

УДК 539.4+539.37

DOI: 10.32326/1814-9146-2026-88-3-50-66

## **НЕСУЩАЯ СПОСОБНОСТЬ ЖЕСТКОПЛАСТИЧЕСКИХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ПЛАСТИН СО СВОБОДНЫМИ УЧАСТКАМИ КОНТУРА\***

© 2026 г.

**Романова Т.П.**

*Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича  
СО РАН, Новосибирск, Российская Федерация*

romanova@itam.nsc.ru

*Поступила в редакцию 13.05.2026*

В рамках модели идеального жесткопластического тела определена несущая способность слоистых эллиптических пластин с нерегулярным креплением контура. Часть контура является свободной, а его закрепленная часть шарнирно оперта или защемлена. Рассмотрен вариант расположения свободного участка около точек минимального радиуса эллипса. Действует нагрузка, равномерно распределенная по поверхности пластин. На незакрепленной части контура скорости прогибов пластины не известны. Решения подобных задач за пределом упругости в литературе не найдены. Показано, что существуют разные механизмы предельного деформирования в зависимости от размера свободной части контура и места ее расположения на контуре, также от соотношения полуосей эллипса. При всех схемах пластины деформируются в виде нескольких линейчатых поверхностей (конусообразных или плоских жестких областей), разделенных пластическими шарнирами с нормальным изгибающим моментом, равным предельному значению. Для построения решения введена криволинейная ортогональная система координат, связанная с контуром эллипса. Определяющие соотношения получены на основе принципа виртуальной мощности. Найдены простые аналитические выражения для предельных нагрузок. При анализе несущей способности эллиптической пластины выбрана схема, которой соответствует меньшая предельная нагрузка. Решение модифицировано на случай пластин с двумя участками свободного контура. Показано, что при одинаковой суммарной длине свободных участков предельная нагрузка в случае двух участков больше, чем в случае одного участка. Приведены численные примеры. Показано, что при увеличении свободного участка контура предельная нагрузка уменьшается. В частных случаях выполнено сравнение предельных нагрузок с известными другими решениями. Это сравнение показывает полное совпадение результатов.

*Ключевые слова:* жесткопластическая модель, слоистая пластина, эллиптическая пластина, комбинированное крепление, свободный контур, предельная нагрузка.

---

\* Выполнено в рамках государственного задания (№ госрегистрации 124021400036-7).

## **Введение**

В инженерных приложениях форма и способы крепления элементов конструкций имеют практическое значение. Проектируемые элементы могут быть с разными граничными условиями: свободный край, защемление или шарнирное опирание, упругая заделка, комбинированные граничные условия. Смешанные условия на контуре могут быть конструктивными особенностями. При эксплуатации вследствие природных или техногенных условий (появление коррозионных или усталостных трещин, разрушение части опорного контура и т.п.) возможно появление нерегулярного крепления там, где это первоначально не предполагалось.

Большинство исследований плоских элементов конструкций с комбинированными граничными условиями ограничивается рассмотрением линейно-упругого или вязкоупругого поведения круглых, эллиптических, квадратных и прямоугольных пластин и панелей [1–9]. Расчет таких пластин за пределами упругого поведения выполнен в основном для полигональных пластин [10–17]. Предельное поведение круглых пластин и пластин с криволинейным контуром со свободными участками контура при действии сосредоточенной нагрузки рассмотрено в [18]. В [19] оценена несущая способность квадратных и круглых шарнирно опертых пластин со свободными участками контура в случае равномерно распределенной нагрузки. В [20, 21] моделируется предельное и динамическое поведение жесткопластических слоистых круглых и кольцевых армированных пластин со свободными участками контура под действием взрывных нагрузок. Исследования несущей способности защемленных или шарнирно опертых эллиптических пластин со свободными участками контура в литературе не известны.

Анализ предельного поведения разнообразных элементов конструкций под действием нагрузок высокой интенсивности позволяет предсказать возможные сценарии разрушения и разработать эффективные меры защиты. Эллиптические пластины широко используются в машиностроении в качестве заглушек и защитных элементов. Расчеты элементов при высокоинтенсивном воздействии можно выполнить на основе модели жесткопластического тела. В этой модели тело начинает деформироваться только тогда, когда нагрузка достигает предельного значения. Жесткопластическая модель является одной из простейших, при этом она позволяет быстро и качественно верно оценить особенности деформации в сложных задачах. Она успешно используется для предельного и динамического моделирования разнообразных полигональных однородных и железобетонных плит, круглых и криволинейных пластин [11, 12, 14–16, 18–20, 22–26] и также для композитных конструкций [21, 27]. В случае изгиба тонкостенных элементов область применения модели ограничена малыми прогибами.

В предлагаемой статье аналитически исследована несущая способность равномерно нагруженных жесткопластических слоистых эллиптических тонких шарнирно опертых или защемленных пластин со свободными участками контура. Рассматриваемые механизмы деформирования эллиптических пластин предложены и анализируются впервые.

### **1. Постановка задачи, основные предположения и геометрические соотношения**

Рассмотрим тонкую идеальную жесткопластическую пластину Кирхгофа с эллиптическим контуром, шарнирно опертым или защемленным. На контуре есть свободный

участок (например, дуга  $AB_1A'$  на рис. 1). На пластину действует нагрузка  $P$ , равномерно распределенная по поверхности. Влиянием мембранных сил и вертикальных сдвигов в условии пластичности и геометрическими изменениями пренебрегаем.

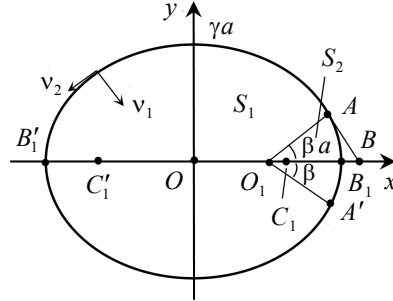


Рис. 1. Эллиптическая пластина со свободной дугой  $AB_1A'$ , схема деформирования 1

Пусть контур пластины задан в параметрической форме:

$$x = x_1(\varphi) = a \cos \varphi, \quad y = y_1(\varphi) = \gamma a \sin \varphi \quad (\gamma \leq 1, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi).$$

Радиус кривизны эллипса:

$$R(\varphi) = B^3(\varphi)/(\gamma a^2), \quad B(\varphi) = \sqrt{(\partial x_1/\partial \varphi)^2 + (\partial y_1/\partial \varphi)^2} = a\sqrt{\sin^2 \varphi + \gamma^2 \cos^2 \varphi}.$$

Введем криволинейную ортогональную систему координат  $(v_1, v_2)$ , связанную с декартовой системой координат  $(x, y)$  соотношениями [26]:

$$x = a[1 - v_1\gamma/B(v_2)]\cos v_2, \quad y = a[\gamma - v_1/B(v_2)]\sin v_2, \quad (1)$$

Кривые  $v_1 = \text{const}$  находятся на расстоянии  $v_1$  от контура эллипса внутри пластины (см. рис. 1) и имеют радиус кривизны  $r_1 = R(v_2) - v_1$ . Прямые линии  $v_2 = \text{const}$  перпендикулярны контуру (радиус кривизны  $r_2 = \infty$ ). Тогда уравнение эллипса имеет вид:  $v_1 = 0, 0 \leq v_2 \leq 2\pi$ . Элемент площади в координатах  $(v_1, v_2)$  равен  $ds = B(v_2) \times (1 - v_1/R)dv_1dv_2$ . Угол  $\psi$  между направлением  $v_1$  и осью  $Ox$  равен [26]:

$$\psi = -\arctg[(\partial x_1/\partial v_2)/(\partial y_1/\partial v_2)] = \arctg[(\tg v_2)/\gamma]. \quad (2)$$

Расстояние от контура эллипса до оси  $Ox$  по нормали к контуру [26]:

$$D_c(v_2) = \gamma B(v_2), \quad \min_{0 \leq v_2 \leq \pi} D_c(v_2) = \gamma^2 a. \quad (3)$$

Все перпендикуляры, опущенные из точек эллипса на ось  $Ox$  по нормали к контуру, попадают в интервал  $C_1C_1'$  на рис. 1, где  $|B_1C_1| = |B_1'C_1'| = \gamma^2 a$ .

