

УДК 539.3

DOI: 10.32326/1814-9146-2026-88-3-79-96

**МОДЕЛИ ДЕФОРМИРОВАНИЯ СТЕРЖНЯ-ПОЛОСЫ,
СОЕДИНЕННОГО С ЖЕСТКИМ ОПОРНЫМ ЭЛЕМЕНТОМ
ЧЕРЕЗ УПРУГУЮ ПРОСЛОЙКУ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ.**

1. МОДЕЛЬ КИРХГОФА–ЛЯВА*

© 2026 г.

Паймушин В.Н.¹, Шишкин В.М.²

¹*Казанский национальный исследовательский технический университет
им. А.Н. Туполева, Казань, Российская Федерация*

²*Вятский государственный университет, Киров, Российская Федерация*

vpajmushin@mail.ru

Поступила в редакцию 19.05.2026

Построена трансформационная модель динамического деформирования стержня-полосы, состоящего по длине из односторонне закрепленного и двух незакрепленных (консольных) участков. Предполагается, что стержень на закрепленном участке соединен с абсолютно жестким и неподвижным опорным элементом через упругую прослойку конечной длины, у которой отсутствуют перемещения точек соединения с опорным элементом. Перемещения точек как закрепленного, так и незакрепленных участков стержня описываются классической моделью Кирхгофа – Лява, при использовании которой введение в рассмотрение на закрепленном участке упругой трансверсально-мягкой прослойки позволяет описать процесс прохождения изгибных колебаний от одного незакрепленного участка к другому. Сформулированы условия кинематического сопряжения закрепленного и незакрепленных участков стержня, при учете которых, исходя из вариационного принципа Даламбера – Лагранжа, получены для введенных в рассмотрение участков соответствующие уравнения движения и граничные условия, а также силовые условия сопряжения участков. На закрепленном участке проведено упрощение построенных уравнений путем перехода к известной модели винклеровского основания, с помощью которых найдено точное аналитическое решение задачи о вынужденных гармонических колебаниях стержня рассматриваемого класса. Проведены численные эксперименты по влиянию степени прохождения изгибных колебаний в ненагруженную консоль дюралюминиевого стержня-полосы в зависимости от величины нормального модуля прослойки, ее толщины и длины закрепленного участка при изменении одной из данных величин и фиксированных значениях двух других параметров. Показана возможность получения решения задачи о статическом изгибе стержня при действии постоянной силы на одном из концов на основе стационарного решения уравнений движения при весьма малой частоте циклического деформирования

*Выполнено за счет средств РНФ (проект № 23-19-00021-П).

Ключевые слова: стержень-полоса, модель Кирхгофа – Лява, опорный элемент, трансверсально-мягкая прослойка, незакрепленный и закрепленный участки, трансформационная модель деформирования, вынужденные колебания, аналитическое решение.

Введение

При постановке и решении задач механики деформирования тонкостенных элементов конструкций реальные условия их закрепления на опорных элементах обычно заменяют граничными условиями того или иного вида (например, шарнирного опирания или жесткого защемления (см., например, [1–3])), что, безусловно, вносит погрешности в решениях таких задач. Так, постановка даже статических задач механики деформирования элементов конструкции с рассмотрением лишь их отдельных участков и формулировкой в концевых сечениях кинематических граничных условий защемления может иметь недостаточную степень точности, если не учесть, что места крепления конструкции всегда имеют некоторую конечную длину, в пределах которой необходимо учитывать податливость закрепленных участков.

Расчет конструкции с учетом податливости отмеченных участков закрепления конечной длины представляет собой весьма сложную и трудоемкую задачу, что обусловило разработку упрощенных моделей (применительно к балкам и удлинненным пластинам), основанных на замене реальных их участков закрепления локальными упругими и вязкоупругими опорными связями, формулируемыми в точках, а также фрикционными зажимами. Исследования такого класса нашли достаточно полное отражение во многих работах (например, [4–7] и др.).

В ранее выполненных работах авторов [8–10] и др. было показано, что для описания статического и динамического процессов деформирования удлинненных элементов тонкостенных конструкций (в том числе и плоских стержней), имеющих участки закрепления конечной длины, требуется введение понятия трансформации параметров напряженно-деформированного состояния и применяемых для их описания математических моделей, имеющей место при переходе через границу от незакрепленного участка к закрепленному (от закрепленного к незакрепленному). В них рассматривался простейший тонкостенный элемент конструкции в виде стержня-полосы с участками закрепления, расположенными только на одной из лицевых поверхностей, что обычно имеет место при креплении элементов тонкостенных конструкций к опорным элементам или соединении их между собой внахлест (особенно выполненных из волокнистых композитных материалов). Для таких элементов в простейшем варианте учет податливости участков закрепления конечной длины может состоять в преобразовании известной сдвиговой модели С.П. Тимошенко в другую, названную трансформационной. В рамках классической модели Кирхгофа – Лява учет деформируемости закрепленного участка стержня-полосы невозможен [11], а при использовании простейшей уточненной сдвиговой модели С.П. Тимошенко ее трансформация возможна при закреплении участка только на одной из лицевых граней.

Если закрепление участка конечной длины является двухсторонним, то есть осуществляется по обеим лицевым поверхностям, то учет податливости закрепленного участка на основе отмеченной модели С.П. Тимошенко, как показано в статье [8], также невозможен. Для этого требуется привлечение моделей деформирования более высокого порядка точности. Применительно к незакрепленным участкам тонко-

стенных элементов конструкций разработке таких моделей к настоящему времени посвящена обширная научная литература (см., например, [12–21]), критический анализ которой проведен, в частности, в статьях [22, 23].

В настоящей статье рассматривается задача математического моделирования процессов динамического деформирования стержня-полосы с односторонним закреплением на жестком неподвижном опорном элементе конечной длины l (рис. 1). Цифрами на рисунке обозначены: 0 – участок закрепления, 1 – нагруженный участок стержня, 2 – ненагруженный участок стержня, 3 – прослойка, 4 – абсолютно жесткий опорный элемент. Ниже будет показано, что для построения трансформационной модели динамического деформирования такого стержня, состоящего по длине из закрепленного и двух незакрепленных (консольных) участков, на основе использования для стержня классической модели Кирхгофа – Лява, являющейся простейшей, на закрепленном участке требуется введение в рассмотрение между стержнем и абсолютно жестким и неподвижным опорным элементом упругой прослойки конечной толщины, у которой отсутствуют перемещения точек соединения с опорным элементом.

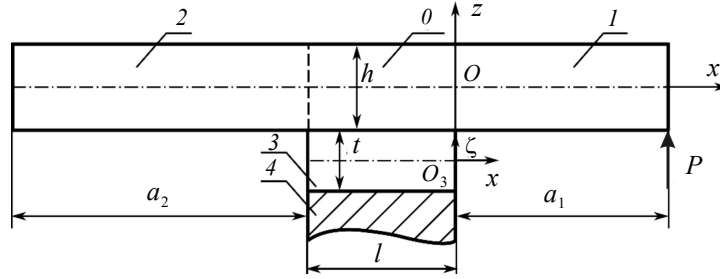


Рис. 1. Соединение стержня с опорным элементом через упругую прослойку

1. Основные соотношения для закрепленного участка стержня

Предположим, что стержень-полоса толщиной h , состоящий из незакрепленных участков 1 и 2, соединен с жестким опорным элементом 4 через тонкую упругую прослойку 3, имеющую малую в сравнении с h толщину t . Обозначим через $u^{(1)}$, $u^{(2)}$, $u^{(0)}$, $w^{(1)}$, $w^{(2)}$, $w^{(0)}$ осевые перемещения (в направлении оси Ox) и прогибы (в направлении оси Oz) точек осевой линии x стержня, аппроксимируя перемещения его произвольных точек $M(x, z)$ представлениями по классической модели Кирхгофа – Лява:

$$\begin{aligned} U^{(s)} = u^{(s)} - zw_{,x}^{(s)}, \quad W^{(s)} = w^{(s)}, \quad -h/2 \leq z \leq h/2; \quad 0 \leq x \leq a_1 \quad \text{при } s = 1; \\ -(l + a_2) \leq x \leq -l \quad \text{при } s = 2; \quad -l \leq x \leq 0 \quad \text{при } s = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Нижний индекс x после запятой здесь и далее означает дифференцирование обозначаемой с ним величины по соответствующей координате x .

