

УДК 539.3

DOI: 10.32326/1814-9146-2026-88-3-38-49

**ПРИКЛАДНАЯ МОДЕЛЬ ОСЕВОГО СЖАТИЯ
ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОГО ПОРИСТОГО ЦИЛИНДРА
ПРИ НАЛИЧИИ ТОРЦЕВОГО ТРЕНИЯ***

© 2026 г.

**Ватульян А.О.¹, Гусаков И.В.¹,
Нестеров С.А.², Узлов М.Н.¹**

¹*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Российская Федерация*

²*Южный математический институт – филиал Владикавказского научного
центра РАН, Владикавказ, Российская Федерация*

aovatulyan@sfsedu.ru, igusakov@sfsedu.ru, 1079@list.ru, uzlov@sfsedu.ru

Поступила в редакцию 05.05.2026

В рамках линейной микродилатационной модели Ковина – Нунзиато рассматривается контактная задача об осевом сжатии конечного трансверсально-изотропного пористого цилиндра, помещенного между двумя жесткими плитами, смещающимися навстречу друг другу. Для учета влияния трения на торцах вводится эффективный интегральный параметр, определяющий отношение интегральной характеристики сил контактного трения к нормальной силе воздействия. С использованием физически обоснованных предположений (линейный характер радиального перемещения в зависимости от радиальной координаты, отсутствие зависимости осевого перемещения и функции микродилатации от радиуса) и метода Канторовича первого порядка, базирующегося на вариационном принципе Лагранжа, трехмерная краевая задача для пористо-упругого цилиндра сводится к системе трех обыкновенных дифференциальных уравнений. Для постоянных характеристик материала получено аналитическое решение в виде суммы стержневого решения, описывающего основное напряженно-деформированное состояние в центральной зоне цилиндра, и экспоненциально затухающих погранслойных слагаемых, обусловленных совместным влиянием микродилатационных эффектов и сил контактного трения. На примере кортикальной костной ткани выполнен численный параметрический анализ влияния трения и пористости. Установлено, что наличие торцевого трения препятствует поперечному расширению, вызывая «бочкообразность» (выпучивание боковой поверхности), и приводит к концентрации сжимающих радиальных и тангенциальных напряжений у торцов. Показано, что трение усиливает объемное сжатие в приторцевой области, что через параметры связанности стимулирует микродилатацию. Выявлено, что наличие пористости повышает общую податливость материала. Предложенные соотношения позволяют интерпретировать результаты лабораторных испытаний на сжатие, корректировать экспериментальные данные и решать обратные задачи

* Выполнено за счет гранта РФФИ №22-11-00265-П, <https://rscf.ru/project/22-11-00265/>, в Южном федеральном университете.

по идентификации интегральных характеристик контактного взаимодействия и пористых характеристик анизотропных биоматериалов.

Ключевые слова: микродилатационная теория, трансверсально-изотропный пористый материал, цилиндр, осевое сжатие, трение, метод Канторовича, краевой эффект, кортикальная костная ткань.

Введение

Многие пористые материалы, в том числе слоистые горные породы, кортикальная костная ткань, текстурированная керамика, обладают ярко выраженной трансверсальной изотропией. Это важный частный случай анизотропии, когда механические свойства одинаковы в плоскости изотропии и отличаются в перпендикулярном направлении. Фундаментальные основы теории упругости трансверсально-изотропных сред заложены в классических монографиях [1–3]. Однако классическая теория упругости не учитывает влияние пористости на макромеханический отклик материала на нагружение.

Для учета пористости и ее влияния на макромеханический отклик успешно применяются расширенные континуальные теории. В частности, в микродилатационной модели Ковина – Нунзиато [4] для пористых упругих сред вводится независимое скалярное поле микродилатации, интерпретируемое как изменение объемной доли твердой фазы. Первоначальная формулировка этой теории была дана для изотропных материалов. В статье [5] теория Ковина – Нунзиато была обобщена на трансверсально-изотропный случай и получено точное аналитическое решение задачи Сен-Венана для трансверсально-изотропного пористого цилиндра, однако краевые эффекты у торцов не исследовались.

В последние годы наблюдается значительный рост интереса к решению контактных задач в рамках теории Ковина – Нунзиато [6–9]. Важной особенностью публикаций по этой теме является учет смешанных граничных условий и возможность исследования влияния параметров пористости на контактные характеристики. Однако во всех перечисленных исследованиях предполагается отсутствие трения в зоне контакта, а материал считается изотропным. Между тем, лабораторные испытания на сжатие неизбежно сопровождаются трением между образцом и нагружающими плитами, что может существенно исказить результаты по реконструкции упругих характеристик [10, 11].

