

УДК 539.3

DOI: 10.32326/1814-9146-2026-88-3-67-78

УРАВНЕНИЯ ПЛОСКОГО ДВИЖЕНИЯ ДЛЯ КРУГОВЫХ УПРУГИХ МОМЕНТНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК*

© 2026 г.

**Тарлаковский Д.В., Рязанцева М.Ю.,
Фарманян А.Ж.**

НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Российская Федерация

tdvhome@mail.ru, m-rznt@yandex.ru, anafarmanyanyan@mail.ru

Поступила в редакцию 13.05.2026

Уравнения в рамках плоской постановки задачи для круговых цилиндрических оболочек получены на основе ранее сформулированной модели динамики тонкой изотропной круговой моментной цилиндрической оболочки постоянной толщины.

При переходе к плоской модели все искомые величины рассматриваются как функции только угловой координаты; их зависимость от пространственной координаты вдоль оси цилиндра исключается, при этом деформационное состояние полагается одинаковым во всех плоскостях, перпендикулярных оси цилиндра. На поля перемещений и вращений налагаются дополнительные кинематические ограничения, обеспечивающие корректность плоской постановки задачи. Эти ограничения приводят к обращению в нуль ряда кинематических величин, и для выполнения этих тождеств необходимы подобные требования к внешней нагрузке.

Итогом аналитического вывода стала замкнутая система шести дифференциальных уравнений движения, представленная в операторной форме. Система составлена относительно шести неизвестных кинематических параметров – перемещений и углов поворота.

Проведенные исследования демонстрируют, что спектр возможных волновых процессов в моментно-упругой среде при плоском движении изотропной моментной круговой цилиндрической оболочки включает три типа волн: волну расширения, волну сдвига и волну вращения.

Допущение о симметричности векторов перерезывающих усилий позволяет исключить ряд слагаемых в исходных уравнениях движения. В результате система из шести уравнений редуцируется до трех, совпадающих с уравнениями движения оболочки типа Тимошенко, что демонстрирует преемственность рассматриваемой постановки с классической теорией учета поперечного сдвига.

При решении конкретных динамических задач деформирования упругих круговых моментных цилиндрических оболочек в рамках модели плоского движения приведен безразмерный аналог построенной динамической модели.

* Исследование выполнено в рамках государственного задания МГУ имени М.В. Ломоносова, 2021–2028, № ЦИТИС 121033000073-2.

Ключевые слова: изотропная тонкая упругая цилиндрическая оболочка, микрополярная среда (среда Коссера), уравнения движения в силовых и кинематических параметрах, плоская задача.

Введение

Развитие современной техники связано с созданием и эксплуатацией новых конструкционных материалов, в частности разнообразных композиционных материалов. При расчетах на прочность большинства композитов в условиях эксплуатационных статических и динамических нагрузок требуется использовать модели, учитывающие микроструктурные эффекты материала. Моментные, несимметричные или микроструктурные среды, объединенные понятием «среда Коссера», используются для расчета напряженно-деформированного состояния композиционных материалов с выраженной микроструктурой. Учет микрополярных свойств такой среды обусловлен введением дополнительных кинематических характеристик, с которыми связана работа вращающего момента, описание которого приводит к несимметричному тензору напряжений.

Теория упругости трехмерных моментных сред разработана в монографиях [1–3]. Как следует из публикаций, модели моментных сред находят все возрастающее применение в механике тонкостенных конструкций в связи с появлением новых конструкционных материалов и развитием мощных вычислительных методов. Так, например, поведение упругих моментных стержней и пластин исследуется в [4–9]. Механике моментных упругих оболочек посвящены публикации [10–19]. Однако, несмотря на обширную литературу, проблему создания динамической теории тонких упругих моментных оболочек, приспособленной для решения нестационарных задач, нельзя считать решенной.

Плоское движение в цилиндрической оболочке – это важная задача механики деформируемого твердого тела, изучающая поведение тонкостенных цилиндрических конструкций под действием нагрузок, вызывающих перемещения и деформации, лежащие в плоскости, перпендикулярной оси оболочки. Этот вид движения характерен для множества инженерных приложений, включая сосуды под давлением, трубопроводы, лопасти турбин и корпуса ракет. Понимание плоского движения в цилиндрических оболочках важно для обеспечения прочности, жесткости и сейсмостойкости инженерных конструкций, а также для предотвращения аварийных ситуаций.

В самой общей постановке динамическая теория тонких моментных упругих оболочек с произвольной срединной поверхностью построена в [20]. Уравнения движения изотропной моментной круговой цилиндрической оболочки в усилиях и кинематических параметрах построены в [21, 22].

В настоящей статье с использованием модели, построенной в [21], получены уравнения плоского движения в изотропной моментной круговой цилиндрической оболочке и выведены их безразмерные аналоги.

1. Постановка плоских задач для основной модели моментных цилиндрических оболочек

Рассматривается круговая цилиндрическая изотропная моментная упругая оболочка постоянной малой толщины h с радиусом срединной поверхности R :

$$\frac{h}{R} = \delta \ll 1, \quad (1)$$

материал которой описывается моделью Коссера [23].

При выводе плоского движения будем использовать цилиндрическую систему координат $\alpha_2 x$, где угловая координата α_2 изменяется в пределах $-\pi < \alpha_2 \leq \pi$, ось x совпадает с осью цилиндрической оболочки.

В статье [21] построены уравнения движения моментных упругих цилиндрических оболочек в операторном виде в кинематических параметрах и усилиях.

