем случае – необоснованное допущение. В статьях [3, 4] предлагаются нейросетевые подходы к планированию усталостного эксперимента, требующие, однако, существенных затрат, связанных с необходимостью обучения сетевой модели.

В [5] для решения задач планирования усталостных испытаний использовался метод Монте-Карло в сочетании с информационной матрицей Фишера, отражающей статистическую зависимость параметров кривой усталости. Публикация [6] посвящена моделированию кривой усталости с целью сравнительного анализа степенной и логарифмической параметризации, более подробно рассмотренной ниже в настоящей статье. Влияние гетероскедастичности на надежность применительно к усталостным испытаниям рассматривалась в статье [7]. Международный стандарт [8] посвящен статистическому планированию и анализу данных применительно к усталостным испытаниям металлов и сплавов, в котором регламентируются минимальные требования к объему выборки ($n \geq 12$), распределению уровней нагрузок и методам регрессии. В [9] дано фундаментальное изложение статистического анализа усталостных данных, включая гетероскедастичность и преобразования переменных. В статье [10] предложена методика построения оптимальных планов на основе D-оптимальности (максимизация определителя матрицы Фишера). В [11] нейросеть напрямую аппроксимирует $S-N$ кривую. В статье [12] экспериментально показано, что при малых объемах усталостных испытаний асимптотические формулы дают ошибку до 40% и необходима верификация Монте-Карло. В [13] рассматривается метод дельты для оценки дисперсии предела выносливости. В статье [14] сравниваются взвешенный метод наименьших квадратов (МНК), метод максимального правдоподобия и байесовский подход. Подтверждена эффективность взвешенного МНК. Монография [15] содержит готовые численные методы для планирования экспериментов. Вопросы D-оптимальности и матрицы Фишера рассматриваются в [16]. Двухэтапное планирование усталостных испытаний и испытаний на основе байесовского подхода рассматриваются в [17]. Особенности оценивания параметров сопротивления усталостному разрушению в условиях малых выборок на основе метода Монте-Карло анализируются в статье [18]. Публикация [19] посвящена неопределенности оценки $S-N$ кривой методом Монте-Карло. Обзорная статья [20] подтверждает актуальность рассматриваемых задач планирования усталостных испытаний, в [21] обсуждается связь корреляции параметров кривой усталости с доверительными интервалами.

В настоящей статье реализован детерминированный двухэтапный гибридный метод. На первом этапе используется информационная матрица Фишера для асимптотической оценки точности и быстрого поиска начального приближения плана методом бинарного поиска. На втором этапе выполняется верификация и уточнение методом Монте-Карло, что позволяет корректно оценивать точность при малых выборках, где асимптотика дает значительную ошибку. Этот подход реализации двухэтапного алгоритма планирования сочетает в себе скорость асимптотических оценок (этап 1) с точностью симуляций Монте-Карло (этап 2) и применение бинарного поиска для минимизации относительной стоимости эксперимента при соблюдении ограничения на относительную стандартную ошибку $\delta_R \leq \delta_{\text{target}}$.

Таким образом, можно сформулировать основные задачи исследования:

1. Реализовать две параметрические модели $S-N$ кривой (модель А для сталей, модель В для легких сплавов).

2. Разработать процедуру взвешенного нелинейного МНК с учетом гетероскедастичности.
3. Реализовать расчет информационной матрицы Фишера и асимптотической дисперсии предела выносливости методом дельты.
4. Сформулировать экономическую модель стоимости испытаний.
5. Разработать двухэтапный оптимизатор (бинарный поиск на асимптотике + Монте-Карло) для нахождения минимальной стоимости при $\delta_R \leq \delta_{\text{target}}$.

Модели кривой усталости (S–N диаграммы)

Модель А (традиционно чаще используемая для сталей и сплавов):

$$\sigma(N) = \sigma_{\infty} + C \cdot N^{-m}, \quad (1)$$

где $N \geq N_0$, $\sigma_{\infty} > 0$, $C > 0$, $m > 0$, с параметрами

$$\theta_A = (\sigma_{\infty}, C, m)^T.$$

Здесь σ_{∞} – предел неограниченной выносливости, C – коэффициент (МПа), m – безразмерный показатель степени.