Для перемещений $U^{(3)}(x, \zeta)$, $W^{(3)}(x, \zeta)$ прослойки примем аппроксимации

$$U^{(3)} = u^{(3)} + \zeta \gamma^{(3)}, \quad W^{(3)} = w^{(3)} + \zeta \varphi^{(3)}, \quad -l \leq x \leq 0, \quad -t/2 \leq \zeta \leq t/2, \quad (2)$$

которые подчиним условиям

$$U^{(3)}\left(x, \zeta = -\frac{t}{2}\right) = u^{(3)} - \frac{t}{2} \gamma^{(3)} = 0, \quad W^{(3)}\left(x, \zeta = -\frac{t}{2}\right) = w^{(3)} - \frac{t}{2} \varphi^{(3)} = 0,$$

$$\begin{aligned} U^{(3)}\left(x, \zeta = \frac{t}{2}\right) &= u^{(3)} + \frac{t}{2} \gamma^{(3)} = u^{(0)} + \frac{h}{2} w_{,x}^{(0)}, \\ W^{(3)}\left(x, \zeta = \frac{t}{2}\right) &= w^{(3)} + \frac{t}{2} \phi^{(3)} = w^{(0)}. \end{aligned} \quad (3)$$

Из (3) следуют зависимости

$$\begin{aligned} u^{(3)} &= \frac{u^{(0)}}{2} + \frac{h}{4} w_{,x}^{(0)}, \quad \gamma^{(3)} = \frac{2}{t} u^{(3)} = \frac{1}{t} \left(u^{(0)} + \frac{h}{2} w_{,x}^{(0)} \right), \\ w^{(3)} &= \frac{w^{(0)}}{2}, \quad \phi^{(3)} = \frac{2}{t} w^{(3)} = \frac{w^{(0)}}{t}, \end{aligned}$$

при использовании которых выражения (2) преобразуются к виду:

$$\begin{aligned} U^{(3)} &= \left(1 + \frac{2\zeta}{t}\right) u^{(3)} = \left(1 + \frac{2\zeta}{t}\right) \left(\frac{u^{(0)}}{2} + \frac{h}{4} w_{,x}^{(0)} \right), \\ W^{(3)} &= \left(1 + \frac{2\zeta}{t}\right) w^{(3)} = \left(1 + \frac{2\zeta}{t}\right) \frac{w^{(0)}}{2}. \end{aligned} \quad (4)$$

Принимая для прослойки модель трансверсально-мягкого материала, в соответствии с (4) в геометрически линейном приближении получим кинематические и физические соотношения:

$$\varepsilon_{\zeta}^{(3)} = \frac{\partial W^{(3)}}{\partial \zeta} = \frac{w^{(0)}}{t}, \quad \gamma_{x\zeta}^{(3)} = \frac{\partial U^{(3)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial W^{(3)}}{\partial x} = \frac{u^{(0)}}{t} + \left(\frac{h}{2t} + \frac{1}{2} + \frac{\zeta}{t} \right) w_{,x}^{(0)}, \quad (5)$$

$$\sigma_{\zeta}^{(3)} = E_3^0 \varepsilon_{\zeta}^{(3)} = \frac{E_3^0}{t} w^{(0)}, \quad \sigma_{x\zeta}^{(3)} = G_{13}^0 \gamma_{x\zeta}^{(3)} = G_{13}^0 \left[\frac{u^{(0)}}{t} + \left(\frac{h}{2t} + \frac{1}{2} + \frac{\zeta}{t} \right) w_{,x}^{(0)} \right]. \quad (6)$$

Следовательно, вариация потенциальной энергии деформации единицы ширины рассматриваемого слоя будет такова:

$$\delta \Pi^{(3)} = \int_{-l}^0 \int_{-t/2}^{t/2} (\sigma_{\zeta}^{(3)} \delta \varepsilon_{\zeta}^{(3)} + \sigma_{x\zeta}^{(3)} \delta \gamma_{x\zeta}^{(3)}) d\zeta dx = \int_{-l}^0 (T_{\zeta}^{(3)} \delta w^{(0)} + T_{x\zeta}^{(3)} \delta u^{(0)} + Q_{x\zeta}^{(3)} \delta w_{,x}^{(0)}) dx, \quad (7)$$

где приняты обозначения для усилий в прослойке

$$\begin{aligned} T_{\zeta}^{(3)} &= \frac{E_3^0}{t} w^{(0)}, \quad T_{x\zeta}^{(3)} = G_{13}^0 \left[\frac{u^{(0)}}{t} + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{h}{t} \right) w_{,x}^{(0)} \right], \\ Q_{x\zeta}^{(3)} &= G_{13}^0 \left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{h}{t} \right) u^{(0)} + H w_{,x}^{(0)} \right], \quad H = \frac{t}{12} \left[1 + 3 \left(1 + \frac{h}{t} \right)^2 \right], \end{aligned} \quad (8)$$

а через E_3^0, G_{13}^0 обозначены ее упругие характеристики.

Используя (1), кинематическое и физическое соотношения

$$\varepsilon_x^{(0)} = u_{,x}^{(0)} - z w_{,xx}^{(0)}, \quad \sigma_x^{(0)} = E_1 (u_{,x}^{(0)} - z w_{,xx}^{(0)}) \quad (9)$$

и составленное выражение (7), для участка закрепления $-l \leq x \leq 0$ запишем вариацию функционала принципа Даламбера – Лагранжа в приближении

$$\begin{aligned}
\delta\Pi^{(0)} + \delta\Pi^{(3)} - \delta K^{(0)} &= \int_{-l}^0 \left(T_x^{(0)} \delta u_{,x}^{(0)} + M_x^{(0)} \delta w_{,xx}^{(0)} + T_{x\zeta}^{(3)} \delta u^{(0)} + \right. \\
&\quad \left. + T_{\zeta}^{(3)} \delta w^{(0)} + Q_{x\zeta}^{(3)} \delta w_{,x}^{(0)} + \rho h \dot{w}^{(0)} \delta w^{(0)} \right) dx = \\
&= \left(T_x^{(0)} \delta u^{(0)} + M_x^{(0)} \delta w_{,x}^{(0)} - Q_{xz}^{(0)} \delta w^{(0)} \right) \Big|_{x=-l}^{x=0} - \int_{-l}^0 \left(L_u^{(0)} \delta u^{(0)} - L_w^{(0)} \delta w^{(0)} \right) dx, \quad (10)
\end{aligned}$$

где

$$T_x^{(0)} = B u_{,x}^{(0)}, \quad M_x^{(0)} = D w_{,xx}^{(0)}, \quad Q_{xz}^{(0)} = M_{x,x}^{(0)} - Q_{x\zeta}^{(3)}, \quad (11)$$

$$L_u^{(0)} = T_{x,x}^{(0)} - T_{x\zeta}^{(3)} - \rho h \ddot{u}^{(0)}, \quad L_w^{(0)} = Q_{xz,x}^{(0)} + T_{\zeta}^{(3)} + \rho h \dot{w}^{(0)}, \quad (12)$$

$$B = E_1 h, \quad D = B h^2 / 12,$$

ρ – плотность материала стержня.

С учетом (8) и (11) дифференциальные выражения (12) принимают вид

$$\begin{aligned}
L_u^{(0)} &= B u_{,xx}^{(0)} - G_{13}^{(0)} \left[\frac{u^{(0)}}{t} + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{h}{t} \right) w_{,x}^{(0)} \right] - \rho h \ddot{u}^{(0)}, \\
L_w^{(0)} &= D w_{,xxxx}^{(0)} - G_{13}^{(0)} \left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{h}{t} \right) u_{,x}^{(0)} + H w_{,xx}^{(0)} \right] + \frac{E_3^0}{t} w^{(0)} + \rho h \dot{w}^{(0)}. \quad (13)
\end{aligned}$$

Заметим, что в приближении $w^{(0)} = 0$ первому выражению в (13) соответствует уравнение движения

$$u_{,xx}^{(0)} - \frac{G_{13}^0}{E_1 t h} u^{(0)} - \frac{\rho}{E_1} \ddot{u}^{(0)} = 0, \quad (14)$$

которое принципиально отличается от аналогичного уравнения

$$u_{,xx}^{(0)} - \frac{3G_{13}^0}{E_1 h^2} u^{(0)} - \frac{\rho}{E_1} \ddot{u}^{(0)} = 0,$$

полученного в [10] на основе простейшей сдвиговой модели Тимошенко для стержня толщиной h и модулем поперечного сдвига G_{13}^0 при отсутствии прослойки толщиной t .

Предположим, что стержень состоит только из закрепленного участка. Тогда при нулевой изменчивости функции $u^{(0)}(x, \tau)$ (τ – время) на участке закрепления $-l \leq x \leq 0$, когда в стационарном решении $u_0^{(0)} = \tilde{u}_0^{(0)} \exp(i\omega\tau)$, $\tilde{u}_0^{(0)} = \text{const}$ из уравнения (14) для определения круговой частоты колебаний ω_0 следует формула $\omega_0^2 = G_{13}^0 / (\rho t h)$. Она указывает на то, что при представлении решения уравнения (14) в виде $u_0^{(0)} = \tilde{u}_n^{(0)} \exp(i\omega_n \tau)$ частота ω_0 является низшей из всех частот, определяемых по формуле

$$\omega_n^2 = \frac{E_1}{\rho} \lambda_n^2 + \frac{G_{13}^0}{\rho t h}, \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{l}, \quad n = 1, 2, \dots$$

2. Уравнения движения участков стержня и условия сопряжения их решений

В соответствии с (1) для незакрепленных участков 1 и 2 имеют место выражения:

$$\delta\Pi^{(1)} = \int_0^{a_1} (T_x^{(1)} \delta u_{,x}^{(1)} + M_x^{(1)} \delta w_{,xx}^{(1)}) dx, \quad \delta\Pi^{(2)} = \int_{-a_2-l}^0 (T_x^{(2)} \delta u_{,x}^{(2)} + M_x^{(2)} \delta w_{,xx}^{(2)}) dx,$$

$$\delta K^{(1)} = - \int_0^{a_1} \rho h \ddot{w}^{(1)} \delta w^{(1)} dx, \quad \delta K^{(2)} = - \int_{-a_2-l}^0 \rho h \ddot{w}^{(2)} \delta w^{(2)} dx, \quad \delta A^{(1)} = P \delta w^{(1)} \Big|_{x=a_1}.$$