Уравнения движения в кинематических параметрах

$$\begin{aligned} \mathbf{ZV} + \mathbf{Q} &= \frac{\partial^2 \mathbf{V}}{\partial t^2}, \quad \mathbf{Z} = (Z_{ij})_{12 \times 12}, \quad \mathbf{V} = (v_1, v_2, \dots, v_{12})^T, \quad \mathbf{Q} = (q_1, q_2, \dots, q_{12})^T, \\ v_1 &= u_\alpha, \quad v_2 = u_x, \quad v_3 = w, \quad v_4 = \omega_\alpha, \quad v_5 = \omega_x, \quad v_6 = \omega, \quad v_7 = \Psi_\alpha, \\ v_8 &= \Psi_x, \quad v_9 = \Phi_\alpha, \quad v_{10} = \Phi_x, \quad v_{11} = \Psi_3, \quad v_{12} = \Phi_3, \\ q_1 &= \frac{q_\alpha}{\rho h}, \quad q_2 = \frac{q_x}{\rho h}, \quad q_3 = \frac{q}{\rho h}, \quad q_4 = \frac{\tilde{m}_{M\alpha}}{hJ}, \quad q_5 = \frac{\tilde{m}_{Mx}}{hJ}, \quad q_6 = \frac{\tilde{m}_M}{hJ}, \quad q_7 = \frac{m_\alpha}{\rho I}, \\ q_8 &= \frac{m_x}{\rho I}, \quad q_9 = \frac{\tilde{m}_{2M\alpha}}{IJ}, \quad q_{10} = \frac{\tilde{m}_{2Mx}}{IJ}, \quad q_{11} = \frac{m}{\rho I}, \quad q_{12} = \frac{\tilde{m}_{2M}}{IJ}, \end{aligned} \quad (2)$$

где операторы Z_{ij} определены в [21], ρ – плотность материала оболочки, J – массовая мера инерции среды при вращении, $I = h^3/3$; $\mathbf{u} = (u_i + \Psi_i x_3) \mathbf{e}_i + (w + \Psi_3 x_3) \mathbf{n}$ – вектор перемещений; $\mathbf{e}_i$ и $\mathbf{n}$ – векторы базиса и единичной нормали к срединной поверхности; $\boldsymbol{\omega} = (\omega_i + \Phi_i x_3) \mathbf{e}_i + (\omega + \Phi_3 x_3) \mathbf{n}$ – вектор угла поворота; векторы $q_i \mathbf{e}_i + q \mathbf{n}$ и $m_i \mathbf{e}_i + m \mathbf{n}$, $\tilde{m}_{iM} \mathbf{e}_i + \tilde{m}_M \mathbf{n}$ имеют смысл векторов поверхностного давления и моментов, отнесенных к единице площади; $m_i \mathbf{e}_i + m \mathbf{n}$, $\tilde{m}_{iM} \mathbf{e}_i + \tilde{m}_M \mathbf{n}$ – моменты второго порядка.

Уравнения движения в усилиях

$$\begin{aligned} \rho h \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial t^2} &= \frac{1}{R} \frac{\partial T_{\alpha\alpha}}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial T_{x\alpha}}{\partial x} + \frac{T_{\alpha 3}}{R} + q_\alpha, \quad \rho h \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = \frac{1}{R} \frac{\partial T_{\alpha x}}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + q_x, \\ \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \frac{1}{R} \frac{\partial T_{\alpha 3}}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial T_{x3}}{\partial x} - \frac{T_{\alpha\alpha}}{R} + q; \\ \rho I \frac{\partial^2 \Psi_\alpha}{\partial t^2} &= \frac{1}{R} \frac{\partial M_{\alpha\alpha}}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial M_{x\alpha}}{\partial x} - T_{3\alpha} + m_\alpha, \quad \rho I \frac{\partial^2 \Psi_x}{\partial t^2} = \frac{1}{R} \frac{\partial M_{\alpha x}}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial M_{xx}}{\partial x} - T_{3x} + m_x, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \rho I \frac{\partial^2 \Psi_3}{\partial t^2} &= \frac{1}{R} \frac{\partial M_{\alpha 3}}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial M_{x3}}{\partial x} - N + m; \\ hJ \frac{\partial^2 \omega_\alpha}{\partial t^2} &= \frac{1}{R} \frac{\partial R_{\alpha\alpha}}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial R_{x\alpha}}{\partial x} + \frac{R_{\alpha 3}}{R} + T_{x3} - T_{3x} + \tilde{m}_{M\alpha}, \\ hJ \frac{\partial^2 \omega_x}{\partial t^2} &= \frac{1}{R} \frac{\partial R_{\alpha x}}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial R_{xx}}{\partial x} + T_{3\alpha} - T_{\alpha 3} + \tilde{m}_{Mx}, \\ hJ \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} &= \frac{1}{R} \frac{\partial R_{\alpha 3}}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial R_{x3}}{\partial x} - \frac{R_{\alpha\alpha}}{R} + \hat{T}_{\alpha x} - \hat{T}_{x\alpha} + \tilde{m}_M; \\ IJ \frac{\partial^2 \Phi_\alpha}{\partial t^2} &= \frac{1}{R} \frac{\partial S_{\alpha\alpha}}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial S_{x\alpha}}{\partial x} + M_{x3} - M_{3x} - R_{3\alpha} + \tilde{m}_{2M\alpha}, \end{aligned} \quad (4)$$

$$IJ \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2} = \frac{1}{R} \frac{\partial S_{\alpha x}}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial S_{xx}}{\partial x} + M_{3\alpha} - M_{\alpha 3} - R_{3x} + \tilde{m}_{2Mx}, \quad (6)$$

$$IJ \frac{\partial^2 \phi_3}{\partial t^2} = \frac{1}{R} \frac{\partial S_{\alpha 3}}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial S_{x3}}{\partial x} + M_{\alpha x} - M_{x\alpha} - N_\omega + \tilde{m}_{2M}.$$

Здесь t – время, $\mathbf{T} = T_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$ и $\mathbf{M} = M_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$ – векторы тангенциальных усилий и моментов; $T_{i3}\mathbf{e}_i$, $T_{3i}\mathbf{e}_i$ – векторы перерезывающих усилий; $M_{i3}\mathbf{e}_i$, $M_{3i}\mathbf{e}_i$ – векторы дополнительных моментов; N – нормальное усилие. Введем $\mathbf{S} = S_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$, $R_{i3}\mathbf{e}_i$, $R_{3i}\mathbf{e}_i$ и $S_{i3}\mathbf{e}_i$, N_ω – аналогичные силовые характеристики для моментной среды.

Преобразуем уравнения (3)–(6) для постановки и решения задачи о плоском движении круговых цилиндрических моментных оболочек. Под плоским движением цилиндрической оболочки будем понимать такое движение, при котором все искомые функции зависят только от угловой координаты α_2 . Для перехода к уравнениям плоского движения следует наложить специальные ограничения на поля перемещений, приводящие к нулевым значениям некоторые кинематические параметры и параметры внешней нагрузки. В результате задача определения напряженно-деформированного состояния становится одномерной по угловой координате. Тогда справедливыми станут соотношения:

$${}^p u_x(\alpha_2, x) = {}^p \psi_x(\alpha_2, x) = 0, \quad (7)$$

$${}^p \omega_\alpha(\alpha_2, x) = {}^p \phi_\alpha(\alpha_2, x) = {}^p \omega(\alpha_2, x) = {}^p \phi_3(\alpha_2, x) = 0. \quad (8)$$

Здесь и далее верхним знаком p отмечены величины, имеющие отношение к плоской задаче.