В статье Л. Файлона [12] заложены основы решения задач для конечных упругих цилиндров. Метод однородных решений [13] внес существенный вклад в анализ задач о равновесии протяженных пористо-упругих тел. Исследования, проведенные в [14], показали, что трение на торцах существенно влияет на напряженно-деформированное состояние упругого цилиндра в приторцевой зоне.

Параллельно с точными решениями развивались приближенные методы. Методом Канторовича построены приближенные модели деформирования вытянутых цилиндрических упругих образцов [15], прямоугольных образцов [16, 17], а в [18] исследовано влияние трения на сжатие вытянутых призматических образцов. Тем не менее, представляет интерес комплексный учет трансверсальной изотропии, пористости и контактного трения для цилиндрических образцов.

Цель настоящей статьи – построение приближенной полуаналитической модели осевого сжатия конечного трансверсально-изотропного пористого цилиндра с учетом трения на торцах на основе метода Канторовича и вариационного принципа Лагранжа.

Постановка задачи

Рассмотрим цилиндр радиуса R и высоты $2L$ из трансверсально-изотропного пористого материала. Введем систему координат r, φ, z с началом в центре цилиндра. Ось анизотропии совпадает с осью z . Область цилиндра: $0 \leq r \leq R, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, -L \leq z \leq L$. Цилиндр сжимается двумя жесткими плитами, которые перемещаются навстречу друг другу на расстояние 2δ . Боковая поверхность цилиндра $r = R$ свободна от напряжений. На торцах $z = \pm L$ возникает контактное взаимодействие, характеризующееся нормальным давлением $p(r)$ и касательными напряжениями $\tau(r)$, обусловленными трением между материалом цилиндра и плитами.

В линейной теории Ковина – Нунзиато [4] в осесимметричном случае состояние материала характеризуется полем перемещений (u_r, u_z) и независимым скалярным полем микродилатации ψ , описывающим локальное изменение объемной доли твердой фазы. Пусть n_0 – начальная пористость (объемная доля пустот), n – текущая пористость. Тогда $\psi = -(n - n_0)$ и при $\psi > 0$ пористость уменьшается и происходит уплотнение.

Компоненты тензора малых деформаций в осесимметричном случае имеют вид:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{u_r}{r}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad 2\varepsilon_{rz} = \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z}.$$

Определяющие соотношения для трансверсально-изотропного пористого материала (ось симметрии – z) в нотации Фойхта записываются в виде [5]:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= c_{11}\varepsilon_{rr} + c_{12}\varepsilon_{\varphi\varphi} + c_{13}\varepsilon_{zz} + \beta_1\psi, & \sigma_{\varphi\varphi} &= c_{12}\varepsilon_{rr} + c_{11}\varepsilon_{\varphi\varphi} + c_{13}\varepsilon_{zz} + \beta_1\psi, \\ \sigma_{zz} &= c_{13}(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\varphi\varphi}) + c_{33}\varepsilon_{zz} + \beta_3\psi, & \sigma_{zr} &= 2c_{44}\varepsilon_{zr}, \quad h_r = a_{11}\frac{\partial\psi}{\partial r}, \\ h_z &= a_{33}\frac{\partial\psi}{\partial z}, & g &= -(\beta_1(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\varphi\varphi}) + \beta_3\varepsilon_{zz} + \xi\psi). \end{aligned}$$

Здесь σ_{ij} – компоненты тензора классических напряжений; h_i – компоненты вектора неклассического силового фактора, возникающие из-за неоднородного распределения пор; g – неклассический силовой фактор скалярного характера, сопряженный с микродилатацией; $c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{33}, c_{44}$ – классические упругие модули трансверсально-изотропного тела; β_1, β_3 – параметры связанности, показывающие, как деформации в радиальном и осевом направлениях влияют на изменение пористости; a_{11}, a_{33} – параметры диффузии пор, показывающие, насколько сильно и далеко распространяется воздействие одной поры вокруг себя в различных направлениях; ξ – модуль, отвечающий за сопротивление изменению объема пор.