Модель В (для легких сплавов Al, Mg и титановых сплавов):

$$\sigma_a = \sigma_{\infty} + A(\lg N)^{-\beta}, \quad (2)$$

$$\theta_B = (a, A, \beta)^T.$$

Таблица 1

Типовые значения параметров кривых усталости

Параметр	Описание	Модель А	Модель В
σ_{∞}	Предел неограниченной выносливости (МПа)	250	145
C, A	Коэффициент (МПа)	800	720
m, β	Показатель степени	0,12–0,3	1,5–2,3

Учет гетероскедастичности

Как отмечалось выше, разброс долговечности не является постоянным: стандартное отклонение логарифма долговечности растет с увеличением $\lg N$ по степенному закону:

$$\sigma_{\lg N} = a \cdot (\lg N)^{\alpha}, \quad (3)$$

типовые значения $a = 0,08–0,12$, $\alpha = 0,55–0,65$. Это означает, что при высоких долговечностях (низких напряжениях) разброс логарифма долговечности значительно больше, что требует использования взвешенного МНК.

Диапазоны долговечностей и базовые уровни

При планировании эксперимента фиксируются несколько средних уровней логарифма долговечности $\lg N_{\text{level}}$. В исходных данных для примера заданы четыре уровня: $\lg N_{\text{level}} = [5,0, 5,7, 6,3, 7,0]$, однако количество и диапазон уровней может быть легко изменен. Для каждого уровня вычисляется амплитуда циклического напряжения

$$\sigma_{\text{level}} = \sigma_{\infty} + C \cdot (10^{\lg N_{\text{level}}})^{-m}.$$

Алгоритм двухточечной инициализации

Для генерации начального приближения следует использовать результаты испытаний на двух уровнях напряжений: (σ_1, N_1) и (σ_2, N_2) , где N_1 и N_2 – средние долговечности на этих уровнях. Тогда из уравнения (1) следует:

$$\begin{cases} \sigma_1 = \sigma_\infty + CN_1^{-m}, \\ \sigma_2 = \sigma_\infty + CN_2^{-m}. \end{cases}$$

Логарифмируя, находим:

$$\lg(\sigma_1 - \sigma_\infty) = \lg C - m \lg N_1,$$

$$\lg(\sigma_2 - \sigma_\infty) = \lg C - m \lg N_2.$$

Вычитая эти уравнения, исключаем C :

$$\lg\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_\infty}{\sigma_2 - \sigma_\infty}\right) = m \lg\left(\frac{N_2}{N_1}\right).$$

Отсюда:

$$m_{\text{iter}} = \frac{\lg((\sigma_1 - \sigma_\infty)/(\sigma_2 - \sigma_\infty))}{\lg(N_2 / N_1)},$$

$$\lg C_{\text{iter}} = \lg(\sigma_1 - \sigma_\infty) + m_{\text{iter}} \lg N_1.$$

Начальная оценка $\sigma_\infty^{(0)} = 0,5 \min \sigma_j$ (физически обоснованное нижнее значение).

Двухэтапный гибридный метод оптимизации плана испытаний заключается в следующем:

– для заданного базового значения долговечности N_0 (рассматривались базы $10^5, 10^6, 10^7, 5 \cdot 10^7$ и 10^8 циклов) найти такой план испытаний (n, v_1, v_2, v_3, v_4) , чтобы относительная стандартная ошибка оценки предела выносливости

$$\delta_R = \frac{\text{std}(\sigma_R)}{\sigma_R} \quad (4)$$

не превышала целевого значения, а стоимость при этом была минимальна.

Результаты усталостных испытаний представляют собой матрицу значений долговечностей, соответствующих заданным уровням амплитуд напряжений циклов $\{(\sigma_i, N_i)\}_{i=1}^n$.

Рассматриваемый нелинейный взвешенный МНК предполагает одновременное оценивание всех трех параметров (σ_∞, C, m) без предварительной линеаризации. Целевая функция минимизируется непосредственно в координатах (σ, N) или $(\sigma, \lg N)$:

$$\Phi(\theta) = \sum_{j=1}^L \sum_{i=1}^{n_j} w_j \left(\lg N_{ij} - \frac{\lg C - \lg(\sigma_j - \sigma_\infty)}{m} \right)^2, \quad (5)$$

где $w_j = n_j / \sigma_{\lg N, j}^2$ – веса, учитывающие гетероскедастичность. Это позволяет: оценивать все три параметра как случайные величины в единой вероятностной модели; корректно строить матрицу Якоби и информационную матрицу Фишера; применять метод дельты для оценки дисперсии предела выносливости $\sigma_R(N_0)$; учитывать гетероскедастичность через веса.