Для выполнения требований (7) и (8) необходимо наложить ограничения на внешнюю нагрузку:

$$q_x = m_x = \tilde{m}_{M\alpha} = \tilde{m}_M = \tilde{m}_{2M\alpha} = \tilde{m}_{2M} = 0. \quad (9)$$

Для плоского движения в круговой цилиндрической изотропной моментной упругой оболочке физические соотношения принимают вид:

$$\begin{aligned} \frac{{}^p T_{\alpha\alpha}}{h} &= \frac{\lambda + 2\mu}{R} \left(\frac{\partial {}^p u_\alpha}{\partial \alpha_2} + {}^p w \right) - \frac{(\lambda + 2\mu)r^2}{R^2} \cdot \frac{\partial {}^p \psi_\alpha}{\partial \alpha_2} + \lambda {}^p \psi_3, \\ \frac{{}^p T_{\alpha 3}}{h} &= \frac{\mu + \alpha}{R} \left(\frac{\partial {}^p w}{\partial \alpha_2} - {}^p u_\alpha \right) + (\mu - \alpha) {}^p \psi_\alpha + 2\alpha \left({}^p \omega_x - \frac{r^2}{R} {}^p \phi_x \right), \\ \frac{{}^p T_{3\alpha}}{h} &= \frac{\mu - \alpha}{R} \left(\frac{\partial {}^p w}{\partial \alpha_2} - {}^p u_\alpha \right) + (\mu + \alpha) {}^p \psi_\alpha - 2\alpha \left({}^p \omega_x + \frac{r^2}{R} {}^p \phi_x \right), \\ \frac{{}^p N}{h} &= \frac{\lambda}{R} \left(\frac{\partial {}^p u_\alpha}{\partial \alpha_2} - {}^p w \right) + \frac{r^2(\lambda + 2\mu)}{R^2} \frac{\partial {}^p \psi_\alpha}{\partial \alpha_2} + (\lambda + 2\mu) {}^p \psi_3; \quad \frac{{}^p R_{\alpha x}}{h} = \frac{\gamma + \varepsilon}{R} \frac{\partial {}^p \omega_x}{\partial \alpha_2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{M_{\alpha\alpha}^p}{I} &= \frac{\lambda + 2\mu}{R} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\Psi_\alpha^p - \frac{u_\alpha^p}{R} \right) + \Psi_3^p - \frac{w^p}{R} \right], \\
\frac{M_{\alpha 3}^p}{I} &= \frac{\mu + \alpha}{R} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\Psi_3^p - \frac{w^p}{R} \right) - \Psi_\alpha^p + \frac{u_\alpha^p}{R} \right] + 2\alpha \Phi_x^p, \\
\frac{M_{3\alpha}^p}{I} &= \frac{\mu - \alpha}{R} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\Psi_3^p - \frac{w^p}{R} \right) - \Psi_\alpha^p + \frac{u_\alpha^p}{R} \right] - 2\alpha \Phi_x^p; \quad \frac{S_{\alpha x}^p}{I} = \frac{\gamma + \varepsilon}{R} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\Phi_3^p - \frac{\omega_x^p}{R} \right).
\end{aligned} \tag{10}$$

Здесь λ, μ – упругие постоянные Ламе; $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$ – дополнительные физические параметры среды, описывающие моментные эффекты.

Тогда уравнения плоского движения в усилиях принимают вид:

$$\begin{aligned}
\rho h \frac{\partial^2 u_\alpha^p}{\partial t^2} &= \frac{1}{R} \frac{\partial T_{\alpha\alpha}^p}{\partial \alpha_2} + \frac{T_{\alpha 3}^p}{R} + q_\alpha, \quad \rho h \frac{\partial^2 w^p}{\partial t^2} = \frac{1}{R} \frac{\partial T_{\alpha 3}^p}{\partial \alpha_2} - \frac{T_{\alpha\alpha}^p}{R} + q, \\
\rho I \frac{\partial^2 \Psi_\alpha^p}{\partial t^2} &= \frac{1}{R} \frac{\partial M_{\alpha\alpha}^p}{\partial \alpha_2} - T_{3\alpha}^p + m_\alpha^p, \quad \rho I \frac{\partial^2 \Psi_3^p}{\partial t^2} = \frac{1}{R} \frac{\partial M_{\alpha 3}^p}{\partial \alpha_2} - N^p + m^p, \\
hJ \frac{\partial^2 \omega_x^p}{\partial t^2} &= \frac{1}{R} \frac{\partial R_{\alpha x}^p}{\partial \alpha_2} + T_{3\alpha}^p - T_{\alpha 3}^p + \tilde{m}_{Mx}, \quad IJ \frac{\partial^2 \Phi_x^p}{\partial t^2} = \frac{1}{R} \frac{\partial S_{\alpha x}^p}{\partial \alpha_2} + M_{3\alpha}^p - M_{\alpha 3}^p + \tilde{m}_{2Mx}.
\end{aligned} \tag{11}$$

Полученная система содержит 6 уравнений относительно 6 неизвестных.

Отметим, что если считать тензоры $T_{\alpha 3}$ и $M_{\alpha 3}$ симметричными, то три уравнения в (11) (первые два уравнения и последнее) с точностью до обозначений совпадают с соответствующими уравнениями движения в [24] для оболочки Тимошенко при $k^2 = 1$.