Задача симметрична относительно срединной плоскости $z = 0$, поэтому рассматриваем верхнюю половину цилиндра $0 \leq z \leq L$ с условиями симметрии (радиальное перемещение и микродилатация – четные функции z , осевое перемещение – нечетная функция z). Математическая постановка задачи имеет вид:

$$\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial\sigma_{zr}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} = 0, \quad 0 \leq r \leq R, \quad 0 \leq z \leq L, \quad (1)$$

$$\frac{\partial\sigma_{zr}}{\partial r} + \frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{zr}}{r} = 0, \quad 0 \leq r \leq R, \quad 0 \leq z \leq L, \quad (2)$$

$$\frac{\partial h_r}{\partial r} + \frac{h_r}{r} + \frac{\partial h_z}{\partial z} + g = 0, \quad 0 \leq r \leq R, \quad 0 \leq z \leq L, \quad (3)$$

$$u_z(r,0) = 0, \quad \frac{\partial u_r}{\partial z}(r,0) = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial z}(r,0) = 0, \quad (4)$$

$$\sigma_{zz}(r,L) = -p(r), \quad \sigma_{zr}(r,L) = -\tau(r), \quad u_z(r,L) = -\delta, \quad h_z(r,L) = 0, \quad (5)$$

$$\sigma_{rz}(R,z) = \sigma_{rr}(R,z) = 0, \quad h_r(R,z) = 0. \quad (6)$$

Прикладная модель на основе метода Канторовича

Для получения приближенной аналитической модели задачи (1)–(6) применим метод Канторовича [19]. Исходной точкой для применения метода Канторовича является вариационный принцип Лагранжа. Запишем полную энергию деформации Π пористого трансверсально-изотропного цилиндра с учетом осевой симметрии. В цилиндрической системе координат элемент объема имеет вид $dV = r dr d\varphi dz$. Интегрирование по азимутальному углу φ от 0 до 2π дает множитель 2π . Таким образом, функционал полной энергии записывается как:

$$\begin{aligned} \Pi &= W - A, \quad W = 2\pi \cdot 2 \int_0^L \int_0^R w_v r dr dz, \\ A &= 2\pi \cdot 2 \int_0^R (-p(r)u_z(r,L) - \tau(r)u_r(r,L)) r dr. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь W – энергия деформации, w_v – плотность энергии деформации, A – работа внешних сил на торцах. Для трансверсально-изотропного материала с осью симметрии z плотность энергии деформации имеет вид [5]:

$$\begin{aligned} w_v(\varepsilon_{ij}, \psi, \psi_{,i}) &= \frac{1}{2} (c_{11}(\varepsilon_{rr}^2 + \varepsilon_{\varphi\varphi}^2) + c_{33}\varepsilon_{zz}^2 + 2c_{12}\varepsilon_{rr}\varepsilon_{\varphi\varphi} + 2c_{13}(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\varphi\varphi})\varepsilon_{zz}) + \\ &+ \frac{1}{2} (4c_{44}\varepsilon_{rz}^2 + 2\beta_1(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\varphi\varphi})\psi + 2\beta_3\varepsilon_{zz}\psi + \xi\psi^2) + \frac{1}{2} (a_{11}\psi_{,r}^2 + a_{33}\psi_{,z}^2). \end{aligned}$$

Считаем цилиндр вытянутым, то есть $R/L \ll 1$. В методе Канторовича принимаем аппроксимации первого порядка: $u_r(r,z) = ru_1(z)$, $u_z(r,z) = u_0(z)$, $\psi(r,z) = f(z)$. Здесь $u_1(z)$, $u_0(z)$, $f(z)$ – неизвестные функции осевой координаты. Подставим выражения $\varepsilon_{rr} = \varepsilon_{\varphi\varphi}(z) = u_1(z)$, $\varepsilon_{zz} = u_0'(z)$, $\varepsilon_{rz} = (r/2)u_1'(z)$, $\psi_{,r} = 0$, $\psi_{,z} = f'(z)$ (штрих – производная по z) в функционал (7) и, интегрируя полученное выражение по r , получим следующий функционал:

$$\Pi = \Lambda + 4\pi(Pu_0(L) + Tu_1(L)), \quad (8)$$

где введены

$$\begin{aligned} \Lambda &= \pi R^2 \int_0^L \left((c_{11} + c_{12})u_1^2 + 2c_{13}u_1u_0' + \frac{1}{2}c_{33}(u_0')^2 + \frac{1}{8}c_{44}R^2(u_1')^2 + (2\beta_1u_1 + \beta_3u_0')f \right) dz + \\ &+ \pi R^2 \int_0^L \left(\frac{1}{2}\xi f^2 + \frac{1}{2}a_{33}(f')^2 \right) dz, \quad P = \int_0^R p(r)r dr, \quad T = \int_0^R \tau(r)r^2 dr. \end{aligned}$$