Считаем, что нормаль  $AO_1$  из точки  $A$  на ось  $Ox$  образует с осью  $Ox$  угол  $\beta$  ( $0 \leq \beta < \pi/2$ ). На  $AO_1$  координата  $v_2$  равна  $v_\beta$  ( $0 \leq v_\beta < \pi/2$ ), и из (2) следует, что

$$v_\beta = \arctg(\gamma \tg \beta). \quad (4)$$

Для неосесимметричной пластины предельная нагрузка зависит от места расположения свободного участка на контуре. Для определенности в статье будет рассмотрен вариант, когда этот участок находится около точки  $v_1 = 0, v_2 = 0$ : пластина закреплена по контуру при  $v_\beta \leq v_2 \leq 2\pi - v_\beta$ , а при  $-v_\beta \leq v_2 \leq v_\beta$  контур свободный.

Пластина толщиной  $2H$  состоит из  $2m$  слоев, расположенных симметрично относительно срединной поверхности. Предельные нормальные и касательные изгибающие моменты (погонные) записываются так:

$$M_0 = \sum_{k=1}^m \sigma_{0k} (h_k^2 - h_{k-1}^2),$$

где  $\sigma_{0k}$  – предел текучести материала в  $k$ -м слое,  $h_k$  – координаты раздела слоев,  $h_0 = 0$ ,  $h_m = H$ .

Граничные условия имеют вид:

$$-v_\beta \leq v_2 \leq v_\beta : M_1(0, v_2) = Q_1(0, v_2) + \frac{\partial M_{12}}{\partial v_2}(0, v_2) = 0, \quad (5)$$

$$v_\beta \leq v_2 \leq 2\pi - v_\beta : u(0, v_2) = 0, \quad M_1(0, v_2) = (1 - \eta)M_0,$$

где  $M_1(v_1, v_2)$  – нормальный изгибающий момент;  $Q_1$  – поперечная сила;  $M_{12}$  – крутящий момент (индекс 1 относится к координате  $v_1$  и индекс 2 – к  $v_2$ );  $u(v_1, v_2)$  – скорость прогибов пластины;  $\eta = 0$  при защемлении опорного участка контура и  $\eta = 1$  при его шарнирном опирании. При жесткопластическом анализе, если около свободного контура расположены две жесткие области, разделенные пластическим шарниром, для выполнения (5) необходимо, чтобы шарнир был перпендикулярен свободному контуру.

Предельная нагрузка эллиптической пластины со свободными участками контура будет определена на основе кинематического решения, разработанного в [20, 25]. Предельная нагрузка  $P_0$  для эллипса без свободных участков, полученная на базе [25], записывается в виде:

$$P_0 = \frac{6M_0(2 - \eta)}{a^2\gamma^2 \left\{ \left[ 3 \int_0^{\pi/2} B^3(v_2) dv_2 \right] / \left[ a^2 \int_0^{\pi/2} B(v_2) dv_2 \right] - 2\gamma^2 \right\}}. \quad (6)$$

Ранее в [26] для закрепленной эллиптической пластины при кинематически допустимом поле скоростей, отличном от рассмотренного в [26], была получена предельная нагрузка  $P_a$ :

$$P_a = \frac{12M_0(2 - \eta)}{a^2\gamma^2(3 - \gamma^2)}. \quad (7)$$

В [28] для эллиптической пластины, шарнирно опертой по всему контуру, приближенная предельная нагрузка  $P_b$  вычислена на основе статического решения:

$$P_b = 6M_0 / r_0^2, \quad r_0 = a\gamma \left( \sqrt{3 + \gamma^2} - 1 \right). \quad (8)$$

Предельная нагрузка  $P_0$  (6) при всех  $\gamma < 1$  и при одинаковом креплении контура меньше нагрузок  $P_a$  (7) и  $P_b$  (8), причем  $P_0|_{\eta=1} < P_a|_{\eta=1} < P_b$  и  $P_0|_{\eta=0} < P_a|_{\eta=0}$ .

Далее рассматриваются различные возможные схемы предельного деформирования. При анализе несущей способности эллиптической пластины следует выбирать схему, которой соответствует меньшая предельная нагрузка.

## 2. Вычисление предельной нагрузки

**2.1.** Считаем, что в предельном состоянии вся область пластины является линейчатой поверхностью. Часть пластины поворачивается вокруг опорного контура  $AB_1A'$  (см. рис. 1) со скоростью угла поворота  $\alpha$ , как и в случае приближенного решения для криволинейных пластин [25]. При этом на линии  $C_1C_1'$  образуется пластический шарнир. Область пластины около свободного контура  $AA'$  переходит

в две симметричные плоские области, жестко вращающиеся вокруг линии  $O_1B_1$ , где также появляется пластический шарнир (см. рис. 1). Указанные две плоские области являются касательными к конусообразной области, имеющей закрепленный контур. Такую схему предельного деформирования назовем схемой 1. В силу симметрии рассматриваем половину пластины при  $0 \leq v_2 \leq \pi$ .

Обозначим через  $S_1$  и  $S_2$  закрепленную конусообразную и плоскую области,  $O_1A$  – граница между ними. Области  $S_1$  и  $S_2$  имеют внешние границы  $L_1$  и  $L_2$  соответственно. Прямая  $O_1A$  нормальна к контуру эллипса в точке  $A$  и образует с осью  $Ox$  угол  $\beta$ . На линии  $O_1A$  область  $S_2$  является касательной к области  $S_1$ . Следовательно, область  $S_2$  жестко вращается со скоростью поворота угла  $\alpha$  вокруг неподвижной прямой  $AB$ , нормальной к прямой  $O_1A$ . Прямая  $O_1B$  пересекает контур пластины в точке  $B_1$ .

При учете (3) области  $S_1$  и  $S_2$  определены так:

$$S_1: v_\beta \leq v_2 \leq \pi, \quad 0 \leq v_1 \leq \gamma B(v_2),$$

$$S_2: 0 \leq v_2 \leq v_\beta, \quad 0 \leq v_1 \leq \gamma B(v_2).$$

Скорости прогибов пластины  $u$  в областях :

$$(v_1, v_2) \in S_1: u(v_1, v_2) = \alpha v_1, \quad (9)$$

$$(v_1, v_2) \in S_2: u(v_1, v_2) = \alpha \bar{d}(v_1, v_2), \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \bar{d}(v_1, v_2) = & \gamma B(v_\beta) + a(1 - \gamma^2) \cos \beta \cos v_\beta - a \cos \beta \cos v_2 [1 - \gamma v_1 / B(v_2)] - \\ & - a \sin \beta \sin v_2 [\gamma - v_1 / B(v_2)]. \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь  $\bar{d}(v_1, v_2)$  – расстояние от точки  $(v_1, v_2) \in S_2$  до прямой  $AB$ . На линии  $O_1A$  координата  $v_2$  равна  $v_\beta$  (4). Скорости прогибов пластины вдоль диаметра  $B'_1OB_1$  (см. рис.1) приведены на рис. 2.