Уравнения плоского движения в кинематических параметрах

Подставляя (7)–(10) в (11), получаем уравнения движения в кинематических параметрах в операторном виде:

$$\begin{aligned}
{}^p \mathbf{Z} \mathbf{U} + \mathbf{Q} &= \frac{\partial^2 \mathbf{V}^p}{\partial t^2}, \\
{}^p \mathbf{Z} &= (Z_{ij}^p)_{6 \times 6}, \quad {}^p \mathbf{U} = \left(u_1^p, u_2^p, u_3^p, u_4^p, u_5^p, u_6^p \right)^T, \quad {}^p \mathbf{Q} = \left(q_1^p, q_2^p, q_3^p, q_4^p, q_5^p, q_6^p \right)^T, \\
u_1^p &= u_\alpha, \quad u_2^p = w, \quad u_3^p = \omega_x, \quad u_4^p = \Psi_\alpha, \quad u_5^p = \Phi_x, \quad u_6^p = \Psi_3, \\
q_1^p &= \frac{q_\alpha}{\rho h}, \quad q_2^p = \frac{q}{\rho h}, \quad q_3^p = \frac{\tilde{m}_{Mx}}{hJ}, \quad q_4^p = \frac{m_\alpha}{\rho I}, \quad q_5^p = \frac{\tilde{m}_{2Mx}}{IJ}, \quad q_6^p = \frac{m}{\rho I}.
\end{aligned} \tag{12}$$

Здесь Z_{ij}^p – операторы, которые определяются выражениями:

$$Z_{11}^p = \frac{1}{\rho R^2} \left((\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2}{\partial \alpha_2^2} - (\mu + \alpha) \right), \quad Z_{12}^p = \frac{\lambda + 3\mu + \alpha}{\rho R^2} \frac{\partial w}{\partial \alpha_2}, \quad Z_{13}^p = \frac{2\alpha}{\rho R},$$

$$\begin{aligned}
Z_{14}^p &= \frac{1}{\rho R} \left(-\frac{r^2(\lambda+2\mu)}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha_2^2} + (\mu - \alpha) \right), \quad Z_{15}^p = -\frac{2\alpha r^2}{\rho R^2}, \quad Z_{16}^p = \frac{\lambda}{\rho R} \frac{\partial \alpha}{\partial \alpha_2}, \\
Z_{21}^p &= -\frac{\lambda+3\mu+\alpha}{\rho R^2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2}, \quad Z_{22}^p = \frac{1}{\rho R^2} \left((\mu + \alpha) \frac{\partial^2}{\partial \alpha_2^2} - (\lambda + 2\mu) \right), \quad Z_{23}^p = \frac{2\alpha}{\rho R} \frac{\partial}{\partial \alpha_2}, \\
Z_{24}^p &= \frac{\mu - \alpha}{\rho R} \frac{\partial}{\partial \alpha_2}, \quad Z_{25}^p = -\frac{2\alpha r^2}{\rho R^2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2}, \quad Z_{26}^p = -\frac{1}{\rho R} \left(\frac{(\mu + \alpha)r^2}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha_2^2} + \lambda \right), \\
Z_{31}^p &= \frac{2\alpha}{JR}, \quad Z_{32}^p = -\frac{2\alpha}{JR} \frac{\partial}{\partial \alpha_2}, \quad Z_{33}^p = \frac{\gamma + \varepsilon}{JR^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha_2^2} - \frac{4\alpha}{J}, \\
Z_{34}^p &= \frac{2\alpha}{J}, \quad Z_{35}^p = -\frac{(\gamma + \varepsilon)r^2}{JR^3} \frac{\partial^2}{\partial \alpha_2^2}; \\
Z_{41}^p &= \frac{1}{\rho R} \left[-\frac{\lambda+2\mu}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha_2^2} + \left(\frac{\mu - \alpha}{r^2} + \frac{\mu + \alpha}{R^2} \right) \right], \\
Z_{42}^p &= -\frac{1}{\rho R} \left(\frac{\mu - \alpha}{r^2} + \frac{\lambda+3\mu+\alpha}{R^2} \right) \frac{\partial}{\partial \alpha_2}, \quad Z_{43}^p(\omega_x) = -\frac{2\alpha}{\rho r^2}, \\
Z_{44}^p &= \frac{\lambda+2\mu}{\rho R^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha_2^2} - \frac{\mu + \alpha}{\rho} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{R^2} \right), \quad Z_{45}^p = \frac{2\alpha}{\rho R}, \\
Z_{51}^p &= -\frac{2\alpha}{JR^2}, \quad Z_{52}^p = \frac{2\alpha}{JR^2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2}, \quad Z_{53}^p = -\frac{\gamma + \varepsilon}{JR^3} \frac{\partial^2}{\partial \alpha_2^2}, \\
Z_{54}^p &= \frac{2\alpha}{JR}, \quad Z_{55}^p = \frac{\gamma + \varepsilon}{JR^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha_2^2} - \left(\frac{4\alpha}{J} + \frac{\gamma + \varepsilon}{Jr^2} \right), \quad Z_{56}^p = -\frac{2\alpha}{JR} \frac{\partial}{\partial \alpha_2}; \\
Z_{61}^p &= \frac{1}{\rho R} \left(\frac{\lambda+3\mu+\alpha}{R^2} - \frac{\lambda}{r^2} \right) \frac{\partial}{\partial \alpha_2}, \quad Z_{62}^p = -\frac{1}{\rho R} \left[\frac{\mu + \alpha}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha_2^2} + \left(\frac{\lambda}{r^2} - \frac{\lambda+2\mu}{R^2} \right) \right], \\
Z_{64}^p &= \frac{\lambda+3\mu+\alpha}{\rho R^2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2}, \quad Z_{65}^p = \frac{2\alpha}{\rho R} \frac{\partial}{\partial \alpha_2}, \quad Z_{66}^p = \frac{\mu + \alpha}{\rho R^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha_2^2} - \frac{\lambda+2\mu}{\rho} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{R^2} \right).
\end{aligned} \tag{13}$$

Полученная система (12) содержит 6 уравнений относительно 6 неизвестных.

Моментноупругий материал характеризуется тремя видами волн: волной расширения, скорость которой $c_1^2 = (\lambda + 2\mu)/\rho$, волной сдвига со скоростью $c_2^2 = (\mu + \alpha)/\rho$ и волной вращения со скоростью $c_3^2 = (\gamma + \varepsilon)/J$.