Условие стационарности функционала (8) приводит к системе дифференциальных уравнений Эйлера – Лагранжа для функций $u_1(z)$, $u_0(z)$, $f(z)$:

$$\frac{R^2}{4} c_{44} u_1'' - 2(c_{11} + c_{12})u_1 - 2c_{13}u_0' - 2\beta_1 f = 0, \quad 0 \leq z \leq L, \quad (9)$$

$$c_{33}u_0'' + 2c_{13}u_1' + \beta_3 f' = 0, \quad 0 \leq z \leq L, \quad (10)$$

$$a_{33}f'' - \xi f - 2\beta_1 u_1 - \beta_3 u_0' = 0, \quad 0 \leq z \leq L. \quad (11)$$

На срединной плоскости $z = 0$ заданы кинематические граничные условия:

$$u_0(0) = 0, \quad u_1'(0) = 0, \quad f'(0) = 0. \quad (12)$$

На верхнем торце $z = L$ имеем естественные граничные условия:

$$f'(L) = 0, \quad u_1'(L) = -\frac{4T}{R^4 c_{44}}, \quad c_{33}u_0'(L) + 2c_{13}u_1(L) + \beta_3 f(L) = -\frac{2P}{R^2}. \quad (13)$$

Связь между осевым смещением δ и нормальной силой определяется из соотношения: $u_0(L) = -\delta$.

Введем следующие безразмерные параметры и функции:

$$y_1 = \frac{r}{L}, \quad y_2 = \frac{z}{L}, \quad \eta = \frac{R}{L}, \quad U_r = \frac{u_r}{L}, \quad U_z = \frac{u_z}{L}, \quad \bar{c}_{ij} = \frac{c_{ij}}{c_{44}}, \quad \bar{\beta}_{ij} = \frac{\beta_{ij}}{c_{44}}, \quad \bar{\xi} = \frac{\xi}{c_{44}},$$

$$\bar{a}_{ij} = \frac{a_{ij}}{c_{44}L^2}, \quad \Phi = \psi, \quad H_r = \frac{h_r}{c_{44}L}, \quad H_z = \frac{h_z}{c_{44}L}, \quad \bar{P} = \frac{P}{c_{44}L^2}, \quad \bar{T} = \frac{T}{c_{44}L^3}, \quad \delta_0 = \frac{\delta}{L}.$$

Влияние трения описывается интегральным безразмерным параметром k , связывающим нормальные и касательные характеристики по формуле: $k = \bar{T}/\bar{P}$.

Постановка приведенной к безразмерному виду задачи (9)–(13) такова:

$$\bar{c}_{33}U_0'' + 2\bar{c}_{13}U_1' - \bar{\beta}_3\Phi' = 0, \quad 0 \leq y_2 \leq 1, \quad (14)$$

$$\frac{\eta^2}{4}U_1'' - 2(\bar{c}_{11} + \bar{c}_{12})U_1 - 2\bar{c}_{13}U_0' - 2\bar{\beta}_1\Phi = 0, \quad 0 \leq y_2 \leq 1, \quad (15)$$

$$\bar{a}_{33}\Phi'' - \bar{\xi}\Phi - 2\bar{\beta}_1U_1 - \bar{\beta}_3U_0' = 0, \quad 0 \leq y_2 \leq 1, \quad (16)$$

$$U_0(0) = U_1'(0) = 0, \quad \Phi'(0) = 0, \quad (17)$$

$$\bar{c}_{33}U_0'(1) + 2\bar{c}_{13}U_1(1) + \bar{\beta}_3\Phi(1) = -\frac{2\bar{P}}{\eta^2}, \quad (18)$$

$$U_1'(1) = -\frac{4k\bar{P}}{\eta^4}, \quad \Phi'(1) = 0, \quad U_0(1) = -\delta_0.$$

Аналитическое решение задачи

Получим аналитическое решение задачи (14)–(18). Сначала исключим U_0' . Интегрируя уравнение (14) с учетом первого граничного условия (18), получим $\bar{c}_{33}U_0' + 2\bar{c}_{13}U_1 + \bar{\beta}_3\Phi = -2\bar{P}/\eta^2$. Выражая U_0' и подставляя в (15), (16), получаем систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка для U_1 и Φ :

$$D_1U_1'' + A_{11}U_1 + A_{12}\Phi = -F_1, \quad 0 \leq y_2 \leq 1, \quad (19)$$

$$D_2\Phi'' + A_{21}U_1 + A_{22}\Phi = -F_2, \quad 0 \leq y_2 \leq 1, \quad (20)$$