Следовательно, уравнение вариационного принципа Даламбера – Лагранжа для всего стержня при использовании (10) запишется в виде

$$\begin{aligned} \sum_{s=0}^2 (\delta \Pi^{(s)} - \delta K^{(s)}) - \delta A^{(1)} &= (T_x^{(0)} \delta u^{(0)} + M_x^{(0)} \delta w_{,x}^{(0)} - Q_{xz}^{(0)} \delta w^{(0)}) \Big|_{x=-l}^{x=0} - \\ &- \int_{-l}^0 (L_u^{(0)} \delta u^{(0)} - L_w^{(0)} \delta w^{(0)}) dx + (T_x^{(1)} \delta u^{(1)} + M_x^{(1)} \delta w_{,x}^{(1)} - Q_{xz}^{(1)} \delta w^{(1)}) \Big|_{x=0}^{x=a_1} - \\ &- P \delta w^{(1)} \Big|_{x=a_1} - \int_0^{a_1} (L_u^{(1)} \delta u^{(1)} - L_w^{(1)} \delta w^{(1)}) dx + \\ &+ (T_x^{(2)} \delta u^{(2)} + M_x^{(2)} \delta w_{,x}^{(2)} - Q_{xz}^{(2)} \delta w^{(2)}) \Big|_{x=-a_2-l}^{x=-l} - \int_{-a_2-l}^{-l} (L_u^{(2)} \delta u^{(2)} - L_w^{(2)} \delta w^{(2)}) dx = 0, \end{aligned} \quad (15)$$

где, в отличие от (11), $Q_{xz}^{(s)} = M_{x,x}^{(s)} = D w_{,xxx}^{(s)}$, $s = 1, 2$.

Из (15) следуют уравнения движения закрепленного участка $-l \leq x \leq 0$

$$L_u^{(0)} = 0, \quad L_w^{(0)} = 0, \quad (16)$$

уравнения движения незакрепленного участка $0 \leq x \leq a_1$

$$L_u^{(1)} = B u_{,xx}^{(1)} - \rho h \ddot{u}^{(1)} = 0, \quad D w_{,xxx}^{(1)} + \rho h \ddot{w}^{(1)} = 0 \quad (17)$$

и формулируемые для них граничные условия в сечении $x = a_1$

$$u_{,x}^{(1)} = 0, \quad w_{,xx}^{(1)} = 0, \quad D w_{,xxx}^{(1)} = -P, \quad (18)$$

уравнения движения незакрепленного участка $-(l + a_2) \leq x \leq -l$

$$L_u^{(2)} = B u_{,xx}^{(2)} - \rho h \ddot{u}^{(2)} = 0, \quad D w_{,xxx}^{(2)} + \rho h \ddot{w}^{(2)} = 0 \quad (19)$$

и формулируемые для них граничные условия в сечении $x = -l - a_2$

$$u_{,x}^{(2)} = 0, \quad w_{,xx}^{(2)} = 0, \quad w_{,xxx}^{(2)} = 0, \quad (20)$$

а также кинематические и силовые условия сопряжения участков

$$\begin{aligned} u^{(0)} &= u^{(s)}, \quad w^{(0)} = w^{(s)}, \quad w_{,x}^{(0)} = w_{,x}^{(s)}, \quad u_{,x}^{(0)} = u_{,x}^{(s)}, \\ w_{,xx}^{(0)} &= w_{,xx}^{(s)}, \quad D w_{,xxx}^{(0)} - G_{13}^0 \left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{h}{t} \right) u^{(0)} + H w_{,x}^{(0)} \right] = D w_{,xxx}^{(s)}, \quad s = 1, 2, \end{aligned} \quad (21)$$

формулируемые для уравнений (16), (17), (19) в сечениях $x = 0$, $x = -l$. Суммарный порядок этих уравнений равен 18, что соответствует суммарному числу граничных условий (18), (20) и (21).

3. Упрощение уравнений движения закрепленного участка и построение их аналитических решений

Уравнения движения (16) при учете (13) запишем в виде

$$u_{,xx}^{(0)} - r_1 u^{(0)} - r_2 w_{,x}^{(0)} = 0,$$

$$w_{,xxxx}^{(0)} - \frac{G_{13}^0 H}{D} w_{,xx}^{(0)} + r_3 w^{(0)} - \frac{G_{13}^0}{2D} \left(1 + \frac{h}{t}\right) u_{,x}^{(0)} = 0, \quad (22)$$

где введены обозначения

$$r_1 = \frac{G_{13}^0}{Bt} + \frac{\rho}{E_1} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}, \quad r_2 = \frac{G_{13}^0}{2B} \left(1 + \frac{h}{t}\right), \quad r_3 = \frac{E_3^0}{Dt} + \frac{\rho h}{D} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}. \quad (23)$$

Введем в рассмотрение разрешающую функцию $\Phi^{(0)}$ в соответствии с представлениями

$$u^{(0)} = \Phi_{,x}^{(0)}, \quad w^{(0)} = -\frac{1}{r_2} (r_1 \Phi^{(0)} - \Phi_{,xx}^{(0)}). \quad (24)$$

При подстановке (24) первое уравнение системы (22) удовлетворяется тождественно, а второе запишется в виде

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^6 \Phi^{(0)}}{\partial x^6} - \left(r_1 + \frac{G_{13}^0 H}{D} \right) \frac{\partial^4 \Phi^{(0)}}{\partial x^4} + \\ & + \left[\frac{G_{13}^0 H}{D} r_1 + r_3 - \frac{G_{13}^0 r_2}{2D} \left(1 + \frac{h}{t}\right) \right] \frac{\partial^2 \Phi^{(0)}}{\partial x^2} - r_1 r_3 \Phi^{(0)} = 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Уравнение (25) имеет шестой порядок по оси x и четвертый порядок по времени τ , если в него внести выражения (23). Без существенной потери точности и содержательности это уравнение может быть упрощено, если в (11) для $Q_{xz}^{(0)}$ принять приближенное равенство

$$Q_{xz}^{(0)} = M_{x,x}^{(0)} - Q_{x\zeta}^{(0)} \approx M_{x,x}^{(0)} = D w_{,xxx}^{(0)}, \quad (26)$$

что эквивалентно отбрасыванию во втором уравнении (22) подчеркнутых слагаемых.

В результате вместо (22) приходим к уравнениям

$$u_{,xx}^{(0)} - r_1 u^{(0)} - r_2 w_{,x}^{(0)} = 0, \quad (27)$$

$$w_{,xxxx}^{(0)} + \frac{E_3^0}{Dt} w^{(0)} + \frac{12\rho}{E_1 h^2} \ddot{w}^{(0)} = 0, \quad (28)$$

из которых второе уравнение соответствует введению в рассмотрение винклеровского основания. Введение упрощения (26), в свою очередь, требует отбрасывания в (21) подчеркнутого слагаемого, что приводит к необходимости нахождения решений вначале только уравнения (28) относительно одной функции $w^{(0)}$, а затем решений уравнения (27) при уже найденном в нем последнем слагаемом.

4. Действие на двухконсольный стержень нагрузок

$$P = P_0 = \text{const и } P = P_0 \exp(i\omega\tau)$$

4.1. Статическое напряженно-деформированное состояние. При действии силы $P_0 = \text{const}$ равновесное состояние участков стержня будут описываться уравнениями равновесия ($L_2 = a_2 + l$)

$$D_{,xxxx}^{(s)} = 0, \quad 0 \leq x \leq a_1 \text{ при } s = 1; \quad -L_2 \leq x \leq -l \text{ при } s = 2; \quad (29)$$

$$w_{,xxxx}^{(0)} + k_0^4 w^{(0)} = 0, \quad -l \leq x \leq 0, \quad (30)$$

где $k_0^4 = E_3^0 / (Dt)$. Путем интегрирования уравнений (29) и удовлетворения граничным условиям

$$w_{,xxx}^{(1)} \Big|_{x=a_1} = -P_0/D, \quad w_{,xx}^{(1)} \Big|_{x=a_1} = 0, \quad w_{,xxx}^{(2)} \Big|_{x=-L_2} = 0, \quad w_{,xx}^{(2)} \Big|_{x=-L_2} = 0$$

находим

$$\begin{aligned} w_{,xx}^{(1)} &= -\frac{P_0}{D}(x-a_1), \quad w_{,x}^{(1)} = -\frac{P_0}{D}\left(\frac{x^2}{2} - a_1x\right) + c_1, \\ w^{(1)} &= -\frac{P_0}{D}\left(\frac{x^3}{6} - a_1\frac{x^2}{2}\right) + c_1x + c_2, \quad c_1 = w_{,x}^{(1)} \Big|_{x=0}, \quad c_2 = w^{(1)} \Big|_{x=0}, \\ w_{,xx}^{(2)} &= 0, \quad w_{,x}^{(2)} = c_3 = w_{,x}^{(2)} \Big|_{x=-l}, \quad w^{(2)} = c_3x + c_4, \quad w^{(2)} \Big|_{x=-l} = c_4 - c_3l, \end{aligned} \quad (31)$$

где c_1, c_2, c_3, c_4 – постоянные интегрирования.