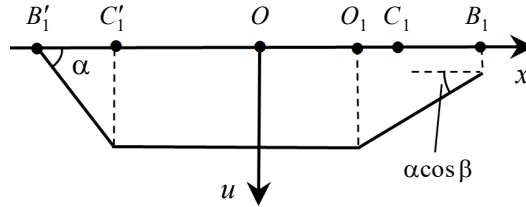


Рис. 2. Скорости прогибов пластины вдоль диаметра  $B'_1OB_1$  при схеме 1

Главные кривизны поверхности скоростей прогибов в области  $S_1$  таковы:

$$\kappa_1 = -\frac{\partial^2 u}{\partial v_1^2} = 0, \quad \kappa_2 = -\frac{1}{r_1} \frac{\partial u}{\partial v_1} = \frac{\alpha}{R(v_2) - v_1}. \quad (12)$$

Предельную нагрузку найдем из принципа виртуальной мощности:

$$A = N, \quad A = \iint_S P u^* ds, \quad (13)$$

$$N = \sum_z \int_{l_z} M_z [\theta^*]_{l_z} dl_z + M_0 \iint_S (|\kappa_1^*| + |\kappa_2^*|) ds. \quad (14)$$

Здесь  $A$  и  $N$  – мощности внешних и внутренних сил;  $S$  и  $ds$  – площадь и элемент площади;  $[\theta^*]_{l_z}$ ,  $M_z$  и  $z$  – разрыв угловой скорости, нормальный изгибающий момент

на линии разрыва скоростей  $L_2$  и их количество. Кинематически допустимые величины помечены символом  $*$ .

Выражение для  $A$  с учетом (9), (10) имеет вид:

$$A = P\alpha^* \iint_{S_1} v_1 ds + P\alpha^* \iint_{S_1} \bar{d}(v_1, v_2) ds = P\alpha^* \left\{ \int_{v_\beta}^{\pi} \int_0^{\gamma B(v_2)} v_1 B(v_2) [1 - \gamma a^2 v_1 / B^3(v_2)] dv_1 dv_2 + \int_0^{v_\beta} \int_0^{\gamma B(v_2)} \bar{d}(v_1, v_2) B(v_2) [1 - \gamma a^2 v_1 / B^3(v_2)] dv_1 dv_2 \right\}. \quad (15)$$

Мощность внутренних сил (14) равна сумме мощностей на линиях  $L_1$ ,  $C'_1 O_1$ ,  $O_1 B_1$  и в области  $S_1$ . Тогда при учете (5) и (12) получим

$$\frac{N}{M_0} = (1 - \eta) \int_{L_1} [\theta^*]_{L_1} dl_{L_1} + \iint_{S_1} \frac{1}{R(v_2) - v_1} \alpha^* ds + \int_{OO_1} [\theta^*]_{OO_1} dl_{OO_1} + \int_{O_1 B_1} [\theta^*]_{O_1 B_1} dl_{O_1 B_1}. \quad (16)$$

Разрывы угловых скоростей на линиях  $L_1$  и  $O_1 B_1$  равны

$$[\theta^*]_{L_1} = \alpha^*, \quad [\theta^*]_{O_1 B_1} = \alpha^* \sin \beta.$$

Разрывы угловых скоростей на линии  $C'_1 O_1$  и в области  $S_1$  определяются, как в [25]. Тогда

$$(1 - \eta) \int_{L_1} [\theta^*]_{L_1} dl_{L_1} + \iint_{S_1} \frac{1}{R(v_2) - v_1} \alpha^* ds + \int_{C'_1 O_1} [\theta^*]_{C'_1 O_1} dl_{C'_1 O_1} = \alpha^* (2 - \eta) \int_{v_\beta}^{\pi} B(v_2) dv_2.$$

Поскольку  $|AO_1| = D_c(v_\beta) = \gamma B(v_\beta)$  и  $|OO_1| = x|_{v_1 = \gamma B(v_\beta); v_2 = v_\beta}$ , то из (1) следует

$$|O_1 B_1| = a - |OO_1| = a[1 - (1 - \gamma^2) \cos v_\beta], \quad (17)$$

поэтому мощность внутренних сил половины пластины (16) равна:

$$N = \alpha^* M_0 \left\{ (2 - \eta) \int_{v_\beta}^{\pi} B(v_2) dv_2 + a \sin \beta [1 - (1 - \gamma^2) \cos v_\beta] \right\}. \quad (18)$$

Подставляя выражения (15) и (18) в (13) и учитывая, что  $\alpha^*$  – независимая величина, получим выражение для предельной нагрузки при схеме 1:

$$P_1 = 6M_0 \left\{ (2 - \eta) \int_{v_\beta}^{\pi} B(v_2) dv_2 + a \sin \beta [1 - (1 - \gamma^2) \cos v_\beta] \right\} \times \left\{ 3\gamma^2 \int_{v_\beta}^{\pi} B^3(v_2) dv_2 - 2\gamma^4 a^2 \int_{v_\beta}^{\pi} B(v_2) dv_2 + 6 \int_0^{v_\beta} \int_0^{\gamma B(v_2)} \bar{d}(v_1, v_2) B(v_2) [1 - \gamma a^2 v_1 / B^3(v_2)] dv_1 dv_2 \right\}^{-1}. \quad (19)$$

При  $\gamma = 1$  эллиптическая пластина становится круглой и предельная нагрузка (19) совпадает с полученной в [20]. При  $\beta = 0$  предельная нагрузка (19) совпадает с приближенным решением  $P_0$  (6) для эллиптической пластины без свободных участков контура [25].

На рис. 3 показана зависимость безразмерных предельных нагрузок  $p_1, p_0, p_a$  и  $p_b$  ( $p_j = P_j a^2 / M_0, j = 0, 1, a, b$ ) от параметра эллипса  $\gamma$ . Линии 1–4 рассчитаны в случае шарнирного опирания  $\eta = 1$ . Кривые с символом \* получены для тех же вариантов, что и без \*, но в случае защемления контура  $\eta = 0$ . Кривые 1 и 1\* изображают  $p_1$  при  $\beta = 0$ , при этом  $p_1 = p_0$  (см. (6), (19)). Линии 2 и 3 показывают нагрузки  $p_a$  и  $p_b$  (см. (7) и (8)). Линии 4 и 4\* относятся к нагрузке  $p_1$  при  $\beta = 0,8$ . Кривая 5\* получена при  $\beta = 0,5$ ; соответствующая ей линия 5 не приведена на графике. Она находится между кривыми 1 и 4.

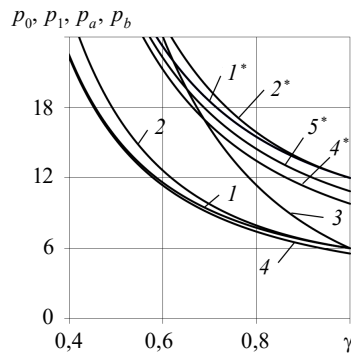


Рис. 3. Безразмерные предельные нагрузки  $p_1, p_0, p_a$  и  $p_b$  в зависимости от параметра эллипса  $\gamma$

На рис. 4 изображена безразмерная нагрузка  $p_1$  в зависимости от размера свободной части контура  $\beta$ . На рис. 4а линии 1 и 2 получены в случае  $\gamma = 1$  (окружность) при  $\eta = 1$  и  $\eta = 0$  соответственно. Кривые 1а и 2а получены для  $\gamma = 0,8$  при  $\eta = 1$  и  $\eta = 0$ . На рис. 4б линии 1 и 2 получены в случае  $\gamma = 0,6$  при  $\eta = 1$  и  $\eta = 0$  соответственно. Кривые 1с и 2с получены для  $\gamma = 0,5$  при  $\eta = 1$  и  $\eta = 0$ .