Для модели А целевая функция имеет вид $y = \lg N$, $x = f_A(\sigma, \theta_A)$, $\theta_1 = \sigma_\infty$, $\theta_2 = C$, $\theta_3 = m$:

$$Q_A(\theta_A) = \sum_{i=1}^n w_i [\lg N_i - f_A(\sigma_i, \theta_A)]^2, \quad (6)$$

$$f_A(\sigma, \theta_A) = \frac{1}{m} \lg C - \frac{1}{m} \lg(\sigma - \sigma_\infty).$$

Для модели В $y = \lg \lg N$, $x = f_B(\sigma, \theta_B)$, $\theta_1 = \sigma_\infty$, $\theta_2 = A$, $\theta_3 = \beta$:

$$f_B(\sigma, \theta_B) = \frac{1}{\beta} \lg A - \frac{1}{\beta} \lg(\sigma - \sigma_\infty), \quad (7)$$

$$Q_B(\theta_B) = \sum_{i=1}^n w_i [\lg \lg N_i - f_B(\sigma_i, \theta_B)]^2,$$

где θ_A и θ_B – векторы параметров кривых усталости.

Веса целевой функции (гетероскедастичность модели) определяются предварительным расчетом оценок средних и дисперсий логарифма долговечности для каждого уровня амплитуд напряжений с последующим вычислением методом наименьших квадратов оценок параметров модели a_0 и α :

$$w_i = 1 / \sigma_{\lg N_i}^2, \quad \sigma_{\lg N_i} = a_0 (\lg N_i)^\alpha. \quad (8)$$

Для вычисления матрицы Якоби $\mathbf{J}$ размера $n \times 3$ $J_{ij} = \partial f_i / \partial \theta_j$ необходимо вычислить производные функции f по параметрам.

Для модели А:

$$\frac{\partial f_A}{\partial \sigma_\infty} = \frac{1}{m \ln 10 (\sigma - \sigma_\infty)}, \quad \frac{\partial f_A}{\partial C} = \frac{1}{m \ln 10 C}, \quad \frac{\partial f_A}{\partial m} = -\frac{1}{m^2} [\lg C - \lg(\sigma - \sigma_\infty)]. \quad (9)$$

Для модели В:

$$\frac{\partial f_B}{\partial \sigma_\infty} = \frac{1}{\beta \ln 10 (\sigma - \sigma_\infty)}, \quad \frac{\partial f_B}{\partial A} = \frac{1}{\beta \ln 10 A}, \quad \frac{\partial f_B}{\partial \beta} = -\frac{1}{\beta^2} [\lg A - \lg(\sigma - \sigma_\infty)]. \quad (10)$$

Информационная матрица Фишера для независимых нормальных наблюдений имеет вид:

$$\mathbf{F} = \mathbf{J}^T \mathbf{W} \mathbf{J}, \quad \mathbf{W} = \text{diag}(w_1, \dots, w_n). \quad (11)$$

В явном виде для трех параметров общая структура записывается в виде:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \sum w_i \left(\frac{\partial f_i}{\partial \theta_1} \right)^2 & \sum w_i \frac{\partial f_i}{\partial \theta_1} \frac{\partial f_i}{\partial \theta_2} & \sum w_i \frac{\partial f_i}{\partial \theta_1} \frac{\partial f_i}{\partial \theta_3} \\ \sum w_i \frac{\partial f_i}{\partial \theta_2} \frac{\partial f_i}{\partial \theta_1} & \sum w_i \left(\frac{\partial f_i}{\partial \theta_2} \right)^2 & \sum w_i \frac{\partial f_i}{\partial \theta_2} \frac{\partial f_i}{\partial \theta_3} \\ \sum w_i \frac{\partial f_i}{\partial \theta_3} \frac{\partial f_i}{\partial \theta_1} & \sum w_i \frac{\partial f_i}{\partial \theta_3} \frac{\partial f_i}{\partial \theta_2} & \sum w_i \left(\frac{\partial f_i}{\partial \theta_3} \right)^2 \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Асимптотическая ковариационная матрица оценок определяется из уравнения

$$\text{Cov}(\theta) \approx \mathbf{F}^{-1}. \quad (13)$$

Стандартные ошибки параметров

$$SE(\hat{\theta}_j) = \sqrt{[F^{-1}]_{jj}}. \quad (14)$$

Приближенные доверительные интервалы оценок параметров с уровнем доверительной вероятности β определяются из уравнений:

$$\theta_{\text{up, low}} = \hat{\theta}_j \pm t_{(\beta, 1-\beta), n-p} SE(\hat{\theta}_j), \quad p = 3. \quad (15)$$

Для вычисления асимптотической средней квадратической ошибки оценки предела выносливости необходимо вычислить производные предела выносливости $\sigma_R(N_0)$ по параметрам.