2. Безразмерный вид уравнений плоского движения для круговых моментных цилиндрических оболочек

При решении конкретных динамических задач деформирования упругих круговых моментных цилиндрических оболочек удобно модель (10)–(13) представить в безразмерном виде:

$$\begin{aligned}
\tau &= \frac{c_1 t}{R}, \quad u'_\alpha = \frac{u_\alpha}{R}, \quad w' = \frac{w}{R}, \quad \phi'_x = R \phi_x, \quad r' = \frac{r}{R}, \\
q'_i &= \frac{\rho R}{\lambda + 2\mu} q_i \quad (i = 1, 2), \quad q'_i = \frac{\rho R^2}{\lambda + 2\mu} q_i \quad (i = 3, 4, 6), \quad q'_5 = \frac{\rho R^3}{\lambda + 2\mu} q_5,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T'_{\alpha\alpha} &= \frac{T_{\alpha\alpha}}{h(\lambda + 2\mu)}, \quad T'_{\alpha 3} = \frac{T_{\alpha 3}}{h(\lambda + 2\mu)}, \quad T'_{3\alpha} = \frac{T_{3\alpha}}{h(\lambda + 2\mu)}, \quad S'_{\alpha\alpha} = \frac{S_{\alpha\alpha}R^2}{I(\gamma + \varepsilon)}, \\
M'_{\alpha\alpha} &= \frac{M_{\alpha\alpha}R}{I(\lambda + 2\mu)}, \quad M'_{\alpha 3} = \frac{M_{\alpha 3}R}{I(\lambda + 2\mu)}, \quad R'_{\alpha\alpha} = \frac{R_{\alpha\alpha}R}{h(\gamma + \varepsilon)}, \quad N' = \frac{N}{h(\lambda + 2\mu)}, \quad (14) \\
\gamma_1^2 &= \frac{c_2^2}{c_1^2}, \quad \gamma_2^2 = \frac{c_4^2}{c_1^2}, \quad \gamma_3^2 = \frac{c_3^2}{c_1^2}, \\
c_1 &= \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad c_2 = \sqrt{\frac{\mu + \alpha}{\rho}}, \quad c_3 = \sqrt{\frac{\gamma + \varepsilon}{\rho}}, \quad c_4 = \sqrt{\frac{\mu - \alpha}{\rho}}, \\
\alpha' &= \frac{\alpha}{\lambda + 2\mu}, \quad \eta = \frac{\gamma - \varepsilon}{\gamma + \varepsilon}, \quad \vartheta = \frac{\rho R^2}{J}, \quad \kappa = \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}.
\end{aligned}$$

В соответствии с (14) введем безразмерные операторы:

$$\begin{aligned}
- \text{ для } i = 1, 2: \quad Z'_{ij} &= \frac{R^2}{c_1^2} Z_{ij} \quad (j=1, 2), \quad Z'_{ij} = \frac{R}{c_1^2} Z_{ij} \quad (j=3, 4, 6), \quad Z'_{ij} = \frac{1}{c_1^2} Z_{ij} \quad (j=5); \\
- \text{ для } i = 3, 4, 6: \quad Z'_{ij} &= \frac{R^3}{c_1^2} Z_{ij} \quad (j=1, 2), \quad Z'_{ij} = \frac{R^2}{c_1^2} Z_{ij} \quad (j=3, 4, 6), \quad Z'_{ij} = \frac{R}{c_1^2} Z_{ij} \quad (j=5); \\
- \text{ для } i = 5: \quad Z'_{ij} &= \frac{R^4}{c_1^2} Z_{ij} \quad (j=1, 2), \quad Z'_{ij} = \frac{R^3}{c_1^2} Z_{ij} \quad (j=3, 4, 6), \quad Z'_{ij} = \frac{R^2}{c_1^2} Z_{ij} \quad (j=5).
\end{aligned}$$

Тогда безразмерные уравнения плоского движения в усилиях принимают вид:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u'_\alpha}{\partial \tau^2} &= \frac{\partial^2 T'_{\alpha\alpha}}{\partial \alpha_2} + T'_{\alpha 3} + q'_1, \quad \frac{\partial^2 w'}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 T'_{\alpha 3}}{\partial \alpha_2} - T'_{\alpha\alpha} + q'_2, \\
\frac{\partial^2 \psi'_\alpha}{\partial \tau^2} &= \frac{\partial M'_{\alpha\alpha}}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{r'^2} T'_{3\alpha} + q'_3, \quad \frac{\partial^2 \psi'_3}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 M'_{\alpha 3}}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{r'^2} N' + q'_4, \\
\frac{\partial^2 \omega'_x}{\partial \tau^2} &= \gamma_2^2 \frac{\partial^2 R'_{\alpha\alpha}}{\partial \alpha_2} + \vartheta \left(T'_{3\alpha} - T'_{\alpha 3} \right) + q'_5, \quad \frac{\partial^2 \phi'_x}{\partial \tau^2} = \gamma_2^2 \frac{\partial^2 S'_{\alpha\alpha}}{\partial \alpha_2} + \vartheta \left(M'_{3\alpha} - M'_{\alpha 3} \right) + q'_6,
\end{aligned}$$

где физические соотношения запишутся в виде:

$$\begin{aligned}
T'_{\alpha\alpha} &= \frac{\partial u'_\alpha}{\partial \alpha_2} + w' - r'^2 \frac{\partial \psi'_\alpha}{\partial \alpha_2} + k \psi_3, \quad T'_{\alpha 3} = \gamma_1^2 \left(\frac{\partial w}{\partial \alpha_2} - u'_\alpha \right) + \gamma_2^2 \psi'_\alpha + 2\alpha' \left(\omega'_x - r'^2 \phi'_x \right), \\
T'_{3\alpha} &= \gamma_2^2 \left(\frac{\partial w'}{\partial \alpha_2} - u'_\alpha \right) + \gamma_1^2 \psi'_\alpha - 2\alpha' \left(\omega'_x - r'^2 \phi'_x \right), \\
N' &= k \left(\frac{\partial u'_\alpha}{\partial \alpha_2} - w' \right) + r'^2 \frac{\partial \psi'_\alpha}{\partial \alpha_2} + \psi_3, \quad R'_{\alpha\alpha} = \frac{\partial \omega_{\alpha\alpha}}{\partial \alpha_2};
\end{aligned}$$

$$M'_{\alpha\alpha} = \frac{\partial}{\partial\alpha_2} \left(\Psi_\alpha - u'_\alpha \right) + \Psi_3 - w', \quad M'_{\alpha 3} = \gamma_1^2 \left[\frac{\partial}{\partial\alpha_2} \left(\Psi_3 - w' \right) - \Psi_\alpha + u'_\alpha \right] + 2\alpha' \phi'_x,$$

$$M'_{3\alpha} = \gamma_2^2 \left[\frac{\partial}{\partial\alpha_2} \left(\Psi_3 - w' \right) - \Psi_\alpha + u'_\alpha \right] - 2\alpha' \phi'_x, \quad S'_{\alpha x} = \frac{\partial}{\partial\alpha_2} \left(\phi'_x - \omega_x \right).$$