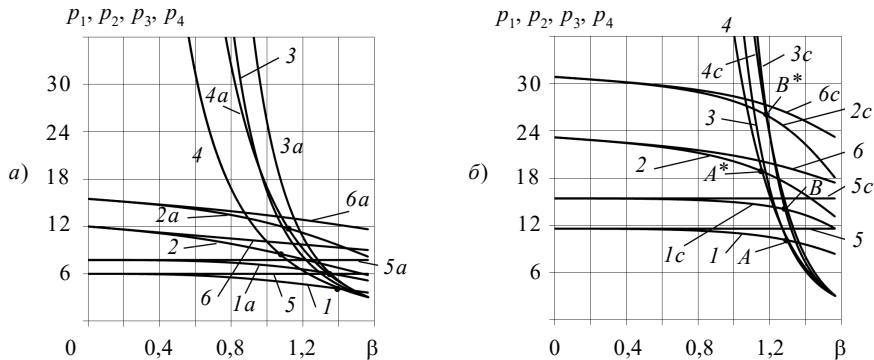


Рис. 4. Безразмерные предельные нагрузки  $p_1, p_2, p_3, p_4$  в зависимости от угла  $\beta$ : а)  $\gamma = 1$  и  $\gamma = 0,8$ ; б)  $\gamma = 0,6$  и  $\gamma = 0,5$

Из рис. 3 и 4 видно, что предельная нагрузка  $p_1$  увеличивается при уменьшении  $\gamma$ . При увеличении угла  $\beta$  предельная нагрузка уменьшается. Из рис. 3 видно, что при уменьшении  $\gamma$  сближаются линии 1 и 4, а также линии 1\*, 4\* и 5\*, то есть влияние угла  $\beta$  на предельную нагрузку снижается. Из сравнения линий для  $\eta = 1$  и  $\eta = 0$  на рис. 4а и 4б следует, что свободные участки контура сильнее влияют на предельную нагрузку при защемлении контура, чем при его шарнирном опирании.

На области  $AB_1A'O'$  расположим декартову систему координат  $(x_2, y_2)$  с центром в точке  $O'$  (ось  $Ax_2$  направлена по  $O'B_1$  и ось  $Ay_2$  направлена по  $O'A$ ). В этом случае скорости прогибов  $u(x_2, y_2) = \alpha_2 x_2$ .

$$0 \leq x_2 \leq \Omega, \quad 0 \leq y_2 \leq \gamma \sqrt{a^2 - (x_2 + a - \Omega)^2},$$

$$\Omega = a - a \cos v_\beta (1 - \gamma^2) - \gamma B(v_\beta) \cos \beta.$$
$$N = \alpha_2^* M_0 |AO'| = \alpha_2^* M_0 \gamma B(v_\beta) \sin \beta,$$

$$P_2 = \frac{M_0 B(v_\beta) \sin \beta}{\int_0^\Omega x_2 \sqrt{a^2 - (x_2 + a - \Omega)^2} dx_2}. \quad (20)$$

$$(x_3, y_3) \in S_3 : u(x_3, y_3) = \alpha_3 y_3,$$

57

$$N = \alpha_3^* M_0 (|AO'| + |B_1 O_1| \cos \beta) = \alpha_3^* M_0 \{ \gamma B(v_\beta) + a \cos \beta [1 - (1 - \gamma^2) \cos v_\beta] \},$$

$$A = P_3 \alpha_3^* \iint_{S_2} y_3 dx_3 dy_3 = P_3 \alpha_3^* \int_0^{v_\beta} \int_0^{\gamma B(v_\beta)} y_3(v_1, v_2) B(v_2) \left[ 1 - \frac{\gamma a^2 v_1}{B^3(v_2)} \right] dv_1 dv_2.$$

Из (13) следует, что соответствующая предельная нагрузка  $P_3$  имеет вид:

$$P_3 = M_0 \frac{\gamma B(v_\beta) + a \cos \beta [1 - (1 - \gamma^2) \cos v_\beta]}{\int_0^{v_\beta} \int_0^{\gamma B(v_\beta)} y_3(v_1, v_2) B(v_2) [1 - \gamma a^2 v_1 / B^3(v_2)] dv_1 dv_2}. \quad (21)$$

Предельные нагрузки  $P_2$  и  $P_3$  не зависят от параметра крепления  $\eta$ .

Численное сравнение нагрузок  $P_1$ ,  $P_2$  и  $P_3$  показало, что схемы 2 и 3 возможны при больших размерах угла  $\beta$ . На рис. 4а линии 3 и 4 изображают  $p_2$  и  $p_3$  для  $\gamma = 1$ ; кривые 3а и 4а соответствуют  $p_2$  и  $p_3$  для  $\gamma = 0,8$ . На рис. 4б линии 3 и 4 показывают  $p_2$  и  $p_3$  для  $\gamma = 0,6$ ; кривые 3с и 4с изображают  $p_2$  и  $p_3$  для  $\gamma = 0,5$ .

На рис. 4а крупными точками обозначены места пересечений линий 1, 2 (при  $\gamma = 1$ ) и 1а, 2а (при  $\gamma = 0,8$ ) с соответствующими линиями 4, 4а, когда схема 1 переходит в схему 3. Линии 3, 3а расположены выше линий 4, 4а, следовательно, для  $\gamma = 1$  и  $\gamma = 0,8$  схема 2 не реализуется.

Схема 2 возможна при больших значениях угла  $\beta$  и малых значениях параметра эллипса  $\gamma$ . На рис. 4б точкой А обозначено место пересечения кривых 1 и 3, а точкой А\* – пересечение кривых 2 и 4. Точкой В помечено пересечение линий 1с и 3с, а точкой В\* – пересечение кривых 2с и 3с. Таким образом, в случае  $\gamma = 0,6$  и  $\gamma = 0,5$  при шарнирном опирании ( $\eta = 1$ ) сначала реализуется схема 1, при увеличении  $\beta$  – схема 2. В случае защемления ( $\eta = 0$ ) при  $\gamma = 0,6$  и малых углах  $\beta$  реализуется схема 1, затем схема 3; при дальнейшем увеличении  $\beta$  – схема 2. При  $\gamma = 0,5$  и  $\eta = 0$  сначала реализуется схема 1, при увеличении  $\beta$  – схема 2, а схемы 3 не будет.

**2.4.** Рассмотрим возможную предельную схему 4, когда вся пластина деформируется так, что плоскость пластины поворачивается вокруг контура с одинаковой скоростью  $\alpha_4$  угла поворота (как в [25]). Скорости прогибов во всей пластине будут, как в (9):

$$u(v_1, v_2) = \alpha_4 v_1.$$

Для мощностей (13) и (14) с учетом (5) получим

$$\begin{aligned} N &= \alpha_4^* M_0 \left[ (2 - \eta) \int_{v_\beta}^{\pi} B(v_2) dv_2 + \int_0^{v_\beta} B(v_2) dv_2 \right], \\ A &= \alpha_4^* P_4 \iint_S v_1 ds = 2\alpha_4^* P_4 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\gamma B(v_2)} v_1 B(v_2) \left[ 1 - \frac{\gamma a^2 v_1}{B^3(v_2)} \right] dv_1 dv_2 = \\ &= \frac{\alpha_4^* P_4 \gamma^2}{3} \left[ 3 \int_0^{\pi/2} B^3(v_2) dv_2 - 2\gamma^2 a^2 \int_0^{\pi/2} B(v_2) dv_2 \right]. \end{aligned}$$

Тогда предельная нагрузка  $P_4$  будет

$$P_4 = 3 \frac{M_0}{\gamma^2} \left[ (2 - \eta) \int_{v_\beta}^{\pi} B(v_2) dv_2 + \int_0^{v_\beta} B(v_2) dv_2 \right] \times$$

$$\times \left[ 3 \int_0^{\pi/2} B^3(v_2) dv_2 - 2\gamma^2 a^2 \int_0^{\pi/2} B(v_2) dv_2 \right]^{-1}. \quad (22)$$

На рис. 4а безразмерная нагрузка  $p_4$  изображена линиями 5 и 6 в случае  $\gamma = 1$  для  $\eta = 1$  и  $\eta = 0$  соответственно. Кривые 5а и 6а относятся к варианту  $\gamma = 0,8$  при  $\eta = 1$  и  $\eta = 0$ . На рис. 4б нагрузка  $p_4$  изображена линиями 5 и 6 в случае  $\gamma = 0,6$  для  $\eta = 1$  и  $\eta = 0$ . Линии 5с и 6с получены в случае  $\gamma = 0,5$  для  $\eta = 1$  и  $\eta = 0$  соответственно. Видно, что все линии, изображающие нагрузку  $p_4$ , расположены выше соответствующих кривых, относящихся к нагрузке  $p_1$ . Следовательно,  $p_4 > p_1$  при  $\beta > 0$ , поэтому схема 4 не реализуется.