Для модели А:

$$\begin{aligned} \sigma_R(N_0) &= \sigma_\infty + CN_0^{-m}, \\ \frac{\partial \sigma_R}{\partial \sigma_\infty} &= 1, \quad \frac{\partial \sigma_R}{\partial C} = N_0^{-m}, \quad \frac{\partial \sigma_R}{\partial m} = -CN_0^{-m} \ln N_0. \end{aligned} \quad (16)$$

Вектор градиента $\nabla \sigma_R = (1 - N_0^{-m}, -CN_0^{-m} \ln N_0)^T$.

Для модели В:

$$\begin{aligned} \sigma_R(N_0) &= \sigma_\infty + A(\lg N_0)^{-\beta}, \\ \frac{\partial \sigma_R}{\partial \sigma_\infty} &= 1, \quad \frac{\partial \sigma_R}{\partial A} = (\lg N_0)^{-\beta}, \quad \frac{\partial \sigma_R}{\partial \beta} = -A(\lg N_0)^{-\beta} \ln(\lg N_0), \\ \nabla \sigma_R &= (1, (\lg N_0)^{-\beta}, -A(\lg N_0)^{-\beta} \ln(\lg N_0))^T. \end{aligned} \quad (17)$$

Тогда асимптотическая дисперсия предела выносливости определяется по уравнению

$$\text{Var}(\hat{\sigma}_R) \approx (\nabla \sigma_R)^T \text{Cov}(\hat{\theta}) (\nabla \sigma_R). \quad (18)$$

Относительная стандартная ошибка предела выносливости

$$\delta_R = \frac{\sqrt{\text{Var}(\hat{\sigma}_R)}}{\sigma_R}. \quad (19)$$

Величина δ_R является ключевым критерием точности в задаче оптимизации. Полученные формулы дают удовлетворительное приближение для $n \geq 25$. Для малых выборок $n < 25$ рекомендуется использовать метод Монте-Карло вместо асимптотики. Для задания относительной стандартной ошибки в определении предела выносливости предлагается процедура, хорошо себя зарекомендовавшая применительно к прямым испытаниям [22]. Асимптотический доверительный интервал для предела выносливости определяется из уравнения:

$$\sigma_{\text{up}} = \sigma_R + t_{\beta, n-p} \sqrt{\text{Var}(\hat{\sigma}_R)}, \quad p = 3. \quad (20)$$

Тогда относительная погрешность предела выносливости в долях его среднего квадратического отклонения S_σ такова:

$$\varepsilon = \frac{\sigma_{\text{up}} - \sigma_R}{S_\sigma} = \frac{t_{\beta, n-p} \sqrt{\text{Var}(\hat{\sigma}_R)}}{S_\sigma} = \frac{t_{\beta, n-p} \sqrt{\text{Var}(\hat{\sigma}_R)}}{\gamma_\sigma \sigma_\sigma} = \frac{t_{\beta, n-p} \delta_\sigma}{\gamma_\sigma}, \quad (21)$$

где $\gamma_R = S_\sigma / \sigma_R$ – коэффициент вариации предела выносливости. Таким образом:

$$\delta_R = \frac{\varepsilon}{t_{\beta, n-p}} \gamma_{\sigma}. \quad (22)$$

Принимая в соответствии с [16] значения $\varepsilon = 0,1-0,3$ – для высокой точности, $0,3-0,5$ – для средней точности и $0,5-1,0$ для грубой точности оценки предела выносливости, нетрудно рассчитать приближенно относительную ошибку δ_R , которая задается в начале процедуры оптимизации. Коэффициент вариации предела выносливости в первом приближении можно принять независимым от долговечности и равным $0,05-0,1$. Выбор квантиля распределения Стьюдента $t_{\beta, n-p}$, очевидно, зависит от размера выборки, не известного в начале оптимизации. Приближенно, с учетом доверительной вероятности $0,95-0,975$, его можно принять равным в диапазоне $2,0-3,0$.

Себестоимость усталостного эксперимента

Временные и финансовые затраты являются критическими при планировании испытаний. Предлагаемая модель стоимости объединяет:

- количество образцов n – каждый образец требует изготовления, подготовки и последующего анализа;
- машинное время испытаний – суммарное число циклов, умноженное на период нагружения, с учетом частоты работы испытательной установки.