**Безразмерные уравнения плоского движения
в кинематических параметрах в операторном виде**

$$\mathbf{Z}'^p \mathbf{U}'^p + \mathbf{Q}'^p = \frac{\partial^2 \mathbf{V}'^p}{\partial t^2},$$

$$\mathbf{Z}' = (\mathbf{Z}'_{ij})_{6 \times 6}, \quad \mathbf{U}' = \begin{pmatrix} u'_1, u'_2, u'_3, u'_4, u'_5, u'_6 \end{pmatrix}^T, \quad \mathbf{Q}' = \begin{pmatrix} q'_1, q'_2, q'_3, q'_4, q'_5, q'_6 \end{pmatrix}^T,$$

$$u'_1 = u'_\alpha, \quad u'_2 = w', \quad u'_3 = \omega_x, \quad u'_4 = \Psi_\alpha, \quad u'_5 = \phi'_x, \quad u'_6 = \Psi_3,$$

Здесь операторы $\mathbf{Z}'_{ij}$ записываются в виде:

$$\begin{aligned} Z'_{11} &= \frac{\partial^2}{\partial\alpha_2^2} - \gamma_1^2, \quad Z'_{12} = (1 + \gamma_1^2) \frac{\partial}{\partial\alpha_2}, \quad Z'_{13} = 2\alpha' \omega_x, \\ Z'_{14} &= -r'^2 \frac{\partial^2}{\partial\alpha_2^2} + \gamma_2^2, \quad Z'_{15} = -2\alpha' r'^2, \quad Z'_{16} = k \frac{\partial}{\partial\alpha_2}; \\ Z'_{21} &= -(1 + \gamma_1^2) \frac{\partial}{\partial\alpha_2}, \quad Z'_{22} = \gamma_1^2 \frac{\partial^2 w'}{\partial\alpha_2^2} - w', \quad Z'_{23} = 2\alpha' \frac{\partial}{\partial\alpha_2}, \\ Z'_{24} &= \gamma_2^2 \frac{\partial \Psi_\alpha}{\partial\alpha_2}, \quad Z'_{25} = -2\alpha' r'^2 \frac{\partial \phi'_x}{\partial\alpha_2}, \quad Z'_{26} = -\gamma_1^2 r'^2 \frac{\partial^2}{\partial\alpha_2^2} - k; \\ Z'_{31} &= 2\alpha' \vartheta, \quad Z'_{32} = -2\alpha' \vartheta \frac{\partial}{\partial\alpha_2}, \quad Z'_{33} = \gamma_3^2 \frac{\partial^2}{\partial\alpha_2^2} - 4\alpha' \vartheta, \\ Z'_{34} &= 2\alpha' \vartheta, \quad Z'_{35} = -r'^2 \gamma_3^2 \frac{\partial^2}{\partial\alpha_2^2}; \\ Z'_{41} &= -\frac{\partial^2}{\partial\alpha_2^2} + \frac{\gamma_2^2}{r'^2}, \quad Z'_{42} = -\frac{\gamma_2^2}{r'^2} \frac{\partial}{\partial\alpha_2}, \quad Z'_{43} = -\frac{2\alpha'}{r'^2}, \\ Z'_{44} &= -\frac{\partial^2}{\partial\alpha_2^2} + \frac{\gamma_2^2}{r'^2}, \quad Z'_{45} = 2\alpha', \quad Z'_{46} = (1 + \gamma_1^2) \frac{\partial}{\partial\alpha_2}; \\ Z'_{51} &= -2\alpha' \vartheta, \quad Z'_{52} = 2\alpha' \vartheta \frac{\partial}{\partial\alpha_2}, \quad Z'_{53} = -\gamma_3^2 \frac{\partial^2}{\partial\alpha_2^2}, \\ Z'_{54} &= 2\alpha' \vartheta, \quad Z'_{55} = \gamma_3^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha_2^2} - \frac{1}{r'^2} \right), \quad Z'_{56} = -2\alpha' \vartheta \frac{\partial}{\partial\alpha_2}; \\ Z'_{61} &= \frac{k}{r'^2} \frac{\partial}{\partial\alpha_2}, \quad Z'_{62} = -\gamma_1^2 \frac{\partial^2 w'}{\partial\alpha_2^2} - \frac{k}{r'^2} w', \quad Z'_{64} = -(1 + \gamma_1^2) \frac{\partial}{\partial\alpha_2}, \end{aligned}$$

$$\overset{p}{Z'}_{65} = 2\alpha' \frac{\partial}{\partial \alpha_2}, \quad \overset{p}{Z'}_{66} = \gamma_1^2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha_2^2} - \frac{1}{r'^2}.$$

Заключение

Построены уравнения частного случая движения изотропной моментной круговой цилиндрической оболочки постоянной толщины – плоского движения. Для моментной среды поставленная задача решена впервые, и построенная модель может быть использована при прочностных расчетах цилиндрических элементов конструкций, выполненных из материалов с микроструктурными эффектами. Полученная модель содержит шесть уравнений относительно шести неизвестных. Для проведения расчетов создан безразмерный аналог построенной модели. В известных авторам публикациях подобные уравнения отсутствуют.