### 3. Эллиптическая пластина с двумя свободными участками

**3.1.** Предложенное решение можно распространить на случай, когда на контуре пластины находятся две одинаковые свободные дуги, расположенные симметрично около точек  $v_2 = 0$  и  $v_2 = \pi$ , с суммарным углом  $2\beta < 2\pi$ . Тогда в случае схемы, аналогичной схеме 1, рассматривая часть пластины при  $0 \leq v_2 \leq \pi/2$  и свободную дугу с углом  $\beta/2$ , для соответствующей предельной нагрузки  $P_{12}$  получим (см. (4), (11), (19)):

$$P_{12} = 6M_0 \left\{ (2 - \eta) \int_{v_{\beta 2}}^{\pi/2} B(v_2) dv_2 + a \sin(\beta/2) [1 - (1 - \gamma^2) \cos v_{\beta 2}] \right\} \times \\ \times \left\{ 3\gamma^2 \int_{v_{\beta 2}}^{\pi/2} B^3(v_2) dv_2 - 2\gamma^4 a^2 \int_{v_{\beta 2}}^{\pi/2} B(v_2) dv_2 + \right. \\ \left. + 6 \int_0^{v_{\beta 2}} \int_0^{\gamma B(v_2)} \bar{d}_2(v_1, v_2) B(v_2) [1 - \gamma a^2 v_1 / B^3(v_2)] dv_1 dv_2 \right\}^{-1}, \quad (23)$$

где обозначено

$$v_{\beta 2} = \arctg(\gamma \tg(\beta/2)), \quad (24)$$

$$\bar{d}_2(v_1, v_2) = \gamma B(v_{\beta 2}) + a(1 - \gamma^2) \cos(\beta/2) \cos v_{\beta 2} - a \cos(\beta/2) \cos v_2 [1 - \gamma v_1 / B(v_2) - \\ - a \sin(\beta/2) \sin v_2 [\gamma - v_1 / B(v_2)]].$$

**3.2.** В случае двух свободных участков контура возможны схемы типа 2 и 3, рассмотренные в пп. 2.2 и 2.3. Из (20) и (21) получим, что соответствующие предельные нагрузки  $P_{22}$  и  $P_{32}$  таковы:

$$P_{22} = \frac{M_0 B(v_{\beta 2}) \sin(\beta/2)}{\int_0^{\Omega_2} x_2 \sqrt{a^2 - (x_2 + a - \Omega_2)^2} dx_2}, \quad (25)$$

$$\Omega_2 = a - a \cos v_{\beta 2} (1 - \gamma^2) - \gamma B \cos(\beta/2),$$

$$P_{32} = M_0 \frac{\gamma B(v_{\beta 2}) + a \cos(\beta/2) [1 - (1 - \gamma^2) \cos v_{\beta 2}]}{\int_0^{v_{\beta 2}} \int_0^{\gamma B(v_{\beta 2})} y_{32}(v_1, v_2) B(v_2) [1 - \gamma a^2 v_1 / B^3(v_2)] dv_1 dv_2}, \quad (26)$$

$$y_{32}(v_1, v_2) = a \frac{v_1}{B(v_2)} [\sin v_2 \cos(\beta/2) - \gamma \cos v_2 \sin(\beta/2)] - \gamma \sin v_2 \cos(\beta/2) + \\ + \cos v_2 \sin(\beta/2) - (1 - \gamma^2) \sin(\beta/2) \cos v_{\beta 2},$$

где  $v_{\beta 2}$  определено в (24).

**3.3.** Также в случае двух симметричных свободных участков контура около точек  $v_2 = 0$  и  $v_2 = \pi$  возможна схема, когда внутри пластины образуются три шарнирных прямых  $AA_1$ ,  $B_1B'_1$  и  $A'A'_1$  (схема 5 на рис. 6). Области  $B'_1A_1AB_1$  и  $B'_1A'_1A'B_1$  жестко вращаются соответственно вокруг шарниров  $AA_1$  и  $A'A'_1$  со скоростью  $\alpha_5$  угла поворота. Остальная часть пластины не деформируется. Далее рассмотрим четверть пластины при  $0 \leq v_2 \leq \pi/2$ .

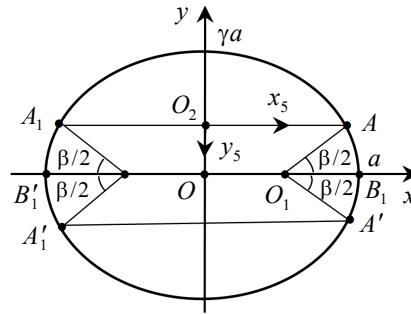


Рис. 6. Эллиптическая пластина с двумя свободными участками, схема 5

На области  $OO_2AB_1$  расположим декартову систему координат  $(x_5, y_5)$  с центром в точке  $O_2$  (см. рис. 6). Тогда область  $OO_2AB_1$  определится как

$$0 \leq x_5 \leq a\Sigma_2 : 0 \leq y_5 \leq a\Sigma_1,$$

$$a\Sigma_2 \leq x_5 \leq a : a \left[ \Sigma_1 - \gamma \sqrt{1 - (x_5/a)^2} \right] \leq y_5 \leq a\Sigma_1,$$

$$\Sigma_1 = [\gamma B(v_{\beta 2} \sin(\beta/2))/a, \quad \Sigma_2 = \cos v_{\beta 2} (1 - \gamma^2) + \gamma B(v_{\beta 2}) \cos(\beta/2)/a.$$

Скорости прогибов в  $OO_2AB_1$

$$u(x_5, y_5) = \alpha_5 y_5.$$

Для мощностей (13) и (14) получим

$$N = \alpha_5^* M_0 a (1 + \Sigma_2),$$

$$A = \alpha_5^* P_5 \iint_{OO_2AB_1} y_5 dx_5 dy_5 = \frac{\alpha_5^* P_5 a^3}{6} \times$$

$$\times \left[ 3\Sigma_2 \Sigma_1^2 + 3\gamma \Sigma_1 \left( \pi/2 - \arcsin \Sigma_2 - \Sigma_2 \sqrt{1 - \Sigma_1^2} \right) - \gamma^2 (1 - \Sigma_2)^2 (2 + \Sigma_2) \right].$$

Соответствующая предельная нагрузка  $P_5$  будет

$$P_5 = \frac{6M_0(1 + \Sigma_2)}{a^2 [3\Sigma_2 \Sigma_1^2 + 3\gamma \Sigma_1 (\pi/2 - \arcsin \Sigma_2 - \Sigma_2 \sqrt{1 - \Sigma_1^2}) - \gamma^2 (1 - \Sigma_2)^2 (2 + \Sigma_2)]}. \quad (27)$$

Численное сравнение нагрузок  $P_{12}$ ,  $P_{22}$ ,  $P_{32}$  и  $P_5$  показало, что для эллиптической пластины схема 5 и схемы типа 2 и 3 возможны при больших размерах угла  $\beta$ ,

при этом схемы типа 2 и 3 реализуются в случае малых значений параметра эллипса  $\gamma$ .

На рис. 7 изображены безразмерные предельные нагрузки  $p_1, p_{12}, p_{32}$  и  $p_5$ , рассчитанные по формулам (19), (23), (26), (27), в зависимости от угла  $\beta$ . На рис. 7а линии без буквенного символа относятся к варианту  $\gamma = 1$ ; кривые с буквой *a* – к случаю  $\gamma = 0,8$ . Кривые 1 и 2 изображают  $p_1$  для случая одного свободного участка при шарнирном опирании ( $\eta = 1$ ) и защемлении ( $\eta = 0$ ) соответственно. Линии 3 и 4 получены для  $p_{12}$  при шарнирном опирании и защемлении. Кривые 5 и 6 соответствуют нагрузкам  $p_{32}$  и  $p_5$ .