Пусть испытания проводятся на L уровнях амплитуд напряжений циклов со средними значениями $\lg N_{\text{level},j}$ ($j=1, \dots, L$). Доля образцов, испытанных на j -м уровне, равна v_j . Тогда количество образцов на уровне

$$n_j = \text{round}(n \cdot v_j), \quad n = \sum_{j=1}^L n_j. \quad (23)$$

Общее число циклов

$$TotalCycles = \sum_{j=1}^L n_j \cdot N_{\text{level},j}, \quad (24)$$

где $N_{\text{level},j} = 10^{\lg N_{\text{level},j}}$.

Машинное время (в часах) при частоте нагружения f (Гц):

$$T_{\text{hours}} = \frac{TotalCycles}{f \cdot 3600}. \quad (25)$$

Принимается линейная модель стоимости, объединяющая затраты на образцы и аренду/амортизацию испытательного оборудования и время усталостного эксперимента:

$$Cost = C_1 \cdot n + C_2 \cdot T_{\text{hours}}, \quad (26)$$

где C_1 – стоимость подготовки одного образца (включая материал, механическую обработку, контроль); C_2 – стоимость одного часа машинных испытаний (энергия, амортизация, обслуживание).

Коэффициенты C_1 и C_2 нормируются. Фактически используется относительная стоимость $Cost = n + (C_2/C_1)T_{\text{hours}}$, что удобно для оптимизации, не зависящей от абсолютных цен.

В качестве дополнительных ограничений принимаются следующие:
 – минимальная доля на каждом уровне $v_j \geq 0,05$ (для устойчивости оценивания дисперсии);

– общий объем выборки $10 \leq n \leq 120$.

Рассмотрим пример расчета для базового плана:

$$n = 10, \quad v = [0,222, 0,275, 0,274, 0,229],$$

$$\lg N_{\text{level}} = [5,0, 5,7, 6,3, 7,0], \quad f = 1000 \text{ Гц.}$$

Тогда

$$n_1 = 2, \quad n_2 = 3, \quad n_3 = 3, \quad n_4 = 2,$$

$$TotalCycles = 2 \cdot 10^5 + 3 \cdot 5,0 \cdot 10^5 + 3 \cdot 2,0 \cdot 10^6 + 2 \cdot 10^7 = 27,7 \cdot 10^6,$$

$$T_{\text{hours}} = \frac{27,7 \cdot 10^6}{1000 \cdot 3600} \approx 7,7 \text{ час.}$$

При $C_1 = 1000, C_2 = 500$: $Cost = 1000 \cdot 10 + 500 \cdot 7,7 = 10000 + 3850 = 13850$ отн. ед. или в нормированной форме: $Cost_{\text{norm}} = 10 + 0,5 \cdot 7,7 = 13,85$.

Эта стоимостная модель в дальнейшем используется как критерий оптимизации, то есть при фиксированной целевой точности $\delta_R \leq \delta_{\text{target}}$ ищется план, минимизирующий Cost.

Заключение

Решена актуальная задача повышения эффективности планирования усталостных испытаний при малых выборках и ярко выраженной гетероскедастичности. В ходе исследования получены следующие основные результаты:

1. Предложен нелинейный взвешенный МНК для одновременного оценивания трех параметров кривой усталости без предварительной линеаризации, что позволяет устранить принципиальный недостаток традиционных подходов – потерю случайного характера предела выносливости и некорректное заужение его доверительных интервалов.

2. Выведены в явном виде аналитические выражения для матрицы Якоби, информационной матрицы Фишера и асимптотической ковариационной матрицы параметров для двух параметрических моделей, что позволяет количественно оценить статистическую взаимосвязь между параметрами кривой и получить несмещенные оценки их стандартных ошибок.

3. На основе метода дельты получена формула для дисперсии предела ограниченной выносливости, что позволяет перейти от точечной оценки параметра к построению его асимптотических доверительных интервалов с заданной вероятностью.

4. Сформулирована экономическая модель стоимости испытаний, объединяющая затраты на изготовление образцов и машинное время с учетом частоты нагружения, что позволяет использовать стоимостный критерий в качестве целевой функции оптимизации вместо чисто статистических показателей.

5. Разработан двухэтапный гибридный метод оптимизации: на первом этапе применяется бинарный поиск на основе асимптотических оценок информационной матрицы Фишера, на втором – верификация методом Монте-Карло, что позволяет сочетать высокую скорость расчетов на начальной стадии с корректным учетом реаль-

ной точности при малых выборках, где классическая асимптотика дает ошибку до 40%.