Список литературы

1. Новацкий В. *Теория упругости*. М.: Мир, 1975. 872 с.
2. Герасимов С.И., Ерофеев В.И., Солдатов И.Н. *Волновые процессы в сплошных средах*. Саров: Изд-во РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2012. 260 с.
3. Bagdoev A.G., Erofeyev V.I., Shekoyan A.V. *Wave Dynamics of Generalized Continua*. Berlin–Heidelberg: Springer, 2016. 274 p.
4. Palmov W.W., Altenbach H. Uber eine Cosseratsche Theorie fur elastische Platen. *Technische Mechanik*. 1982. Vol. 3. No 3. P. 5–9.
5. Altenbach H., Eremeyev V. On the linear theory of micropolar plates. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2009. Vol. 89. No 4. P. 242–256. DOI: 10.1002/zamm.200800207.
6. Hoffman O. On the bending of thin elastic plates in the presence of moment stresses. *Journal of Applied Mechanics*. 1964. Vol. 31. No 4. P. 706–707.
7. Амбарцумян С.А. Температурная задача микрополярной пластинки. *Изв. вузов. Северо-Кавказский регион. Сер.: Естественные науки*. 2000. №3. С. 17–20.
8. Sargsyan S.H. On some interior and boundary effects in thin plates based on the asymmetric theory of elasticity. *Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics*. 2004. Vol. 16. P. 201–210. DOI: 10.1007/978-3-540-39905-6_24.
9. Саркисян С.О. Общие модели микрополярных упругих тонких пластин. *Вестник ПНИПУ. Механика*. 2008. №16. С. 111–120.
10. Green A.E., Naghdi P.M. The linear elastic cosserat surface and shell theory. *International Journal of Solids and Structures*. 1968. Vol. 4. Iss. 6. P. 585–592.
11. Бабич Д.В. Основные уравнения движения оболочки с учетом несимметричности тензора напряжений. *Прикладная механика*. 1966. Т. 2. Вып. 12. С. 41–48.
12. Ванин Г.А. Моментная механика тонких оболочек. *Изв. РАН. МТТ*. 2004. №4. С. 116–128.
13. Birsan M. The solution of Saint-Venant's problem in the theory of Cosserat shells. *Journal of Elasticity*. 2004. Vol. 74. P. 185–214.
14. Birsan M. Several results in the dynamic theory of thermoelastic Cosserat shells with voids. *Mechanics Research Communications*. 2006. Vol. 33. No 2. P. 157–176. DOI: 10.1016/j.mechrescom.2005.08.008.
15. Birsan M. Thermal stresses in cylindrical Cosserat elastic shells. *European Journal of Mechanics – A/Solids*. 2009. Vol. 28. Iss. 1. P. 94–101. DOI: 10.1016/j.euromechsol.2008.03.001.
16. Амбарцумян С.А. Задача несимметричной термоупругости весьма пологой оболочки. *Изв. НАН РА. Механика*. 2002. №3. С. 20–33.
17. Birsan M. On the theory of loaded general cylindrical Cosserat elastic shells. *International Journal of Solids and Structures*. 2007. Vol. 44. No 22–23. P. 7399–7419. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2007.04.016.

18. Sargsyan S.H. Mathematical model of micropolar termo-elasticity of thin shells. *Journal of Thermal Stresses*. 2013. Vol. 36. No 11. P. 1200–1216. DOI: 10.1080/01495739.2013.819265.
19. Саркисян С.О. Общая динамическая теория микрополярных упругих тонких оболочек. *Докл. АН*. 2011. Т. 436. №2. С. 195–198.
20. Quoc Chien Mai, Ryazantseva M.Yu., Tarlakovskii D.V. Generalized linear model of dynamics of elastic moment shells. Deformation and destruction of materials and structures under quasi-static and impulse loading. *Part of the Book Series: Advanced Structured Materials*. Vol. 186. Springer Nature Switzerland AG. 2020. P. 159–172.
21. Тарлаковский Д.В., Фарманян А.Ж. Начально-краевые задачи для моментных упругих круговых цилиндрических оболочек. *Вестник Московского университета. Серия I: Математика. Механика*. 2025. №4. С. 36–43. DOI: 10.55959/MSU0579-9368-1-66-4-5.
22. Ryazantseva M.Yu., Tarlakovskii D.V., Farmanyan A.Jh. Equations of axisymmetrical and plane motion of moment elastic circular cylindrical shells. *AIP Conference Proceeding*. 2025. Vol. 3177. Iss. 1. P. 136–146. <https://doi.org/10.1063/5.0295608>.
23. Ерофеев В.И. *Волновые процессы в твердых телах с микроструктурой*. М.: Изд-во МГУ, 1999. 328 с.
24. Горшков А.Г., Медведский А.Л., Рабинский Л.Н., Тарлаковский Д.В. *Волны в сплошных средах*. М.: Физматлит, 2004. 472 с.

References

1. Novatskiy V. *Teoriya uprugosti [Theory of Elasticity]*. Moscow. Mir Publ. 1975. 872 p. (In Russian).
2. Gerasimov S.I., Erofeev V.I., Soldatov I.N. *Volnovye protsessy v sploshnykh sredakh [Wave Processes in Continuous Media]*. Sarov. RFYaTs–VNIIEF Publ. 2012. 260 p. (In Russian).
3. Bagdoev A.G., Erofeev V.I., Shekoyan A.V. *Wave Dynamics of Generalized Continua*. Berlin. Heidelberg. Springer. 2016. 274 p.
4. Palmov W.W., Altenbach H. Uber eine Cosseratsche Theorie fur elastische Platen. *Technische Mechanik*. 1982. Vol. 3. No 3. P. 5–9.
5. Altenbach H., Eremeyev V. On the linear theory of micropolar plates. *J. Appl. Math. Mech*. 2009. Vol. 89. No 4. P. 242–256. DOI: 10.1002/zamm.200800207.
6. Hoffman O. On the bending of thin elastic plates in the presence of moment stresses. *Journal of Applied Mechanics*. 1964. Vol. 31. No 4. P. 706–707.
7. Ambartsumyan S.A. Temperaturnaya zadacha mikropolyarnoy plastinki [The temperature problem of a micropolar plate]. *Izvestiya vuzov. Severo-Kavkazskiy region. Seriya: Estestvennye nauki [Bulletin of Higher Education Institutes North Caucasus Region. Natural Sciences]*. 2000. No 3. P. 17–20 (In Russian).
8. Sargsyan S.H. On some interior and boundary effects in thin plates based on the asymmetric theory of elasticity. *Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics*. 2004. Vol. 16. P. 201–210. DOI: 10.1007/978-3-540-39905-6_24.
9. Sarkisyan S.O. Obshchie modeli mikropolyarnykh uprugikh tonkikh plastin [General models of micropolar elastic thin plates]. *Vestnik Permskogo natsionalnogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mekhanika [PNRPU Mechanics Bulletin]*. 2008. No 16. P. 111–120 (In Russian).
10. Green A.E., Naghdi P.M. The linear elastic cosserat surface and shell theory. *Int. J. Solids Struct*. 1968. Vol. 4. Iss. 6. P. 585–592.
11. Babich D.V. Osnovnye uravneniya dvizheniya obolochki s uchetom nesimmetrichnosti tenzora napryazheniy [Basic equations of motion of the shell taking into account the asymmetry of the stress tensor]. *Prikladnaya mekhanika [Applied Mechanics]*. 1966. Vol. 2. Iss. 12. P. 41–48 (In Russian).
12. Vanin G.A. Momentnaya mekhanika tonkikh obolochek [Moment mechanics of thin shells]. *Izvestiya. RAN. Mekhanika tverdogo tela [Mechanics of Solids]*. 2004. No 4. P. 116–128 (In Russian).
13. Birsan M. The solution of Saint-Venant's problem in the theory of Cosserat shells. *J. Elast*. 2004. Vol. 74. P. 185–214.