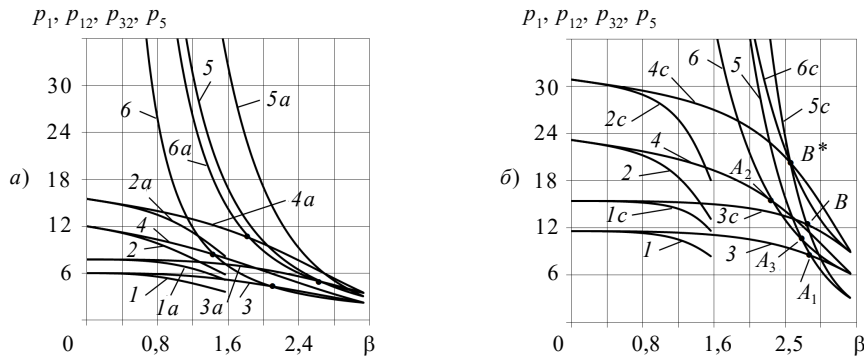


Рис.7. Безразмерные предельные нагрузки для эллипса с двумя свободными участками в зависимости от угла  $\beta$ : а)  $\gamma = 1$  и  $\gamma = 0,8$ ; б)  $\gamma = 0,6$  и  $\gamma = 0,5$

На рис. 7б линии без символов относятся к варианту  $\gamma = 0,6$ ; кривые с буквой *c* – к случаю  $\gamma = 0,5$ . Кривые 1, 2 изображают  $p_1$  для случая одного свободного участка при шарнирном опирании ( $\eta = 1$ ) и защемлении ( $\eta = 0$ ) соответственно. Линии 3 и 4 рассчитаны для  $p_{12}$  при  $\eta = 1$  и  $\eta = 0$ . Кривые 5 и 6 соответствуют нагрузкам  $p_{32}$  и  $p_5$ .

Из рис. 7 видно, что в случае двух участков свободного контура при малых значениях угла  $\beta$  реализуется схема типа 1. Видно, что линии 3, 4, 3а, 4а, 3с, 4с (для двух участков свободного контура) расположены выше соответствующих кривых 1, 2, 1а, 2а, 1с, 2с (для одного участка свободного контура). Следовательно, предельная нагрузка в случае двух участков больше, чем в случае одного участка (при одинаковых значениях  $\gamma, \eta, \beta$ ).

На рис. 7а крупными точками обозначены места пересечений линий 3, 3а (при  $\eta = 1$ ) и 4, 4а (при  $\eta = 0$ ) с соответствующими линиями 6 и 6а, когда схема типа 1 при увеличении  $\beta$  переходит в схему 5. Линии 5 и 5а расположены выше кривых 6 и 6а, поэтому схема типа 3 не реализуется для рассматриваемых значений параметра эллипса  $\gamma$ .

На рис. 7б для  $\gamma = 0,6$  точкой  $A_1$  обозначено пересечений линий 3 (при  $\eta = 1$ ) с линией 5, когда схема типа 1 при увеличении  $\beta$  переходит в схему типа 3. Точкой  $A_2$  обозначено пересечение линий 4 (при  $\gamma = 0,6$  и  $\eta = 0$ ) с линией 6, когда схема типа 1 переходит в схему 5. При дальнейшем увеличении  $\beta$  (для этого варианта) линия 6 пересекается с линией 5 в точке  $A_3$ , поэтому дальше реализуется схема типа 3.

На рис. 7б для  $\gamma = 0,5$  точками  $B$  и  $B^*$  обозначены места пересечений линий 3с (при  $\eta = 1$ ) и 4с (при  $\eta = 0$ ) с кривой 5с, когда схема типа 1 при увеличении  $\beta$  переходит в схему типа 3. При  $\beta$  больших, чем  $\beta$  в точке  $B^*$ , линия 6с расположена выше линии 5с, поэтому схема 5 не реализуется.

Таким образом, схема типа 1 реализуется при небольших значениях угла  $\beta$  и любом  $\gamma$ . При больших значениях  $\beta$  и  $\gamma$ , немного меньших 1, деформирование может происходить по схеме 5. При маленьких  $\gamma$  и больших значениях  $\beta$  реализуются схемы 5 и типа 3.

Нагрузка  $p_{22}$ , соответствующая схеме типа 2, на рис. 7 не изображена. Она возможна при  $\gamma < 0,5$ .

В случае деформирования по схеме типа 4 предельная нагрузка  $P_{24}$  такова (см. (22)):

$$P_{42} = 6 \frac{M_0}{\gamma^2} \cdot \frac{(2 - \eta) \int_{v_{\beta 2}}^{\pi/2} B(v_2) dv_2 + \int_0^{v_{\beta 2}} B(v_2) dv_2}{3 \int_0^{\pi/2} B^3(v_2) dv_2 - 2\gamma^2 a^2 \int_0^{\pi/2} B(v_2) dv_2}.$$

Численно получено, что  $P_{42} > P_{12}$  при  $\beta > 0$ , поэтому схема типа 4 в случае двух свободных участков контура не реализуется.

### Заключение

На основе модели идеального жесткопластического материала разработана модель предельного поведения многослойных эллиптических пластин под действием равномерно распределенной нагрузки. Контур пластин имеет комбинированное крепление, при котором часть контура пластины свободна, а другая часть шарнирно оперта или закреплена – это существенно влияет на характер деформирования. Рассмотрен вариант расположения свободного участка около точек минимального радиуса контура. Решения подобных задач за пределом упругости в литературе не известны.

В зависимости от размера свободной части контура возможны разные схемы деформирования эллиптических пластин. Во всех схемах пластина деформируется в виде нескольких конусообразных и плоских жестких областей, разделенных пластическими шарнирами с нормальным изгибающим моментом, равным предельному значению. Для построения решения на основе принципа виртуальной мощности введена криволинейная ортогональная система координат, связанная с контуром пластины. Для каждой из схем проанализированы условия их реализации. Получены простые аналитические выражения для оценки предельных нагрузок. Установленная предельная нагрузка соответствует определению несущей способности рассматриваемых пластин по второму предельному состоянию. В частных случаях выполнено сравнение предельных нагрузок с известными другими решениями. Это сравнение показывает полное совпадение результатов.

Анализ расширен на случай эллипсов, имеющих два участка свободного контура, расположенных симметрично. Показано, что при одинаковом суммарном размере свободных участков предельная нагрузка в случае двух участков больше, чем в случае одного участка.

Численные примеры, приведенные в статье, иллюстрируют влияние различных факторов (длину свободной части контура, способа крепления, отношение полуосей эллипса) на несущую способность. Продемонстрировано, что способы крепления существенно влияют на предельную нагрузку.

Идеи, касающиеся форм предельного деформирования, изложенные в статье, можно применить для изучения других разнообразных однородных и композитных пластин со свободными участками контура. Исследование может быть полезно для

предварительного анализа элементов конструкций при воздействии взрывных нагрузок, а также для тестирования численных расчетов.