с граничными условиями: $U_1'(0) = 0, \Phi'(0) = 0, \Phi'(1) = 0, U_1'(1) = -4k\bar{P}/\eta^4$. В уравнениях (19), (20) введены обозначения:

$$D_1 = \frac{\eta^2}{4}, \quad D_2 = \bar{a}_{33}, \quad A_{11} = \frac{4\bar{c}_{13}^2}{\bar{c}_{33}} - 2(\bar{c}_{11} + \bar{c}_{12}), \quad A_{12} = A_{21} = 2\left(\frac{\bar{c}_{13}\bar{\beta}_3}{\bar{c}_{33}} - \bar{\beta}_1\right),$$

$$A_{22} = \frac{\bar{\beta}_3^2}{\bar{c}_{33}} - \bar{\xi}, \quad F_1 = 4\frac{\bar{c}_{13}\bar{P}}{\bar{c}_{33}\eta^2}, \quad F_2 = 2\frac{\bar{\beta}_3\bar{P}}{\bar{c}_{33}\eta^2}.$$

Решение системы (19), (20) ищется в виде суммы частного решения неоднородной системы и общего решения однородной системы. Частное решение неоднородной системы, описывающее состояние вдали от торцов, имеет вид

$$\Phi^{rod} = \bar{P}g_1, \quad U_1^{rod} = \bar{P}g_2,$$

где

$$g_1 = \frac{2(2A_{12}\bar{c}_{13} - A_{11}\bar{\beta}_3)}{Q_0\eta^2\bar{c}_{33}}, \quad g_2 = \frac{2(A_{12}\bar{\beta}_3 - 2A_{22}\bar{c}_{13})}{Q_0\eta^2\bar{c}_{33}}, \quad Q_0 = A_{11}A_{22} - A_{12}^2.$$

Общее решение однородной системы (19), (20) отыскивается в виде:

$$U_1^{hom}(y_2) = U_1^0 \exp(\gamma y_2), \quad \Phi^{hom}(y_2) = \Phi^0 \exp(\gamma y_2).$$

Подставляя эти функции в (19), (20) при $F_1 = 0, F_2 = 0$ и сокращая на $\exp(\gamma y_2)$, получаем однородную линейную систему для нахождения амплитуд U_1^0, Φ^0 . Нетривиальное решение полученной системы существует, когда ее определитель равен нулю: $\Delta(\gamma) = a_0\gamma^4 - a_1\gamma^2 + a_2 = 0$, где $a_0 = D_1D_2, a_1 = -(A_{11}D_2 + A_{22}D_1), a_2 = Q_0$. Показатели γ образуют две пары вещественных корней:

$$\gamma_{1,2} = \pm\chi_1, \quad \gamma_{3,4} = \pm\chi_2, \quad \chi_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{a_0}},$$

$$\chi_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{a_0}} \quad (\chi_1 > 0, \chi_2 > 0).$$

Для каждого корня γ_k из (19), (20) находим отношение амплитуд:

$$\tau_k = \frac{\Phi^0}{U_1^0} = -\frac{A_{21}}{D_2(\gamma_k)^2 + A_{22}} = -\frac{D_1(\gamma_k)^2 + A_{11}}{A_{12}}.$$

С учетом четности функций общее решение в верхней половине цилиндра представляется комбинацией гиперболических косинусов:

$$U_1^{hom}(y_2) = C_1 \cosh(\chi_1 y_2) + C_2 \cosh(\chi_2 y_2),$$

$$\Phi^{hom}(y_2) = \tau_1 C_1 \cosh(\chi_1 y_2) + \tau_2 C_2 \cosh(\chi_2 y_2).$$

В силу симметрии задачи относительно срединной плоскости у каждого торца есть свой погранслои. Для верхней половины цилиндра в приторцевой зоне можно использовать приближенные асимптотические формулы:

$$U_1(y_2) \approx U_1^{rod} + C_1 \exp(-\chi_1(1 - y_2)) + C_2 \exp(-\chi_2(1 - y_2)), \quad 0 \leq y_2 \leq 1,$$

$$\Phi(y_2) \approx \Phi^{rod} + \tau_1 C_1 \exp(-\chi_1(1 - y_2)) + \tau_2 C_2 \exp(-\chi_2(1 - y_2)), \quad 0 \leq y_2 \leq 1.$$