Уравнение (30) имеет характеристическое уравнение $\lambda^4 + k_0^4 = 0$ с корнями $\lambda_{1,2,3,4} = (-1)^{1/4} k_0 = \pm \alpha \pm \alpha i$, где $\alpha = k_0 / \sqrt{2}$. Следовательно, общее решение уравнения (30) имеет вид

$$\begin{aligned} w^{(0)} &= c_5 \exp(\alpha x) \cos(\alpha x) + c_6 \exp(\alpha x) \sin(\alpha x) + \\ &+ c_7 \exp(-\alpha x) \cos(\alpha x) + c_8 \exp(-\alpha x) \sin(\alpha x), \end{aligned} \quad (32)$$

где c_5, c_6, c_7, c_8 – еще четыре постоянные интегрирования, подлежащие определению (вместе с постоянными c_1, c_2, c_3, c_4) путем подчинения (31) и (32) условиям сопряжения участков:

$$\begin{aligned} c_2 &= w^{(1)} \Big|_{x=0} = w^{(0)} \Big|_{x=0}, \quad c_1 = w_{,x}^{(1)} \Big|_{x=0} = w_{,x}^{(0)} \Big|_{x=0}, \\ w_{,xx}^{(1)} \Big|_{x=0} &= \frac{P_0 a_1}{D} = w_{,xx}^{(0)} \Big|_{x=0}, \quad w_{,xxx}^{(1)} \Big|_{x=0} = -\frac{P_0}{D} = w_{,xxx}^{(0)} \Big|_{x=0}, \\ w^{(2)} \Big|_{x=-l} &= c_3 - c_4 l = w^{(0)} \Big|_{x=-l}, \quad w_{,x}^{(2)} \Big|_{x=-l} = c_3 = w_{,x}^{(0)} \Big|_{x=-l}, \\ w_{,xx}^{(2)} \Big|_{x=-l} &= 0 = w_{,xx}^{(0)} \Big|_{x=-l}, \quad w_{,xxx}^{(2)} \Big|_{x=-l} = 0 = w_{,xxx}^{(0)} \Big|_{x=-l}. \end{aligned} \quad (33)$$

Реализация условий (33) приводит к системе линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} c_2 - c_5 - c_7 &= 0, \quad c_1 - \alpha(c_5 + c_6 - c_7 + c_8) = 0, \\ 2\alpha^2(c_6 - c_8) &= P_0 a_1 / D, \quad 2\alpha^3(-c_5 + c_6 + c_7 - c_8) = -P_0 / D, \\ -c_3 l + c_4 - c_5 \exp(-\alpha l) \cos(-\alpha l) - c_6 \exp(-\alpha l) \sin(-\alpha l) - \\ &- c_7 \exp(\alpha l) \cos(-\alpha l) - c_8 \exp(\alpha l) \sin(-\alpha l) = 0, \\ c_3 / \alpha - c_5 \exp(-\alpha l) [\cos(-\alpha l) - \sin(-\alpha l)] - c_6 \exp(-\alpha l) [\cos(-\alpha l) + \sin(-\alpha l)] + \\ &+ c_7 \exp(\alpha l) [\cos(-\alpha l) + \sin(-\alpha l)] - c_8 \exp(\alpha l) [\cos(-\alpha l) - \sin(-\alpha l)] = 0, \\ -c_5 \exp(-\alpha l) \sin(-\alpha l) + c_6 \exp(-\alpha l) \cos(-\alpha l) + c_7 \exp(\alpha l) \sin(-\alpha l) - \\ &- c_8 \exp(\alpha l) \cos(-\alpha l) = 0, \\ -c_5 \exp(-\alpha l) [\cos(-\alpha l) + \sin(-\alpha l)] + c_6 \exp(-\alpha l) [\cos(-\alpha l) - \sin(-\alpha l)] + \\ &+ c_7 \exp(\alpha l) [\cos(-\alpha l) - \sin(-\alpha l)] + c_8 \exp(\alpha l) [\cos(-\alpha l) + \sin(-\alpha l)] = 0, \end{aligned}$$

из которой находятся постоянные $c_1, c_2, \dots, c_8$.

4.2. Действие гармонической нагрузки $P = P_0 \exp(i\omega\tau)$. В рассматриваемом случае вместо уравнений (29) и (30) в силу представления $w^{(s)}(x, \tau) = \tilde{w}^{(s)}(x) \times \exp(i\omega\tau)$, $s = 0, 1, 2$, имеют место уравнения:

$$\tilde{w}_{,xxxx}^{(s)} - k^4 \tilde{w}^{(s)} = 0, \quad k^4 = \frac{12\rho\omega^2}{E_1 h^2}, \quad s = 1, 2, \quad (34)$$

$$\tilde{w}_{,xxx}^{(0)} + k_0^4 \tilde{w}^{(0)} = 0, \quad k_0^4 = \frac{E_3^0}{Dt} - \frac{12\rho\omega^2}{E_1 h^2}, \quad (35)$$

из которых уравнения (34) имеют решения вида

$$\tilde{w}^{(s)} = d_1^{(s)} \sin(kx) + d_2^{(s)} \cos(kx) + d_3^{(s)} \operatorname{sh}(kx) + d_4^{(s)} \operatorname{ch}(kx), \quad s = 1, 2, \quad (36)$$

содержащие восемь постоянных интегрирования $d_1^{(s)}, \dots, d_4^{(s)}$, $s = 1, 2$. Уравнение (35) в зависимости от значения k_0^4 будет иметь три вида решения: если $k_0^4 < 0$, то

$$\tilde{w}^{(0)} = c_1 \sin(k_0 x) + c_2 \cos(k_0 x) + c_3 \operatorname{sh}(k_0 x) + c_4 \operatorname{ch}(k_0 x); \quad (37a)$$

если $k_0^4 = 0$, то

$$\tilde{w}^{(0)} = c_1 \frac{x^3}{6} + c_2 \frac{x^2}{2} + c_3 x + c_4; \quad (37б)$$

если $k_0^4 > 0$, то

$$\begin{aligned} \tilde{w}^{(0)} = & c_1 \exp(\alpha_0 x) \cos(\alpha_0 x) + c_2 \exp(\alpha_0 x) \sin(\alpha_0 x) + \\ & + c_3 \exp(-\alpha_0 x) \cos(\alpha_0 x) + c_4 \exp(-\alpha_0 x) \sin(\alpha_0 x), \quad \alpha_0 = k_0 / \sqrt{2}. \end{aligned} \quad (37в)$$

В силу введенных представлений $P = P_0 \exp(i\omega\tau)$ и $w^{(s)} = \tilde{w}^{(s)} \exp(i\omega\tau)$, $s = 1, 2$, после нахождения из (36) производных $\tilde{w}_{,xx}^{(s)}$, $\tilde{w}_{,xxx}^{(s)}$ и учета последних двух условий в (18) и (20) приходим к системе четырех алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} & -d_1^{(1)} \sin(ka_1) - d_2^{(1)} \cos(ka_1) + d_3^{(1)} \operatorname{sh}(ka_1) + d_4^{(1)} \operatorname{ch}(ka_1) = 0, \\ & -d_1^{(1)} \cos(ka_1) + d_2^{(1)} \sin(ka_1) + d_3^{(1)} \operatorname{ch}(ka_1) + d_4^{(1)} \operatorname{sh}(ka_1) = -P_0 / (k^3 D), \\ & -d_1^{(2)} \sin(-kL_2) - d_2^{(2)} \cos(-kL_2) + d_3^{(2)} \operatorname{sh}(-kL_2) + d_4^{(2)} \operatorname{ch}(-kL_2) = 0, \\ & -d_1^{(2)} \cos(-kL_2) + d_2^{(2)} \sin(-kL_2) + d_3^{(2)} \operatorname{ch}(-kL_2) + d_4^{(2)} \operatorname{sh}(-kL_2) = 0. \end{aligned} \quad (38)$$

Кроме условий (18), (20), функции $\tilde{w}^{(s)}(x)$, $s = 0, 1, 2$, должны удовлетворять также кинематическим и силовым условиям сопряжения участков (21). Вычисления показали, что коэффициент k_0^4 в уравнении (35) относительно функции $\tilde{w}^{(0)}(x)$ при любых разумных значениях входящих в него величин всегда получается положительным. В этом случае подстановка представления $w^{(s)} = \tilde{w}^{(s)} \exp(i\omega\tau)$, $s = 0, 1, 2$, с учетом полученных решений (36) и (37в) в условия (21) (при отбрасывании подчеркнутого слагаемого) доставляет в дополнение к (38) еще восемь уравнений:

$$\begin{aligned} & c_1 + c_3 - d_2^{(1)} - d_4^{(1)} = 0, \quad c_1 \exp(-\alpha_0 l) \cos(-\alpha_0 l) + c_2 \exp(-\alpha_0 l) \sin(-\alpha_0 l) + \\ & + c_3 \exp(\alpha_0 l) \cos(-\alpha_0 l) + c_4 \exp(\alpha_0 l) \sin(-\alpha_0 l) - d_1^{(2)} \sin(-kl) - d_2^{(2)} \cos(-kl) - \\ & - d_3^{(2)} \operatorname{sh}(-kl) - d_4^{(2)} \operatorname{ch}(-kl) = 0, \quad \alpha_0(c_1 + c_2 - c_3 + c_4) - k(d_1^{(1)} + d_3^{(1)}) = 0, \\ & c_1 \alpha_0 \exp(-\alpha_0 l) [\cos(-\alpha_0 l) - \sin(-\alpha_0 l)] + c_2 \alpha_0 \exp(-\alpha_0 l) [\sin(-\alpha_0 l) + \cos(-\alpha_0 l)] - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -c_3\alpha_0 \exp(\alpha_0 l)[\cos(-\alpha_0 l) + \sin(-\alpha_0 l)] + c_4\alpha_0 \exp(\alpha_0 l)[- \sin(-\alpha_0 l) + \cos(-\alpha_0 l)] - \\
& -k[d_1^{(2)}\cos(-kl) - d_2^{(2)}\sin(-kl) + d_3^{(2)}\operatorname{ch}(-kl) + d_4^{(2)}\operatorname{sh}(-kl)] = 0, \\
& 2\alpha_0^2(c_2 - c_4) - k^2(-d_2^{(1)} + d_4^{(1)}) = 0, \quad 2\alpha_0^2[-c_1 \exp(-\alpha_0 l)\sin(-\alpha_0 l) + \\
& + c_2 \exp(-\alpha_0 l)\cos(-\alpha_0 l)] + 2\alpha_0^2[c_3 \exp(\alpha_0 l)\sin(-\alpha_0 l) - c_4 \exp(\alpha_0 l)\cos(-\alpha_0 l)] - \\
& -k^2[-d_1^{(2)}\sin(-kl) - d_2^{(2)}\cos(-kl) + d_3^{(2)}\operatorname{sh}(-kl) + d_4^{(2)}\operatorname{ch}(-kl)] = 0, \\
& 2\alpha_0^3(-c_1 + c_2 + c_3 + c_4) - k^3(-d_1^{(1)} + d_3^{(1)}) = 0, \\
& 2\alpha_0^3\{-c_1 \exp(-\alpha_0 l)[\sin(-\alpha_0 l) + \cos(-\alpha_0 l)] + c_2 \exp(-\alpha_0 l)[- \sin(-\alpha_0 l) + \\
& + \cos(-\alpha_0 l)] + c_3 \exp(\alpha_0 l)[- \sin(-\alpha_0 l) + \cos(-\alpha_0 l)] + c_4 \exp(\alpha_0 l)[\sin(-\alpha_0 l) + \\
& + \cos(-\alpha_0 l)]\} - k^3[-d_1^{(2)}\cos(-kl) + d_2^{(2)}\sin(-kl) + d_3^{(2)}\operatorname{ch}(-kl) + d_4^{(2)}\operatorname{sh}(-kl)] = 0.
\end{aligned} \tag{39}$$

Полученные уравнения (38), (39) образуют систему двенадцати линейных алгебраических уравнений, из которой однозначно находятся постоянные интегрирования $d_1^{(s)}, \dots, d_4^{(s)}$, $s = 1, 2$; $c_1, \dots, c_4$, что дает возможность определить амплитуды изгибных колебаний $\tilde{w}^{(s)}$, $s = 0, 1, 2$, закрепленного и незакрепленных участков стержня при действии внешней поперечной силы $P = P_0 \exp(i\omega t)$, приложенной в сечении $x = a_1$ (см. рис. 1). При этом модуль сдвига материала прослойки G_{13}^0 , как видно из (34) и (35), на амплитуды $\tilde{w}^{(s)}$ ($s = 0, 1, 2$) не влияет.

Необходимо отметить, что разработанная методика решения задачи о вынужденных изгибных колебаниях стержня, соединенного с жестким опорным элементом через упругую прослойку конечной длины, не учитывает демпфирующие свойства материала. Поэтому она может давать корректное решение только при частотах, находящихся вдали от резонансной зоны, в то время как заметные колебания стержня должны наблюдаться в резонансных режимах нагружения, при которых демпфирующие свойства материала необходимо обязательно учитывать [24]. При гармоническом законе деформирования стержня это можно сделать с использованием известной гипотезы комплексного внутреннего трения [25–27], заменяя величины E_1 и E_3^0 материала комплексными модулями упругости

$$\bar{E}_1 = E_1 + i \frac{E_1 \delta_1}{\pi}, \quad \bar{E}_3^0 = E_3^0 + i \frac{E_3^0 \delta_3^0}{\pi}, \tag{40}$$

где δ_1, δ_3^0 – логарифмические декременты колебаний (ЛДК), определяющие демпфирующие свойства материала стержня и прослойки при деформировании их соответственно в направлениях осей Oz и $O_3\zeta$ (см. рис. 1).

5. Численные эксперименты и анализ полученных результатов

Эксперимент 1. Исследовалось прохождение изгибных колебаний в ненагруженную консоль стержня-полосы (см. рис. 1) в зависимости от величины модуля упругости прослойки E_3^0 , ее толщины t и длины l закрепленного участка при изменении одной из этих величин и фиксированных значениях двух других параметров. Размеры стержня: $a_1 = 180$ мм, $a_2 = 300$ мм, $h = 2,9$ мм. Материал – алюминиевый сплав Д16Т с характеристиками: $E_1 = 72$ ГПа, $\delta_1 = 0,005$, $\rho = 2770$ кг/м³. Поскольку уравнение (28) соответствует введению в рассмотрение винклеровского основания, ЛДК δ_3^0 материала прослойки в расчет не принимался.

На стержень действует вынуждающая сила $P = P_0 \exp(i\omega t)$ с амплитудой $P_0 = 1920$ Н/м (на единицу ширины стержня) и резонансной частотой основного тона

колебаний $\omega = \omega_r$. Для оценки этой частоты использовалась известная формула [28] при рассмотрении ненагруженной консоли стержня как жестко зашеченной балки, работающей по модели Кирхгофа – Лява:

$$\omega^* = 1,87510^2 \sqrt{EI/(ma_2^4)}, \quad (41)$$

где EI – жесткость стержня на изгиб, m – погонная масса (для стержня единичной ширины в формуле (41) вместо EI и m следует брать соответственно величины D и ρh), что дает $\omega^* = 166,7401 \text{ с}^{-1}$. Для нахождения частоты использовался пересчет $\omega_r = r\omega^*$ с поправочным коэффициентом $r < 1$, определяемым подбором до достижения максимальной по модулю амплитуды прогиба $\tilde{w}^{(2)}(-L_2)$ конца ненагруженной консоли (снижение ω_r по сравнению с ω^* обусловлено податливостью прослойки при деформировании ее в направлении оси $O_3\zeta$).

В таблицах 1–3 приведены значения коэффициента r , частоты $f_r = \omega_r/(2\pi)$, а также амплитуд прогибов $\tilde{w}^{(1)}(a_1)$ и $\tilde{w}^{(2)}(-L_2)$ концов соответственно нагруженной и ненагруженной консолей стержня при варьировании одной из величин E_3^0 , t , l и фиксированных значениях двух других параметров.

Таблица 1

Значения поправочного коэффициента, частоты и амплитуд прогибов при $t = 0,1 \text{ мм}$, $l = 10 \text{ мм}$ и различных отношениях E_3^0/E_1

E_3^0/E_1	r	f_r , Гц	$\tilde{w}^{(1)}(a_1)$, мм	$\tilde{w}^{(2)}(-L_2)$, мм
0,50	0,9925	26,3385	29,7892	–0,0575
0,40	0,9922	26,3305	29,8245	–0,1212
0,30	0,9918	26,3199	29,8732	–0,6265
0,20	0,9907	26,2907	29,9438	–2,0779
0,10	0,9889	26,2429	30,0858	–3,1128
0,05	0,9867	26,1846	30,2547	–11,6481

Таблица 2

Значения поправочного коэффициента, частоты и амплитуд прогибов при $l = 10 \text{ мм}$, $E_3^0/E_1 = 0,3$ и различных толщинах t

t , мм	r	f_r , Гц	$\tilde{w}^{(1)}(a_1)$, мм	$\tilde{w}^{(2)}(-L_2)$, мм
0,05	0,9928	26,3464	29,7623	–0,1003
0,10	0,9918	26,3199	29,8732	–0,6265
0,15	0,9907	26,2907	29,9438	–2,0779
0,20	0,9900	26,2721	29,9958	–3,1675

Таблица 3

Значения поправочного коэффициента, частоты и амплитуд прогибов при $t = 0,1 \text{ мм}$, $E_3^0/E_1 = 0,05$ и различных длинах l

t , мм	r	f_r , Гц	$\tilde{w}^{(1)}(a_1)$, мм	$\tilde{w}^{(2)}(-L_2)$, мм
20,0	0,9869	26,1899	30,2532	–0,1527
15,0	0,9868	26,1872	30,2552	–1,7839
10,0	0,9867	26,1846	30,2547	–11,6481
5,00	0,9866	26,1819	30,2661	–35,2554

Из таблицы 1 видно, что по мере уменьшения E_3^0/E_1 частота f_r , как и следовало ожидать, монотонно уменьшается, причем уменьшение этой частоты является незна-

чительным. Амплитуды колебаний $\tilde{w}^{(1)}(a_1)$ при уменьшении E_3^0/E_1 несколько возрастают. Наибольшие изменения происходят в отношении амплитуды $\tilde{w}^{(2)}(-L_2)$, которая при уменьшении E_3^0/E_1 заметно возрастает. При этом визуально различимое прохождение колебаний в ненагруженную консоль стержня наблюдается при отношении $E_3^0/E_1 \leq 0,3$.

Увеличение t (см. табл. 2) и уменьшение l (см. табл. 3) приводят к существенному возрастанию степени проходимости колебаний в ненагруженную консоль стержня, что можно объяснить естественным снижением жесткости закрепленного участка за счет деформирования прослойки в направлении оси $O_3\xi$.