14. Birsan M. Several results in the dynamic theory of thermoelastic Cosserat shells with voids. *Mech. Res. Commun.* 2006. Vol. 33. No 2. P. 157–176. DOI: 10.1016/j.mechrescom.2005.08.008.
15. Birsan M. Thermal stresses in cylindrical Cosserat elastic shells. *Eur. J. Mech. A Solids*. 2009. Vol. 28. Iss.1. P. 94–101. DOI: 10.1016/j.euromechsol.2008.03.001.
16. Ambartsumyan S.A. Zadacha nesimmetrichnoy termouprugosti vesma pologoy obolochki [The problem of asymmetric thermoelasticity of a very shallow shell]. *Izvestiya Natsionalnoy Akademii nauk Respubliki Armeniya. Mekhanika* [Mechanics – Proceedings of National Academy of Sciences of Armenia]. 2002. No 3. P. 20–33 (In Russian).
17. Birsan M. On the theory of loaded general cylindrical Cosserat elastic shells. *Int. J. Solids Struct.* 2007. Vol. 44. No 22-23. P. 7399–7419. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2007.04.016.
18. Sargsyan S.H. Mathematical model of micropolar termo-elasticity of thin shells. *J. Therm. Stresses*. 2013. Vol. 36. No 11. P. 1200–1216. DOI: 10.1080/01495739.2013.819265.
19. Sarkisyan S.O. Obshchaya dinamicheskaya teoriya mikropolyarnykh uprugikh tonkikh obolochek [The general dynamic theory of micropolar elastic thin shells]. *Doklady Akademii nauk* [Doklady Physics]. 2011. Vol. 56. No 1. P. 39–42 (In Russian).
20. Quoc Chien Mai, Ryazantseva M.Yu., Tarlakovskii D.V. Generalized linear model of dynamics of elastic moment shells. Deformation and destruction of materials and structures under quasi-static and impulse loading. *Part of the Book Series: Advanced Structured Materials*. Vol. 186. Springer Nature Switzerland AG. 2020. P. 159–172.
21. Tarlakovskii D.V., Farmanyan A.Zh. Nachalno-kraevye zadachi dlya momentnykh uprugikh krugovykh tsilindricheskikh obolochek [Initial-boundary problems for couple stress elastic circular cylindrical shells]. *Vestnik Moskovskogo universiteta. Seriya 1: Matematika. Mekhanika* [Moscow University Mechanics Bulletin]. 2025. Vol. 80. No 4. P. 143–151 (In Russian).
22. Ryazantseva M.Yu., Tarlakovskii D.V., Farmanyan A.Jh. Equations of axisymmetrical and plane motion of moment elastic circular cylindrical shells. *AIP Conference Proceeding*. 2025. Vol. 3177. Iss. 1. P. 136–146. <https://doi.org/10.1063/5.0295608>.
23. Erofeev V.I. *Volnovye protsessy v tverdykh telakh s mikrostrukturay* [Wave Processes in Solids with Microstructure]. Moscow. MGU Publ. 1999. 328 p. (In Russian).
24. Gorshkov A.G., Medvedskiy A.L., Rabinskiy L.N., Tarlakovskii D.V. *Volny v sploshnykh sredakh* [Waves in Continuous Media]. Moscow. Fizmatlit Publ. 2004. 472 p. (In Russian).

EQUATIONS OF PLANE MOTION FOR CIRCULAR ELASTIC MOMENT CYLINDRICAL SHELLS*

Tarlakovskii D.V., Ryazantseva M.Yu., Farmanyan A.Zh.

Lomonosov Moscow State University, Institute of Mechanics, Moscow, Russian Federation

tdvhome@mail.ru, m-rznt@yandex.ru, anafarmanyan@mail.ru

Received by the Editor 2026/05/13

The equations in the framework of the planar formulation of the problem for circular cylindrical shells are obtained on the basis of a previously formulated model of the dynamics of a thin isotropic circular momentary cylindrical shell of constant thickness.

When switching to a flat model, all the desired values are considered as functions of only the angular coordinate; their dependence on the spatial coordinate along the axis of the cylinder is eliminated; in this case, the deformation state is assumed to be the same in all planes perpendicular to the axis of the cylinder. Additional kinematic constraints are imposed on the displacement and rotation fields to ensure the correctness of the flat formulation of the problem.

*The study was carried out within the framework of the Lomonosov Moscow State University State Assignment, 2021–2028, No ЦИТИС 121033000073-2.

These limitations lead to the vanishing of a number of kinematic quantities, and similar external load requirements are required to fulfill these identities.

The result of the analytical conclusion was a closed system of six differential equations of motion, presented in operator form. The system is designed with respect to six unknown kinematic parameters – displacements and rotation angles.

The conducted studies demonstrate that the spectrum of possible wave processes in a momentarily elastic medium during the plane motion of an isotropic angular circular cylindrical shell includes three types of waves: an expansion wave, a shear wave, and a rotation wave.

The assumption of symmetry of the cutting force vectors makes it possible to exclude a number of terms in the initial equations of motion. As a result, the system of six equations is reduced to three, which coincide with the equations of motion of the Timoshenko-type shell, which demonstrates the continuity of the considered formulation with the classical theory of transverse shear accounting.

When solving specific dynamic problems of deformation of elastic circular momentary cylindrical shells within the framework of the model of plane motion, it is advisable to give a dimensionless analogue of the constructed dynamic model.

Keywords: isotropic thin elastic cylindrical shell, micro-polar medium (Cossera medium), equations of motion in force and kinematic parameters, plane problem.