Определив константы C_1, C_2 из граничных условий $U_1'(1) = -4k\bar{P}/\eta^4, \Phi'(1) = 0$ и выразив стержневую часть через $\bar{P}$, получим:

$$U_1(y_2) \approx \bar{P} \left(g_2 + \frac{4k}{\eta^4(\tau_1 - \tau_2)} \left(\frac{\tau_2}{\chi_1} \exp(-\chi_1(1 - y_2)) - \frac{\tau_1}{\chi_2} \exp(-\chi_2(1 - y_2)) \right) \right), \quad (21)$$

$$0 \leq y_2 \leq 1,$$

$$\Phi(y_2) \approx \bar{P} \left(g_1 + \frac{4\tau_1\tau_2k}{\eta^4(\tau_1 - \tau_2)} \left(\frac{\exp(-\chi_1(1 - y_2))}{\chi_1} - \frac{\exp(-\chi_2(1 - y_2))}{\chi_2} \right) \right), \quad (22)$$

$$0 \leq y_2 \leq 1.$$

Такое приближение не нарушает условий симметрии вблизи торца, а в центральной части цилиндра пограничные добавки экспоненциально малы при больших χ_i , $i = 1, 2$. В случае отсутствия трения ($k = 0$) формулы (21), (22) упрощаются до стержневого решения.

После нахождения функций $U_1(y_2)$ и $\Phi(y_2)$ по формулам (21), (22) далее находим осевое смещение

$$U_0(y_2) = -\frac{1}{\bar{c}_{33}} \int_0^{y_2} \left(\frac{2\bar{P}}{\eta^2} + 2\bar{c}_{13}U_1(\zeta) + \bar{\beta}_3\Phi(\zeta) \right) d\zeta.$$

Условие на верхнем торце $U_0(1) = -\delta_0$ дает связь между нагрузкой $\bar{P}$ и осадкой δ_0 :

$$\delta_0 = -\frac{1}{\bar{c}_{33}} \left[\frac{2}{\eta^2} + 2\bar{c}_{13}g_2 + \bar{\beta}_3g_1 + \frac{4k}{\eta^4(\tau_1 - \tau_2)} \left(2\bar{c}_{13} \left(\frac{\tau_2}{\chi_1^2} - \frac{\tau_1}{\chi_2^2} \right) + \bar{\beta}_3\tau_1\tau_2 \left(\frac{1}{\chi_1^2} - \frac{1}{\chi_2^2} \right) \right) \right] \bar{P}. \quad (23)$$

Результаты расчетов

На основе полученного аналитического решения проведен численный анализ влияния трения и пористости на напряженно-деформированное состояние цилиндра из обезвоженной кортикальной костной ткани, которая обладает выраженной трансверсальной изотропией и развитой пористой структурой.

Геометрические размеры образца: радиус $R = 1$ см, высота $L = 5$ см (соотношение $\eta = 0,2$, что соответствует вытянутому цилиндру). Нагружение задается кинематической осевой осадкой $\delta = 0,5$ мм. Взаимодействие с жесткими плитами описывается эффективным безразмерным параметром трения k . Классические упругие модули для компактной кортикальной кости имеют вид [20, 21]: $c_{11} = 18,6$ ГПа, $c_{12} = 9,7$ ГПа, $c_{13} = 10,1$ ГПа, $c_{33} = 27,6$ ГПа, $c_{44} = 6,5$ ГПа. Неклассические параметры оцениваются на основе физических соображений, как в [22, 23]. В статье принято: $\beta_1 = 0,15c_{44}$, $\beta_3 = 0,3c_{44}$, $\xi = 0,6c_{44}$, $a_{11} = a_{33} = d_0^2c_{44}$, где $d_0 = 200$ мкм – характерный размер остеона. После приведения к безразмерному виду получим параметры, используемые в расчетах: $\delta_0 = 0,01$, $\bar{c}_{11} = 2,86$, $\bar{c}_{12} = 1,49$, $\bar{c}_{13} = 1,55$, $\bar{c}_{33} = 4,25$, $\bar{\beta}_1 = 0,15$, $\bar{\beta}_3 = 0,3$, $\bar{\xi} = 0,6$, $\bar{a}_{11} = \bar{a}_{33} = 1,6 \cdot 10^{-5}$.

На основе формулы (23), характеризующей зависимость «сила–осадка», проведены расчеты силы $\bar{P}$ при заданной осадке $\delta_0 = 0,01$ и известных безразмерных параметрах. Выяснено, что при увеличении параметра трения k от 0 до 0,2 сила $\bar{P}$,

которую необходимо приложить, чтобы получить заданную осадку, возрастала на 3,5%. Наличие трения увеличивает необходимую сжимающую силу, поскольку препятствует поперечному расширению и усиливает объемное сжатие.