На рис. 2, 3 приведены соответственно амплитуды изгибных колебаний $\tilde{w}^{(0)}$, $\tilde{w}^{(1)}$, $\tilde{w}^{(2)}$ и амплитуды нормальных напряжений $\tilde{\sigma}_x^{(0)}$, $\tilde{\sigma}_x^{(1)}$, $\tilde{\sigma}_x^{(2)}$ на поверхности $z = h/2$ стержня, полученные при толщине прослойки $t = 0,1$ мм, длине закрепленного участка $l = 10$ мм и отношении $E_3^0/E_1 = 0,3$. Наблюдается заметное прохождение колебаний в ненагруженную консоль стержня (рис. 2а) и существенная локализация прогибов $\tilde{w}_x^{(0)}$ и напряжений $\tilde{\sigma}_x^{(0)}$ в окрестности сечения $x = 0$ закрепленного участка стержня (рис. 2б, 3б), а также полное отсутствие трансформации нормальных напряжений в сечениях $x = 0$ и $x = -l = -10$ мм при переходе от незакрепленного участка стержня к участку закрепления конечной длины l (рис. 3а), что находится в соответствии с условиями сопряжения (21).

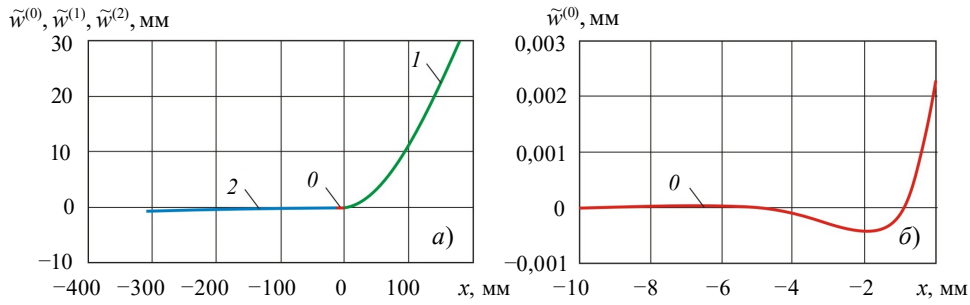


Рис. 2. Амплитуды изгибных колебаний $\tilde{w}^{(0)}$, $\tilde{w}^{(1)}$, $\tilde{w}^{(2)}$ (а) и $\tilde{w}^{(0)}$ (б):
0 – $\tilde{w}^{(0)}$, 1 – $\tilde{w}^{(1)}$, 2 – $\tilde{w}^{(2)}$

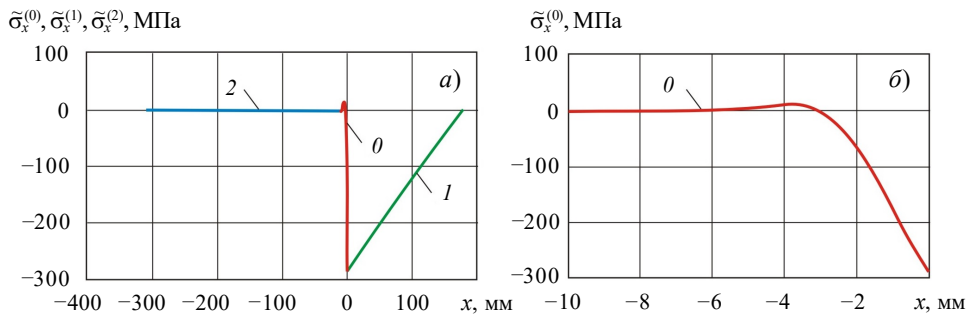


Рис. 3. Амплитуды нормальных напряжений $\tilde{\sigma}_x^{(0)}$, $\tilde{\sigma}_x^{(1)}$, $\tilde{\sigma}_x^{(2)}$ (а) и $\tilde{\sigma}_x^{(0)}$ (б)
на поверхности $z = h/2$ стержня: 0 – $\tilde{\sigma}_x^{(0)}$, 1 – $\tilde{\sigma}_x^{(1)}$, 2 – $\tilde{\sigma}_x^{(2)}$

Эксперимент 2. Исследовалась возможность получения решения задачи о статическом изгибе того же стержня на основе уравнений (34), (35) при действии силы $P = P_0 \exp(i\omega t)$ в случае, когда частота ω равна нулю. Такая возможность должна следовать из того, что при $\omega = 0$ отмеченные уравнения (34), (35) переходят

в уравнения статического равновесия (29), (30). Однако решение системы, составленной из уравнений (38), (39) для определения постоянных интегрирования $d_1^{(s)}$, ..., $d_4^{(s)}$ ($s = 1, 2$), c_1 , ..., c_4 , в таком случае получить не удалось, поскольку знаменатель правой части второго уравнения в (38) содержит коэффициент k , который при $\omega = 0$ становится нулевым, а при учете коэффициента k в левой части уравнения матрица системы уравнений (38), (39) становится особенной. Но если для частоты ω принять достаточно малую величину (порядка 10^{-3} – 10^{-4}), то система уже может иметь регулярное решение.

На рис. 4 приведены прогибы $w^{(0)}$, $w^{(1)}$, $w^{(2)}$ стержня, полученные при $P = 1920$ Н/м (на единицу ширины стержня), $t = 0,1$ мм, $l = 10$ мм, $E_3^0/E_1 = 0,1$ и $\omega = 10^{-3}$ с $^{-1}$. Интересно отметить, что ненагруженная консоль стержня поворачивается относительно сечения $x = -l$ как абсолютно твердое тело (рис. 4б), что объясняется практическим отсутствием изгибающих моментов в ней от сил инерции при частоте $\omega = 10^{-3}$ с $^{-1}$.

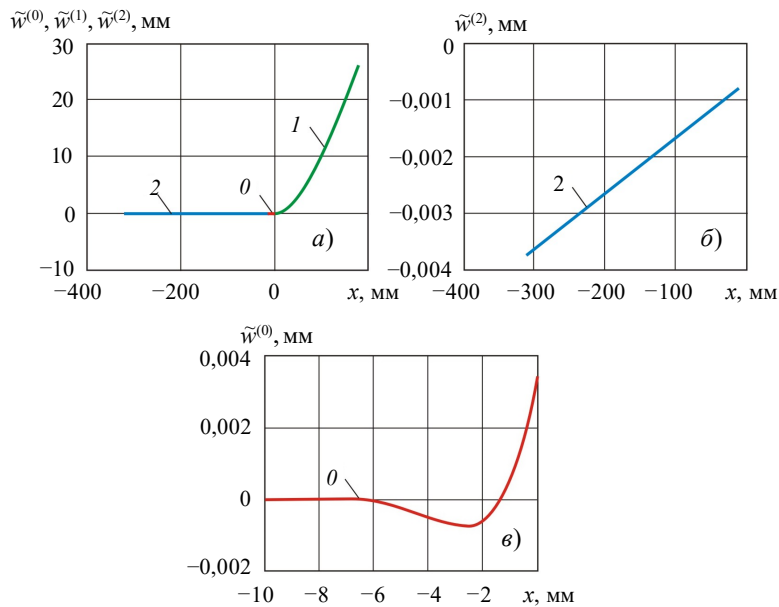


Рис. 4. Прогибы $w^{(0)}$, $w^{(1)}$, $w^{(2)}$ (а), $w^{(2)}$ (б) и $w^{(0)}$ (в) стержня: 0 – $w^{(0)}$; 1 – $w^{(1)}$; 2 – $w^{(2)}$

В таблице 4 приведены прогибы $w^{(1)}(a_1)$ и $w^{(2)}(-L_2)$ концов соответственно нагруженной и ненагруженной консолей стержня при тех же исходных данных $P_0 = 1920$ Н/м, $t = 0,1$ мм, $l = 10$ мм, $E_3^0/E_1 = 0,1$, $\omega = 10^{-3}$ с $^{-1}$, соответствующие уравнениям (34), (35). Для сравнения даны значения $w^{(1)}(a_1)$ и $w^{(2)}(-L_2)$, полученные на основе уравнений статического равновесия (29), (30).

Таблица 4

Прогибы концов консолей, соответствующие уравнениям (34), (35) и (29), (30)

Уравнения (34), (35)		Уравнения (29), (30)	
$w^{(1)}(a_1)$, мм	$w^{(2)}(-L_2)$, мм	$w^{(1)}(a_1)$, мм	$w^{(2)}(-L_2)$, мм
26,2277	–0,00372	26,2312	–0,00370

Из таблицы 4 видно, что значения $w^{(2)}(-L_2)$, полученные с использованием уравнений (34), (35) и (29), (30), являются практически одинаковыми (с точностью до пяти знаков после запятой) и причем такими малыми, что позволяет говорить об их практическом отсутствии. Прогибы $w^{(1)}(a_1)$ конца нагруженной консоли в обоих случаях оказываются достаточно близкими к амплитуде $\tilde{w}^{(1)}(a_1) = 30,0858$ мм, приведенной в таблице 1 при отношении $E_3^0/E_1 = 0,1$ и соответствующей ему частоте $f_r = 26,2429$ Гц. Последнее объясняется тем, что низшая собственная частота колебаний нагруженной консоли значительно отличается от частоты f_r всего стержня, и амплитуда $\tilde{w}^{(1)}(a_1)$ конца отмеченной консоли в этом случае не должна значительно превышать прогиб $\tilde{w}^{(1)}(a_1)$ при статическом действии нагрузки P_0 .