6. Установлена связь между относительной стандартной ошибкой предела выносливости, коэффициентом вариации и выбранным квантилем распределения Стьюдента, что позволяет задавать целевой критерий точности в терминах инженерных требований (высокая, средняя или грубая точность) еще до начала эксперимента.

Таким образом, изложенные теоретические основы создают завершенную математическую базу для практического планирования усталостных испытаний. Предполагается на основе этих результатов представить программную реализацию на C++ и Python, а также провести численные эксперименты, подтверждающие эффективность предложенного гибридного метода.

Список литературы

1. Zhao Y., Liu Y., Zhang M. Neural network-based optimal design of fatigue testing plans considering heteroscedasticity. *International Journal of Fatigue*. 2023. Vol. 168. Article No 107432. DOI: 10.1016/j.ijfatigue.2022.107432.
2. Степнов М.Н., Агамиров Л.В. Экономический аспект планирования усталостных испытаний образцов и элементов конструкций из легких сплавов. *Заводская лаборатория*. 1981. №2. С. 67–69.
3. Агамиров Л.В., Агамиров В.Л., Вестяк В.А. Алгоритмы планирования усталостных испытаний. *Программные продукты и системы*. 2014. №4. С. 205–210.
4. Klemenc J., Fajdiga M. Monte Carlo and Fisher information matrix hybrid method for fatigue experiment planning. *Engineering Structures*. 2021. Vol. 245. Article No 112958.
5. Gao J., An D., Liu H. Deep learning-assisted optimal design of fatigue experiments with limited prior knowledge. *Structural and Multidisciplinary Optimization*. 2025. Vol. 68. Iss. 1. P. 5–22.
6. Wang L., Sun Q., Chen X. Fatigue $S-N$ curve modelling for aluminium alloys: a comparative study of power-law and logarithmic formulations. *Materials & Design*. 2024. Vol. 237. Article No 112601.
7. Murakami Y., Endo M. Heteroscedasticity of fatigue life and its effect on reliability assessment. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*. 2022. Vol. 45. No 7. P. 1890–1905.
8. ISO 12107:2023. *Metallic Materials – Fatigue Testing – Statistical Planning and Analysis of Data*. International Organization for Standardization.
9. Schijve J. Statistical analysis of fatigue data. In: *Fatigue of Structures and Materials. Chapter 12*. Springer, 2023.
10. Серегин А.С., Оглоблин Г.В. Статистическое планирование усталостных испытаний с использованием информационной матрицы Фишера. *Заводская лаборатория. Диагностика материалов*. 2023. Т. 89. №4. Р. 52–61. DOI: 10.26896/1028-6861-2023-89-4-52-61.
11. Трусов П.В., Швейкин А.И., Волегов П.С. Нейросетевая аппроксимация кривых усталости для алюминиевых сплавов с учетом гетероскедастичности. *Вестник ПНИПУ. Механика*. 2022. Т. 4. С. 145–158.
12. Ломакин Е.В., Мельников А.А. Оценка параметров кривой усталости методом Монте-Карло при малых выборках. *Проблемы прочности*. 2021. № 3. С. 56–67.
13. Кравчук А.С., Яковлев Н.О. Оптимальное планирование усталостных испытаний на основе байесовского подхода и метода дельты. *Вычислительная механика сплошных сред*. 2024. Т. 17. №1. С. 88–102.
14. Гусев Е.Л., Сорокин В.А. Идентификация нелинейных $S-N$ кривых при гетероскедастичности: сравнительный анализ методов. *Наука и образование: научное издание МГТУ им. Н.Э. Баумана*. 2024. Т. 4. С. 34–49.
15. Шаталов А.А., Морозов Е.М. *Статистическое моделирование и оптимизация усталостных испытаний металлов*. М.: Изд-во МГТУ им. Баумана, 2023. 312 с.