#### Список литературы

1. Conway H.D., Farnham K.A. Deflections of uniformly loaded circular plates with combinations of clamped, simply supported and free boundary conditions. *International Journal of Mechanical Sciences*. 1967. Vol. 9. Iss. 9. P. 661–671. [https://doi.org/10.1016/0020-7403\(67\)90070-7](https://doi.org/10.1016/0020-7403(67)90070-7).
2. Nagaya K. Vibration of plate of arbitrary shape with free and simply supported mixed edges. *Journal of the Acoustical Society of America*. 1983. Vol. 73. Iss. 3. P. 844–850. <https://doi.org/10.1121/1.389053>.
3. Hassan S.M., Makary M. Transverse vibrations of elliptical plate of linearly varying thickness with half of the boundary clamped and the rest simply supported. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2003. Vol. 45. Iss. 5. P. 873–890. [https://doi.org/10.1016/S0020-7403\(03\)00117-6](https://doi.org/10.1016/S0020-7403(03)00117-6).
4. Ostryk V.I., Ulitko A.F. Bending of partially supported circular plate. *Journal of Mathematical Sciences*. 2017. Vol. 220. Iss. 2. P. 149–161. <https://doi.org/10.1007/s10958-016-3173-7>.
5. Strozzi A. Solid circular plate unilaterally supported along two antipodal edge arcs and deflected by a central transverse concentrated force. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*. 2022. Vol. 236. Iss. 21. P. 10736–10741. <https://doi.org/10.1177/0954406220924446>.
6. Zhang J., Zhao Q. et al. New analytical solution of vibration response of orthotropic composite plates with two adjacent edges rotationally-restrained and others free. *Composite Structures*. 2021. Vol. 266. Iss. 15. P. 113882–1–113882-11. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2021.113882>.
7. Sompornjaroensuk Y., Chantarawichit P. Vibration of circular plates with mixed edge conditions. Part I: Review of research. *UTK Research Journal*. 2020. Vol. 14. Iss. 2. P. 136–157.
8. Li Q., Lu V.P. Three-dimensional free vibration of functionally graded material plates on different boundary conditions. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 2011. Vol. 18. Iss. 8. P. 597–601. <https://doi.org/10.1080/15376494.2011.621840>.
9. Hassan S.M. Free transverse vibration of elliptical plates of variable thickness with half of the boundary clamped and the rest free. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2004. Vol. 46. Iss. 12. P. 1861–1882. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2004.08.004>.
10. Смирнов В.А. *Расчет пластин сложного очертания*. М.: Стройиздат, 1978. 300 с.
11. Gilbert M., He L., Smith C.C., Le C.V. Automatic yield-line analysis of slabs using discontinuity layout optimization. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences Proc. R. Soc. A*. 2014. Vol. 470. Iss. 2168. P. 1–23. <http://dx.doi.org/10.1098/rspa.2014.0071>.
12. Bai X., Zhu L., Yu N.X. Saturated impulse for pulse-loaded rectangular plates with various boundary conditions. *Thin-Walled Structures*. 2017. Vol. 119. P. 166–177. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2017.03.030>.
13. Ho P.L.H., Le C.V., Tran-Cong T. Limit state analysis of reinforced concrete slabs using an integrated radial basis function based mesh-free method. *Applied Mathematical Modelling*. 2018. Vol. 53. P. 1–11. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2017.08.006>.
14. Thavalingam A., Jennings A., McKeown J.J., Sloan D. A computerised method for rigid-plastic yield-line analysis of slabs. *Computers and Structures*. 1998. Vol. 68. Iss. 6. P. 601–612. [https://doi.org/10.1016/S0045-7949\(98\)00082-0](https://doi.org/10.1016/S0045-7949(98)00082-0).
15. Wüst J., Wagner W. Systematic prediction of yield-line configurations for arbitrary polygonal plates. *Engineering Structures*. 2008. Vol. 30. Iss. 7. P. 2081–2093. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2008.01.005>.
16. Kozniowski E., Orlowski M. Pre-determination of prediction of yield-line pattern of slabs using Voronoi diagrams. *Open Engineering*. 2022. Vol. 12. Iss. 1. P. 647–661. <https://doi.org/10.1515/eng-2022-0376>.
17. Немировский Ю.В. Исследование разрушения и рационального распределения

фазовых материалов в однородных и гибридных полиметаллических прямоугольных пластинах. *Вестник ЧГПУ. Механика предельного состояния*. 2022. №2 (52). С. 51–61. <https://doi.org/10.37972/chgpu.2022.52.2.006>.

18. Ржаницын А.Р. *Расчет сооружений с учетом пластических свойств материалов*. М.: Стройиздат, 1954. 288 с.

19. Дехтярь А.С. Пластины, частично опертые по контуру. *Строительная механика и расчет сооружений*. 2020. №2. С. 15–20. <https://doi.org/10.37538/0039-2383.2020.2.15.20>.

20. Романова Т.П. Несущая способность и динамическое поведение жесткопластических круглых пластин со свободными участками контура при взрывных нагрузках. *Проблемы прочности и пластичности*. 2025. Т. 87. №2. С. 192–209. <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2025-87-2-192-209>.

21. Romanova T.P. Mathematical modeling the limit and dynamic behavior of rigid plastic reinforced laminated annular plates with free parts of contour under explosive loads. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 2026. Vol. 33. Iss. 1. P. 2588655-1–2588655-14. <https://doi.org/10.1080/15376494.2025.2588655>.

22. Megson T.H.G. *Structural and Stress Analysis*. Butterworth-Heinemann, 2014. 744 p.

23. Alotaibi S.A.E., Rigby S.E., Guadagnini M., Tyas A. Rigid-plastic membrane response of thin plates under impulsive blast loads using the extended Hamilton principle. *International Journal of Impact Engineering*. 2023. Vol. 178. P. 104624-1–104624-19. <https://doi.org/10.1016/j.ijimpeng.2023.104624>.

24. Braestrup M.W. Concrete plasticity—A historical perspective. *Structural Concrete*. 2021. Vol. 22. Iss. 5. P. 2508–2525. <https://doi.org/10.1002/suco.202100444>.

25. Romanova T.P., Nemirovsky Yu.V. Dynamic rigid-plastic deformation of arbitrarily shaped plates. *Journal of Mechanics of Materials and Structures*. 2008. Vol. 3. Iss. 2. P. 313–334. <https://doi.org/10.2140/jomms.2008.3.313>.

26. Немировский Ю.В., Романова Т.П. Динамическая пластическая повреждаемость одно- и двусвязных эллиптических пластин. *ПМФТ*. 2002. Т. 43. № 2. С. 142–154.

27. He G., Liu Y. et al. A historical review of the traditional methods and the internal state variable theory for modeling composite materials. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 2022. Vol. 29. Iss. 18. P. 2617–2638. <https://doi.org/10.1080/15376494.2021.1872124>.

28. Niepostyn D. Limit state of elliptical plate. *Archiwum Mechaniki Stosowanej*. 1972. Vol. 24. Iss. 5-6. P. 889–917.

## References

1. Conway H.D., Farnham K.A. Deflections of uniformly loaded circular plates with combinations of clamped, simply supported and free boundary conditions. *Int. J. Mech. Sci.* 1967. Vol. 9. Iss. 9. P. 661–671. [https://doi.org/10.1016/0020-7403\(67\)90070-7](https://doi.org/10.1016/0020-7403(67)90070-7).

2. Nagaya K. Vibration of plate of arbitrary shape with free and simply supported mixed edges. *J. Acoust. Soc. Am.* 1983. Vol. 73. Iss. 3. P. 844–850. <https://doi.org/10.1121/1.389053>.

3. Hassan S.M., Makary M. Transverse vibrations of elliptical plate of linearly varying thickness with half of the boundary clamped and the rest simply supported. *Int. J. Mech. Sci.* 2003. Vol. 45. Iss. 5. P. 873–890. [https://doi.org/10.1016/S0020-7403\(03\)00117-6](https://doi.org/10.1016/S0020-7403(03)00117-6).

4. Ostryk V.I., Ulitko A.F. Bending of partially supported circular plate. *J. Math. Sci.* 2017. Vol. 220. Iss. 2. P. 149–161. <https://doi.org/10.1007/s10958-016-3173-7>.

5. Strozzi A. Solid circular plate unilaterally supported along two antipodal edge arcs and deflected by a central transverse concentrated force. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*. 2022. Vol. 236. Iss. 21. P. 10736–10741. <https://doi.org/10.1177/0954406220924446>.

6. Zhang J., Zhao Q. et al. New analytical solution of vibration response of orthotropic composite plates with two adjacent edges rotationally-restrained and others free. *Composite Structures*. 2021. Vol. 266. Iss. 15. P. 113882-1–113882-11. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2021.113882>.

7. Sompornjaroensuk Y., Chantarawichit P. Vibration of circular plates with mixed edge conditions. Part I: Review of research. *UTK Res. J.* 2020. Vol. 14. Iss. 2. P. 136–157.