Заключение

Предложенная трансформационная модель предназначена для описания процесса динамического деформирования стержня-полосы прямоугольного поперечного сечения, состоящего по длине из двух незакрепленных (консольных) участков и участка закрепления на опорном элементе конечной длины через трансверсально-мягкую прослойку. Перемещения точек всех участков стержня описываются классической моделью Кирхгофа – Лява, позволяющей при наличии прослойки описать процесс прохождения изгибных колебаний от нагруженного участка стержня к ненагруженному. Исходя из вариационного принципа Даламбера – Лагранжа, получены уравнения движения и соответствующие граничные условия, а также силовые условия сопряжения отмеченных участков стержня. Проведено упрощение построенных уравнений на закрепленном участке путем перехода к известной модели винклеровского основания, с помощью которых найдено точное аналитическое решение задачи о вынужденных гармонических колебаниях стержня рассматриваемого класса.

Проведены параметрические исследования по влиянию прохождения изгибных колебаний в ненагруженную консоль дюралюминиевого стержня-полосы (см. рис. 1) в зависимости от величины модуля упругости прослойки E_3^0 , ее толщины t и длины l закрепленного участка при изменении одной из этих величин и фиксированных значениях двух других параметров. Показана возможность получения решения задачи о статическом изгибе прежнего стержня при действии постоянной силы $P = P_0$ (см. рис. 1) на основе стационарного решения уравнений движения (34), (35) при частоте $\omega \rightarrow 0$ (в случае $\omega = 0$ получить решение отмеченной задачи не удастся).

Полученные результаты следует рассматривать как методологию постановки и решения задач механики плоских стержней и удлиненных тонких пластин, работающих в рамках классической гипотезы Кирхгофа – Лява и имеющих участки закрепления с абсолютно жесткими и неподвижными опорными элементами через упругие прослойки конечной длины.

Список литературы

1. Algazin S.D., Selivanov I.A. Natural vibration of a rectangular plate with mixed boundary conditions. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2021. Vol. 62. Iss. 2. P. 238–244. <https://doi.org/10.1134/S0021894421020073>.
2. Algarray A.F.A., Jun H., Mahdi I.-E.M. Effects of end conditions of cross-ply laminated composite beams on their dimensionless natural frequencies. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2017. Vol. 58. Iss. 6. P. 1108–1114. <https://doi.org/10.1134/S0021894417060177>.

3. Krylova E.Yu., Papkova I.V., Erofeev N.P., et al. Complex fluctuations of flexible plates under longitudinal loads with account for white noise. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2016. Vol. 57. Iss. 4. P. 714–719. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0021894416040167>.
4. Tüfekci M., John P., Dear J.P., Salles L. Forced vibration analysis of beams with frictional clamps. *Applied Mathematical Modelling*. 2024. Vol. 128. P. 450–469. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2024.01.031>.
5. Banks H.T., Inman D.J. On damping mechanisms in beams. *Journal of Applied Mechanics*. 1991. Vol. 58. Iss. 3. P. 716–723. <https://doi.org/10.1115/1.2897253>.
6. Asadi K., Ahmadian H., Jalali H. Micro/macro-slip damping in beams with frictional contact interface. *Journal of Sound and Vibration*. 2012. Vol. 331. Iss. 21. P. 4704–4712. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2012.05.026>.
7. Ferri A.A., Bindemann A.C. Damping and vibrations of beams with various types of frictional support conditions. *Journal of Vibration and Acoustics*. 1992. Vol. 114. Iss. 3. P. 289–296. <https://doi.org/10.1115/1.2930260>.
8. Paimushin V.N., Shishkin V.M. Deformation of thin-walled structural elements having fixed areas of finite dimensions on the boundary front surfaces. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2023. Vol. 64. No 2. P. 308–324. DOI: 10.1134/S0021894423020153.
9. Paimushin V.N., Shishkin V.M. Refined model of dynamic deformation of a flat rod with a finite-length fixed region on an outer surface. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2024. Vol. 65. No 1. P. 161–175. DOI: 10.1134/S0021894424010176.
10. Paimushin V.N., Firsov V.A., Shishkin V.M., Gazizullin R.K. Transformational deformation models of continuous thin-walled structural elements with support elements of finite sizes: Theoretical foundations, computational, and physical experiments. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2023. Vol. 104. Iss. 2. Article No e202300214. DOI: 10.1002/zamm.202300214.
11. Paimushin V.N. Plane mechanical problems of straight beams with a deformable fixed section of finite length. *Russian Mathematics*. 2022. Vol. 66. P. 75–81. DOI: <https://doi.org/10.3103/S1066369X22030082>.
12. Reddy J.N. A simple higher-order theory for laminated composite plates. *Journal of Applied Mechanics*. 1984. Vol. 51. Iss. 4. P. 745–752. <https://doi.org/10.1115/1.3167719>.
13. Librescu L. Refined geometrically nonlinear theories of anisotropic laminated shells. *Quarterly of Applied Mathematics*. 1987. Vol. 45. Iss. 1. P. 1–22. DOI: <https://doi.org/10.1090/qam/885164>.
14. Schmidt R., Reddy J.N. A refined small strain and moderate rotation theory of elastic anisotropic shells. *Journal of Applied Mechanics*. 1988. Vol. 55. Iss. 3. P. 611–617. DOI: 10.1115/1.3125837.
15. Librescu L., Schmidt R. Refined theories of elastic anisotropic shells accounting for small strains and moderate rotations. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 1988. Vol. 23. Iss. 3. P. 217–229. [https://doi.org/10.1016/0020-7462\(88\)90013-3](https://doi.org/10.1016/0020-7462(88)90013-3).
16. Reddy J.N. A general non-linear third-order theory of plates with moderate thickness. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 1990. Vol. 25. Iss. 6. P. 677–686. [https://doi.org/10.1016/0020-7462\(90\)90006-U](https://doi.org/10.1016/0020-7462(90)90006-U).
17. Librescu L., Schmidt R. Substantiation of a shear-deformable theory of anisotropic composite laminated shells accounting for the interlaminar continuity conditions. *International Journal of Engineering Science*. 1991. Vol. 29. Iss. 6. P. 669–683. [https://doi.org/10.1016/0020-7225\(91\)90097-M](https://doi.org/10.1016/0020-7225(91)90097-M).
18. Basar Y., Ding Y., Schultz R. Refined shear-deformation models for composite laminates with finite rotations. *International Journal of Solids and Structures*. 1993. Vol. 30. Iss. 19. P. 2611–2638. [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(93\)90102-D](https://doi.org/10.1016/0020-7683(93)90102-D).
19. Gruttmann F., Wagner W. A linear quadrilateral shell element with fast stiffness computation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2005. Vol. 194. Iss. 39–41. P. 4279–4300. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2004.11.005>.
20. Gruttmann F., Wagner W. Structural analysis of composite laminates using a mixed

hybrid shell element. *Computational Mechanics*. 2006. Vol. 37. P. 479–497. <https://doi.org/10.1007/s00466-005-0730-1>.

21. Schmidt R., Vu T.D. Nonlinear dynamic FE simulation of smart piezolaminated structures based on first- and third-order transverse shear deformation theory. *Advanced Materials Research*. 2009. Vol. 79–82. P. 1313–1316. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMR.79-82.1313>.

22. Yankovskii A.P. Critical analysis of the equations of statics in the bending theories of composite plates obtained on the basis of variational principles of elasticity theory. 1. General theories of high order. *Mechanics of Composite Materials*. 2020. Vol. 56. Iss. 3. P. 271–290. <https://doi.org/10.1007/s11029-020-09880-8>.

23. Yankovskii A.P. Critical analysis of the equations of statics in the bending theories of composite plates obtained on the basis of variational principles of elasticity theory. 2. Particular low-order theories. *Mechanics of Composite Materials*. 2020. Vol. 56. Iss. 4. P. 437–454. <https://doi.org/10.1007/s11029-020-09895-1>.

24. Цейтлин А.И. Об учете внутреннего трения в нормативных документах по динамическому расчету сооружений. *Строительная механика и расчет сооружений*. 1981. №4. С. 33–38.

25. Сорокин Е.С. *К теории внутреннего трения при колебаниях упругих систем*. М.: Гостройиздат, 1960. 129 с.

26. Василенко Н.В. Учет несовершенной упругости материала при механических колебаниях методом комплексных модулей. *Рассеяние энергии при колебаниях механических систем: Матер. X Всесоюз. науч.-техн. совещания*. Киев, дек. 1974. Киев: Наукова думка, 1976. С. 5–12.

27. Рикардс Р.Б., Барканов Е.Н. Определение динамических характеристик вибропоглощающих покрытий методом конечных элементов. *Механика композитных материалов*. 1991. №5. С. 823–830.

28. Хазанов Х.С. *Механические колебания систем с распределенными параметрами*. Самара: СГАУ, 2002. 80 с.

References

1. Algazin S.D., Selivanov I.A. Natural vibration of a rectangular plate with mixed boundary conditions. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 2021. Vol. 62. Iss. 2. P. 238–244. <https://doi.org/10.1134/S0021894421020073>.

2. Algarray A.F.A., Jun H., Mahdi I.-E.M. Effects of end conditions of cross-ply laminated composite beams on their dimensionless natural frequencies. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 2017. Vol. 58. Iss. 6. P. 1108–1114. <https://doi.org/10.1134/S0021894417060177>.

3. Krylova E.Yu., Papkova I.V., Erofeev N.P., et al. Complex fluctuations of flexible plates under longitudinal loads with account for white noise. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 2016. Vol. 57. Iss. 4. P. 714–719. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0021894416040167>.

4. Tüfekci M., John P., Dear J.P., Salles L. Forced vibration analysis of beams with frictional clamps. *Appl. Math. Modell.* 2024. Vol. 128. P. 450–469. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2024.01.031>.