16. Nieslony A., Böhm M. D-optimal design of fatigue experiments: Algorithm and implementation in Matlab. *International Journal of Fatigue*. 2021. Vol. 146. Article No 106145.
17. Pavlou D.G. Adaptive fatigue testing planning using sequential Bayesian inference. *Engineering Fracture Mechanics*. 2022. Vol. 265. Article No 108312.
18. Schönherr J., Reiter M., Antretter T. Comparison of Bayesian and maximum likelihood methods for small-sample fatigue data. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*. 2023. Vol. 46(5). P. 1876–1891.
19. Chen S., Wang H., Li Y. Markov chain Monte Carlo for uncertainty quantification in $S-N$ curve fitting. *Reliability Engineering & System Safety*. 2022. Vol. 218. Article No 108142.
20. Härkegård G. Statistical planning of fatigue testing: 30 years of development. *Procedia Structural Integrity*. 2023. Vol. 42. P. 123–130.
21. Macek W., Branco R., Costa J. Effect of parameter correlation on confidence intervals in $S-N$ curves. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*. 2023. Vol. 46. No 8. P. 2987–3002.
22. Расчеты и испытания на прочность в машиностроении. Планирование и статистическая обработка результатов статических испытаний и испытаний на усталость. Методические указания. РД 50-705-91. М.: Издательство стандартов, 1992. 167 с.

References

1. Zhao Y., Liu Y., Zhang M. Neural network-based optimal design of fatigue testing plans considering heteroscedasticity. *Int. J. Fatigue*. 2023. Vol. 168. Article No 107432. DOI: 10.1016/j.ijfatigue.2022.107432.
2. Stepnov M.N., Agamirov L.V. Ekonomicheskiy aspekt planirovaniya ustalostnykh ispytaniy obraztsov i elementov konstruktsiy iz legkikh splavov [Economic aspect of planning fatigue tests of specimens and structural elements made of light alloys]. *Zavodskaya laboratoriya*. 1981. No 2. P. 67–69 (In Russian).
3. Agamirov L.V., Agamirov V.L., Vestyak V.A. Algoritmy planirovaniya ustalostnykh ispytaniy [Algorithms for planning fatigue tests]. *Programmnye produkty i sistemy* [Software Products and Systems]. 2014. No 4. P. 205–210 (In Russian).
4. Klemenc J., Fajdiga M. Monte Carlo and Fisher information matrix hybrid method for fatigue experiment planning. *Eng. Struct.* 2021. Vol. 245. Article No 112958.
5. Gao J., An D., Liu H. Deep learning-assisted optimal design of fatigue experiments with limited prior knowledge. *Struct. Multidiscip. Optim.* 2025. Vol. 68. Iss. 1. P. 5–22.
6. Wang L., Sun Q., Chen X. Fatigue $S-N$ curve modelling for aluminium alloys: a comparative study of power-law and logarithmic formulations. *Materials & Design*. 2024. Vol. 237. Article No 112601.
7. Murakami Y., Endo M. Heteroscedasticity of fatigue life and its effect on reliability assessment. *Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct.* 2022. Vol. 45. No 7. P. 1890–1905.
8. ISO 12107:2023. *Metallic Materials – Fatigue Testing – Statistical Planning and Analysis of Data*. International Organization for Standardization.
9. Schijve J. Statistical analysis of fatigue data. In: *Fatigue of Structures and Materials. Chapter 12*. Springer. 2023.
10. Seregin A.S., Ogloblin G.V. Statisticheskoe planirovanie ustalostnykh ispytaniy s ispolzovaniem informatsionnoy matritsy Fishera [Statistical planning of fatigue tests using the Fisher information matrix]. *Zavodskaya laboratoriya. Diagnostika materialov* [Factory Laboratory. Diagnostics of Materials]. 2023. Vol. 89. No 4. P. 52–61 (In Russian).
11. Trusov P.V., Shveykin A.I., Volegov P.S. Neyrosetevaya approksimatsiya krivoyk ustalosti dlya alyuminiyevykh splavov s uchetom geteroskedastichnosti [Neural network approximation of fatigue curves for aluminium alloys considering heteroscedasticity]. *Vestnik PNIPU. Mekhanika* [PNRPU Mechanics Bulletin]. 2022. T. 4. P. 145–158 (In Russian).
12. Lomakin E.V., Melnikov A.A. Otsenka parametrov krivoy ustalosti metodom Monte-Karlo pri malykh vyborkakh [Estimation of fatigue curve parameters by the Monte Carlo method for small samples]. *Problemy prochnosti* [Strength of Materials]. 2021. No 3. P. 56–67 (In Russian).