Для изолированной оценки роли пористости проведено сравнение пористо-упругого и чисто упругого ($\bar{\beta} = 0$, $\bar{a}_{ij} = 0$) материалов при одинаковом коэффициенте трения $k = 0,2$. Выяснено, что при наличии пор необходимая сжимающая сила $\bar{P}$ уменьшалась на 2,2%. Таким образом, пористый материал является более податливым, чем чисто упругий. Это связано с тем, что часть работы внешних сил расходуется на изменение объемной доли пор, поэтому для достижения той же осадки требуется меньшее усилие, чем в материале без пор.

На рис. 1, 2 показано осевое распределение на боковой поверхности цилиндра физических полей (радиальных смещений – рис. 1а, микродилатации – рис. 1б, радиальных напряжений – рис. 2а, тангенциальных напряжений – рис. 2б) при параметре трения $k = 0,05$.

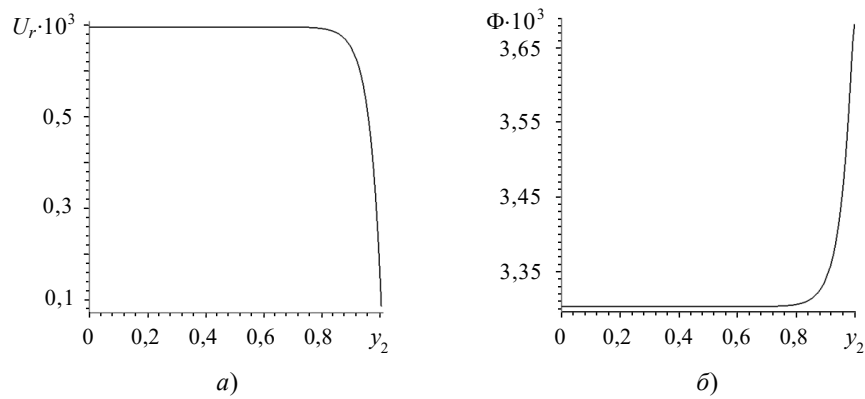


Рис. 1. Осевое распределение полей на боковой поверхности цилиндра:
а) радиальных смещений; б) микродилатации

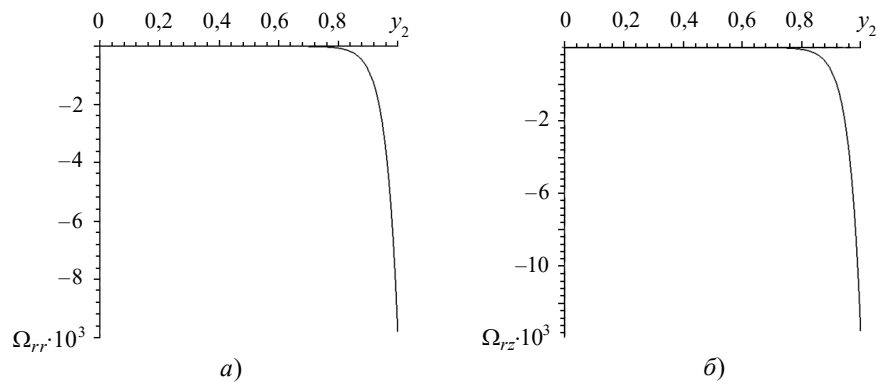


Рис. 2. Осевое распределение полей на боковой поверхности цилиндра:
а) радиальных напряжений; б) тангенциальных напряжений

Из рис. 1 следует, что в центральной (стержневой) области цилиндра радиальное смещение и микродилатация постоянны, а в приторцевой зоне наблюдается значительное уменьшение радиальных смещений, то есть возникает «бочкообразность»

(выпучивание боковой поверхности). Кроме того, в приторцевой зоне наблюдается значительное увеличение микродилатации. Это обусловлено совместным влиянием сдвиговых напряжений и параметров связанности: стеснение поперечных смещений на контакте активирует объемное сжатие, которое через пороупругие связи стимулирует локальное изменение микродилатации.

Из рис. 2 следует, что трение приводит к концентрации классических напряжений (радиального и тангенциального) у торцов: они становятся сжимающими, тогда как в стержневой зоне они близки к нулю. Эти тенденции качественно согласуются с известными решениями для упругих цилиндров с трением [10, 14].