5. Banks H.T., Inman D.J. On damping mechanisms in beams. *J. Appl. Mech.* 1991. Vol. 58. Iss. 3. P. 716–723. <https://doi.org/10.1115/1.2897253>.

6. Asadi K., Ahmadian H., Jalali H. Micro/macro-slip damping in beams with frictional contact interface. *J. Sound Vib.* 2012. Vol. 331. Iss. 21. P. 4704–4712. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2012.05.026>.

7. Ferri A.A., Bindemann A.C. Damping and vibrations of beams with various types of frictional support conditions. *J. Vib. Acoust.* 1992. Vol. 114. Iss. 3. P. 289–296. <https://doi.org/10.1115/1.2930260>.

8. Paimushin V.N., Shishkin V.M. Deformation of thin-walled structural elements having fixed areas of finite dimensions on the boundary front surfaces. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 2023. Vol. 64. No 2. P. 308–324. DOI: [10.1134/S0021894423020153](https://doi.org/10.1134/S0021894423020153).

9. Paimushin V.N., Shishkin V.M. Refined model of dynamic deformation of a flat rod with a finite-length fixed region on an outer surface. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 2024. Vol. 65. No 1. P. 161–175. DOI: [10.1134/S0021894424010176](https://doi.org/10.1134/S0021894424010176).

10. Paimushin V.N., Firsov V.A., Shishkin V.M., Gazizullin R.K. Transformational deformation models of continuous thin-walled structural elements with support elements of finite sizes: Theoretical foundations, computational, and physical experiments. *J. Appl. Math. Mech.* 2023. Vol. 104. Iss. 2. Article No e202300214. DOI: 10.1002/zamm.202300214.
11. Paimushin V.N. Plane mechanical problems of straight beams with a deformable fixed section of finite length. *Russ. Math.* 2022. Vol. 66. P. 75–81. DOI: <https://doi.org/10.3103/S1066369X22030082>.
12. Reddy J.N. A simple higher-order theory for laminated composite plates. *J. Appl. Mech.* 1984. Vol. 51. Iss. 4. P. 745–752. <https://doi.org/10.1115/1.3167719>.
13. Librescu L. Refined geometrically nonlinear theories of anisotropic laminated shells. *Quarterly of Applied Mathematics*. 1987. Vol. 45. Iss. 1. P. 1–22. DOI: <https://doi.org/10.1090/qam/885164>.
14. Schmidt R., Reddy J.N. A refined small strain and moderate rotation theory of elastic anisotropic shells. *J. Appl. Mech.* 1988. Vol. 55. Iss. 3. P. 611–617. DOI: 10.1115/1.3125837.
15. Librescu L., Schmidt R. Refined theories of elastic anisotropic shells accounting for small strains and moderate rotations. *Int. J. Non. Linear. Mech.* 1988. Vol. 23. Iss. 3. P. 217–229. [https://doi.org/10.1016/0020-7462\(88\)90013-3](https://doi.org/10.1016/0020-7462(88)90013-3).
16. Reddy J.N. A general non-linear third-order theory of plates with moderate thickness. *Int. J. Non. Linear. Mech.* 1990. Vol. 25. Iss. 6. P. 677–686. [https://doi.org/10.1016/0020-7462\(90\)90006-U](https://doi.org/10.1016/0020-7462(90)90006-U).
17. Librescu L., Schmidt R. Substantiation of a shear-deformable theory of anisotropic composite laminated shells accounting for the interlaminar continuity conditions. *Int. J. Eng. Sci.* 1991. Vol. 29. Iss. 6. P. 669–683. [https://doi.org/10.1016/0020-7225\(91\)90097-M](https://doi.org/10.1016/0020-7225(91)90097-M).
18. Basar Y., Ding Y., Schultz R. Refined shear-deformation models for composite laminates with finite rotations. *International Journal of Solids and Structures*. 1993. Vol. 30. Iss. 19. P. 2611–2638. [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(93\)90102-D](https://doi.org/10.1016/0020-7683(93)90102-D).
19. Gruttmann F., Wagner W. A linear quadrilateral shell element with fast stiffness computation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2005. Vol. 194. Iss. 39–41. P. 4279–4300. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2004.11.005>.
20. Gruttmann F., Wagner W. Structural analysis of composite laminates using a mixed hybrid shell element. *Comp. Mech.* 2006. Vol. 37. P. 479–497. <https://doi.org/10.1007/s00466-005-0730-1>.
21. Schmidt R., Vu T.D. Nonlinear dynamic FE simulation of smart piezolaminated structures based on first- and third-order transverse shear deformation theory. *Advanced Materials Research*. 2009. Vol. 79–82. P. 1313–1316. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMR.79-82.1313>.
22. Yankovskii A.P. Critical analysis of the equations of statics in the bending theories of composite plates obtained on the basis of variational principles of elasticity theory. 1. General theories of high order. *Mechanics of Composite Materials*. 2020. Vol. 56. Iss. 3. P. 271–290. <https://doi.org/10.1007/s11029-020-09880-8>.
23. Yankovskii A.P. Critical analysis of the equations of statics in the bending theories of composite plates obtained on the basis of variational principles of elasticity theory. 2. Particular low-order theories. *Mechanics of Composite Materials*. 2020. Vol. 56. Iss. 4. P. 437–454. <https://doi.org/10.1007/s11029-020-09895-1>.
24. Tseytlin A.I. Ob uchete vnutrennego treniya v normativnykh dokumentakh po dinamicheskomu raschetu sooruzheniy [On accounting for internal friction in regulatory documents on the dynamic calculation of structures]. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy* [Structural Mechanics and Analysis of Constructions]. 1981. No 4. P. 33–38 (In Russian).
25. Sorokin E.S. *K teorii vnutrennego treniya pri kolebaniyakh uprugikh system* [On the Theory of Internal Friction during Vibrations of Elastic Systems]. Moscow. Gosstroyizdat Publ. 1960. 129 p. (In Russian).
26. Vasilenko N.V. Uchet nesovershennoy uprugosti materiala pri mekhanicheskikh kolebaniyakh metodom kompleksnykh moduley [Accounting for imperfect elasticity of a material during mechanical vibrations using the complex modulus method]. *Rasseyaniye energii pri kolebaniyakh mekhanicheskikh sistem: Materialy X Vsesoyuznogo nauchno-tekhnicheskogo*

soveshchaniya. Kiev, dek. 1974 [*Energy Dissipation during Vibrations of Mechanical Systems: Materials of the X All-Union Scientific and Technical Meeting*. Kiev, December 1974]. Kiev. Naukova dumka Publ. 1976. P. 5–12 (In Russian).

27. Rikards R.B., Barkanov E.N. Opredelenie dinamicheskikh kharakteristik vibropogloshchayushchikh pokrytiy metodom konechnykh elementov [Dynamic analysis of damping coatings by the finite element method]. *Mekhanika kompozitnykh materialov* [*Mechanics of Composite Materials*]. 1991. No 5. P. 823–830 (In Russian).

28. Khazanov Kh.S. *Mekhanicheskie kolebaniya sistem s raspredelennymi parametrami* [*Mechanical Vibrations of Systems with Distributed Parameters*]. Samara. SGAU Publ. 2002. 80 p. (In Russian).

DEFORMATION MODELS OF ROD-STRIP CONNECTED WITH RIGID SUPPORT ELEMENT THROUGH ELASTIC SPACER FINAL LENGTH.

1. KIRCHHOFF–LOVE MODEL *

Paimushin V.N.¹, Shishkin V.M.²

¹*Kazan National Research Technical University n.a. A.N. Tupolev,
Kazan, Russian Federation*

²*Vyatka State University, Kirov, Russian Federation*

vpajmushin@mail.ru

Received by the Editor 2026/05/19

A transformational model of dynamic deformation of the rod-strip was built, consisting along the length of one-sided fixed and two non-fixed (solo) sections. It is assumed that the rod on the fixed section is connected to the absolutely rigid and fixed support element through an elastic layer of finite length, which does not have movements of the connection points with the support element. Alterations of points of both fixed and non-fixed sections of the rod are described by the classical Kirchhoff–Love model, when using which the introduction of an elastic transversal-soft layer into consideration on the fixed section makes it possible to describe the process of passage of bending vibrations from one non-fixed section to another. The conditions of kinematic conjugation of the fixed and loose sections of the rod are formulated, when taking into account which, based on the D'Alembert – Lagrange variation principle, the corresponding equations of motion and boundary conditions are obtained for the sections introduced into consideration, as well as force conditions for conjugation of the sections. Simplification of the constructed equations was carried out at the locked section by transition to the known Winkler base model, on the basis of which an exact analytical solution to the problem of forced harmonic oscillations of the rod of the given class was found. Numerical experiments were carried out on the effect of the degree of passage of bending coforests into the unloaded console of the duralumin rod-strip depending on the value of the normal modulus of the interlayer, its thickness and the length of the fixed section when one of these values changes and fixed values of two other parameters. The possibility of obtaining a solution to the problem of static bending of the rod under the action of a constant force at one of the ends based on the stationary solution of the equations of motion at a very low frequency of cyclic deformation is shown.

Keywords: bar-strip, Kirchhoff–Love model, support element, transversal-soft interlayer, loose and fixed sections, transformation deformation model, forced oscillations, analytical solution.

* Carried out at the expense of the Russian Science Foundation (project No 23-19-00021-II).