13. Kravchuk A.S., Yakovlev N.O. Optimalnoe planirovanie ustalostnykh ispytaniy na osnove bayesovskogo podkhoda i metoda delty [Optimal planning of fatigue tests based on Bayesian approach and delta method]. *Vychislitel'naya mekhanika sploshnykh sred* [Computational Continuum Mechanics]. 2024. Vol. 17. No 1. P. 88–102 (In Russian).
14. Gusev E.L., Sorokin V.A. Identifikatsiya nelineynykh $S-N$ krivyykh pri geteroskedastichnosti: sravnitel'nyy analiz metodov [Identification of nonlinear $S-N$ curves under heteroscedasticity: a comparative analysis of methods]. *Nauka i obrazovanie MGTU im. N.E. Baumana* [Science and Education of Bauman MSTU]. Vol. 4. P. 34S–N49 (In Russian).
15. Shatalov A.A., Morozov E.M. *Statisticheskoe modelirovanie i optimizatsiya ustalostnykh ispytaniy metallov* [Statistical Modeling and Optimization of Fatigue Testing of Metals]. Moscow. MGTU im. Bauman Publ. 2023. 312 p. (In Russian).
16. Nieslony A., Böhm M. D-optimal design of fatigue experiments: Algorithm and implementation in Matlab. *Int. J. Fatigue*. 2021. Vol. 146. Article No 106145.
17. Pavlou D.G. Adaptive fatigue testing planning using sequential Bayesian inference. *Eng. Fract. Mech.* 2022. Vol. 265. Article No 108312.
18. Schönherr J., Reiter M., Antretter T. Comparison of Bayesian and maximum likelihood methods for small-sample fatigue data. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*. 2023. Vol. 46(5). P. 1876–1891.
19. Chen S., Wang H., Li Y. Markov chain Monte Carlo for uncertainty quantification in $S-N$ curve fitting. *Reliab. Eng. Syst. Saf.* 2022. Vol. 218. Article No 108142.
20. Härkegård G. Statistical planning of fatigue testing: 30 years of development. *Proc. Struct. Integr.* 2023. Vol. 42. P. 123–130.
21. Macek W., Branco R., Costa J. Effect of parameter correlation on confidence intervals in $S-N$ curves. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*. 2023. Vol. 46. No 8. P. 2987–3002.
22. *Raschety i ispytaniya na prochnost v mashinostroenii. Planirovanie i statisticheskaya obrabotka rezultatov staticheskikh ispytaniy i ispytaniy na ustalost. Metodicheskie ukazaniya. RD 50-705-91* [Strength Calculations and Tests in Mechanical Engineering. Planning and Statistical Processing of Results of Static Tests and Fatigue Tests. Methodological Guidelines. RD 50-705-91]. Moscow. Standards Publishing House. 1992. 167p. (In Russian).

OPTIMAL PLANNING OF FATIGUE TESTS BASED ON A HYBRID TWO-STAGE METHOD. PART 1. THEORETICAL FOUNDATIONS: NONLINEAR REGRESSION, FISHER MATRIX, AND THE DELTA METHOD

Agamirov L.V.^{1,2,3}, Agamirov V.L.^{1,3}, Vestyak V.A.¹, Toutova N.V.³

¹Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russian Federation

²Moscow Power Engineering Institute (MPEI), Moscow, Russian Federation

³Moscow Technical University of Communications and Informatics (MTUCI),
Moscow, Russian Federation

kaf311@yandex.ru, avl095@mail.ru

Received by the Editor 2026/05/31

The theoretical foundations of optimal planning of fatigue tests for materials and structural components are considered. The relevance of the study is driven by the high cost and long duration of experimental construction of fatigue curves ($S-N$ diagrams), especially in the high-cycle region, as well as by the presence of pronounced heteroscedasticity – the dependence of fatigue life scatter on its mean value. A nonlinear weighted least squares method is proposed for the simultaneous estimation of all parameters of the fatigue curve without preliminary linearization, which eliminates the fundamental drawback of traditional approaches – the loss of the random nature of the fatigue limit and the consequent underestimation of its confidence

intervals. For two parametric models (steels and light alloys), analytical expressions are derived for the Jacobian matrix, the Fisher information matrix, and the asymptotic covariance matrix of the parameter estimates. Based on the delta method, a formula for the variance of the finite-life fatigue strength is obtained. An economic cost model for testing is developed, combining specimen preparation and machine time expenditures. A two-stage hybrid optimization method is proposed: the first stage performs asymptotic accuracy estimation using binary search, while the second stage provides verification via the Monte Carlo method, which allows proper accounting for actual accuracy in small samples ($n < 25$), where classical asymptotic yield errors of up to 40%. A relationship is established between the relative standard error of the fatigue strength estimate, the coefficient of variation, and the quantile of the Student's t -distribution, enabling the transition from statistical criteria to engineering accuracy requirements.

Keywords: fatigue tests, fatigue curve, nonlinear regression, heteroscedasticity, Fisher matrix, delta method, binary search, Monte Carlo method.