8. Li Q., Lu V.P. Three-dimensional free vibration of functionally graded material plates on different boundary conditions. *Mech. Adv. Mater. Struct.* 2011. Vol. 18. Iss. 8. P. 597–601. <https://doi.org/10.1080/15376494.2011.621840>.
9. Hassan S.M. Free transverse vibration of elliptical plates of variable thickness with half of the boundary clamped and the rest free. *Int. J. Mech. Sci.* 2004. Vol. 46. Iss. 12. P. 1861–1882. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2004.08.004>.
10. Smirnov V.A. *Raschet plastin slozhnogo ochertaniya* [Calculation of Plates of Complex Shape]. Moscow. Stroyizdat Publ. 1978. 300 p. (In Russian).
11. Gilbert M., He L., Smith C.C., Le C.V. Automatic yield-line analysis of slabs using discontinuity layout optimization. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* Proc. R. Soc. A. 2014. Vol. 470. Iss. 2168. P. 1–23. <http://dx.doi.org/10.1098/rspa.2014.0071>.
12. Bai X., Zhu L., Yu N.X. Saturated impulse for pulse-loaded rectangular plates with various boundary conditions. *Thin-Walled Structures*. 2017. Vol. 119. P. 166–177. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2017.03.030>.
13. Ho P.L.H., Le C.V., Tran-Cong T. Limit state analysis of reinforced concrete slabs using an integrated radial basis function based mesh-free method. *Appl. Math. Model.* 2018. Vol. 53. P. 1–11. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2017.08.006>.
14. Thavalingam A., Jennings A., McKeown J.J., Sloan D. A computerised method for rigid-plastic yield-line analysis of slabs. *Comput. Struct.* 1998. Vol. 68. Iss. 6. P. 601–612. [https://doi.org/10.1016/S0045-7949\(98\)00082-0](https://doi.org/10.1016/S0045-7949(98)00082-0).
15. Wüst J., Wagner W. Systematic prediction of yield-line configurations for arbitrary polygonal plates. *Engineering Structures*. 2008. Vol. 30. Iss. 7. P. 2081–2093. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2008.01.005>.
16. Kozniowski E., Orlowski M. Pre-determination of prediction of yield-line pattern of slabs using Voronoi diagrams. *Open Engineering*. 2022. Vol. 12. Iss. 1. P. 647–661. <https://doi.org/10.1515/eng-2022-0376>.
17. Nemirovskii Yu.V. Issledovanie razrusheniya i ratsionalnogo raspredeleniya fazovykh materialov v odnorodnykh i gibridnykh polimetallicheskikh pryamougolnykh plastinakh [Investigation of destruction and rational distribution of phase materials in homogeneous and hybrid polycrystalline rectangular plates]. *Vestnik ChGPU: Mekhanika predelnogo sostoyaniya* [Vestnik of Yakovlev Chuvash State Pedagogical University: Mechanics of Limit State]. 2022. No 2 (52). P. 51–61. <https://doi.org/10.37972/chgpu.2022.52.2.006> (In Russian).
18. Rzhantsyn A.R. *Raschet sooruzheniy s uchetom plasticheskikh svoystv materialov* [Calculation of Structures Taking into Account the Plastic Properties of Materials]. Moscow. Stroyizdat Publ. 1954. 288 p. (In Russian).
19. Dekhtyar A.S. Plastinki, chastichno opertye po konturu [Plates partly supported]. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy* [Structural Mechanics and Analysis of Constructions]. 2020. No 2. P. 15–20 (In Russian).
20. Romanova T.P. Nesushchaya sposobnost i dinamicheskoe povedenie zhestko-plasticheskikh kruglykh plastin so svobodnymi uchastkami kontura pri vzryvnykh nagruzkakh [Bearing capacity and dynamic behavior of rigid plastic circular plates with free contour sections under explosive loads]. *Problemy prochnosti i plastichnosti* [Problems of Strength and Plasticity]. 2025. Vol. 87. No 2. P. 192–209 (In Russian).
21. Romanova T.P. Mathematical modeling the limit and dynamic behavior of rigid plastic reinforced laminated annular plates with free parts of contour under explosive loads. *Mech. Adv. Mater. Struct.* 2026. Vol. 33. Iss. 1. P. 2588655-1–2588655-14. <https://doi.org/10.1080/15376494.2025.2588655>.
22. Megson T.H.G. *Structural and Stress Analysis*. Butterworth-Heinemann. 2014. 744 p.
23. Alotaibi S.A.E., Rigby S.E., Guadagnini M., Tyas A. Rigid-plastic membrane response of thin plates under impulsive blast loads using the extended Hamilton principle. *Int. J. Impact Eng.* 2023. Vol. 178. P. 104624-1–104624-19. <https://doi.org/10.1016/j.ijimpeng.2023.104624>.
24. Braestrup M.W. Concrete plasticity—A historical perspective. *Structural Concrete*. 2021. Vol. 22. Iss. 5. P. 2508–2525. <https://doi.org/10.1002/suco.202100444>.
25. Romanova T.P., Nemirovsky Yu.V. Dynamic rigid-plastic deformation of arbitrarily shaped

plates. *J. Mech. Mater. Struct.* 2008. Vol. 3. Iss. 2. P. 313–334. <https://doi.org/10.2140/jomms.2008.3.313>.

26. Nemirovsky Yu.V., Romanova T.P. Dynamic plastic damage of simply and doubly connected elliptic plates. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 2002. Vol. 43. Iss. 2. P. 291–301. <https://doi.org/10.1023/A:1014766028870>.

27. He G., Liu Y. et al. A historical review of the traditional methods and the internal state variable theory for modeling composite materials. *Mech. Adv. Mater. Struct.* 2022. Vol. 29. Iss. 18. P. 2617–2638. <https://doi.org/10.1080/15376494.2021.1872124>.

28. Niepostyn D. Limit state of elliptical plate. *Archiwum Mechaniki Stosowanej*. 1972. Vol. 24. Iss. 5-6. P. 889–917.

## BEARING CAPACITY OF RIGID PLASTIC ELLIPTICAL PLATES WITH FREE CONTOUR SECTIONS\*

Romanova T.P.

*Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics the SB RAS,  
Novosibirsk, Russian Federation*

romanova@itam.nsc.ru

*Received by the Editor 2026/05/13*

Within the framework of the model of an ideal rigid-plastic body, the bearing capacity of laminated elliptical plates with irregular contour conditions is determined. Part of the contour is free, and its supported part is simply supported or clamped. A variant of the location of the free contour near the points of the minimum radius of the ellipse is considered. The load, evenly distributed over the surface of the plates, acts. On the free part of the contour, the deflection rates of the plate are not known. Solutions to such problems beyond the elastic limit are not known in the literature. It is shown that there are different mechanisms of limiting deformation depending on the size of the free part of the contour and its location on the contour, as well as on the ratio of the semi-axes of the ellipse. In all schemes, the plates are deformed in the form of several ruled surfaces (cone-shaped or flat rigid areas) separated by plastic hinges with a normal bending moment equal to the limit value. To construct the solution, a curved orthogonal coordinate system associated with the contour of the ellipse is introduced. The governing ratios are obtained based on the principle of virtual power. Simple analytical expressions for limit loads are obtained. When analyzing the bearing capacity of an elliptical plate, a scheme is selected that corresponds to a lower load limit. The solution is modified for the case of plates with two sections of a free contour. It is shown that with the same total length of free sections, the limit load in the case of two sections is greater than in the case of one. Numerical examples are given. It is shown that as the free section of the contour increases, the limit load decreases. In particular cases, the limit loads are compared with known other solutions. This comparison shows a complete coincidence of the results.

**Keywords:** rigid plastic model, laminated plate, elliptical plate, mixed edge conditions, free contour, limit load.

---

\*Completed within the framework of the state assignment (state registration No 124021400036-7).