Заключение

На основе теории Ковина – Нунзиато и метода Канторовича первого порядка построена прикладная аналитическая модель осесимметричного сжатия вытянутого трансверсально-изотропного пористого цилиндра с учетом трения на торцах. Аналитическое решение представлено как суперпозиция стержневого решения в центральной области и экспоненциально затухающих пограничных поправок, обусловленных совместным влиянием пористости и контактного трения.

Параметрический анализ показал, что:

- 1) трение значительно уменьшает радиальные смещения у торцов и вызывает концентрацию радиальных и тангенциальных напряжений;
- 2) трение усиливает объемное сжатие в приторцевой области, что через параметры связанности стимулирует микродилатацию;
- 3) наличие пористости повышает податливость материала.

Полученные результаты могут служить инструментом для коррекции экспериментальных данных, а также для решения обратных задач идентификации пористых характеристик анизотропных биоматериалов.

Список литературы

1. Лехницкий С.Г. *Теория упругости анизотропного тела*. М.: Наука, 1977. 416 с.
2. Ding H., Chen W., Zhang L. *Elasticity of Transversely Isotropic Materials*. Part of the book series: Solid Mechanics and its Applications. Vol. 126. Springer, 2006. 435 p. <https://doi.org/10.1007/1-4020-4034-2>.
3. Лурье А.И. *Теория упругости*. М.: Наука, 1970. 940 с.
4. Cowin S.C., Nunziato J.W. Linear elastic materials with voids. *Journal of Elasticity*. 1983. Vol. 13. P. 125–147. DOI: 10.1007/BF00041230.
5. Ghiba I.-D. On the deformation of transversely isotropic porous elastic circular cylinder. *Archives of Mechanics*. 2009. Vol. 61. Iss. 5. P. 407–421. DOI: 10.13140/2.1.1372.9924.
6. Scalia A., Sumbatyan M.A. Contact problem for porous elastic half-plane. *Journal of Elasticity and the Physical Science of Solids*. 2000. Vol. 60. Iss. 2. P. 91–102. DOI: 10.1023/A:1010880823544.
7. Зеленцов В.Б., Загребнева А.Д., Лапина П.А., Айзикович С.М., Ванг Юн-Че. Относительный объем пор при идентифицировании пористых материалов. *Проблемы прочности и пластичности*. 2021. Т. 83. №4. С. 462–470. DOI: 10.32326/1814-9146-2021-83-4-462-470.
8. Чебаков М.И., Колосова Е.М. Контактная задача для пороупругого цилиндра конечных размеров на винклеровском основании. *Изв. вузов. Северо-Кавказский регион. Серия: Естественные науки*. 2025. № 3(227). С. 44–54. DOI: 10.18522/1026-2237-2025-3-44-54.
9. Нестеров С.А. О деформировании составных упругих тел с пустыми порами. *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*. 2025. Т. 22. №1. С. 68–79. DOI: 10.31429/vestnik-22-1-68-79.
10. Chau K.T. Young's modulus interpreted from compression tests with end friction.

Journal of Engineering Mechanics. 1997. Vol. 123. No 1. P. 1–7. DOI: 10.1061/(ASCE)0733-9399(1997)123:1(1).

11. Williams J.G., Gamonpilas C. Using the simple compression test to determine Young's modulus, Poisson's ratio and the Coulomb friction coefficient. *International Journal of Solids and Structures*. 2008. Vol. 45. Iss. 16. P. 4448–4459. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2008.03.023.

12. Filon L.N.G. On the elastic equilibrium of circular cylinders under certain practical systems of load. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A*. 1902. Vol. 198. P. 147–233. DOI: 10.1098/rsta.1902.0004.

13. Джанелидзе Г.Ю., Прокопов В.К. Метод однородных решений в математической теории упругости. *Труды IV Всесоюз. математич. съезда*. Л.: Наука, 1964. Т. 2. С. 551–557.

14. Wei X.X., Chau K.T. Finite and transversely isotropic elastic cylinders under compression with end constraint induced by friction. *International Journal of Solids and Structures*. 2009. Vol. 46. Iss. 9. P. 1953–1965. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2009.01.007.

15. Ватульян А.О., Узлов М.Н. О прикладной теории сжатия цилиндра. *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика*. 2026. Т. 26. Вып. 1. С. 46–55. DOI: 10.18500/1816-9791-2026-26-1-46-55.

16. Ватульян А.О., Нестеров С.А. Прикладная модель растяжения пористого вытянутого призматического образца прямоугольного сечения. *Прикладная математика и механика*. 2026. Т. 90. Вып. 1. С. 134–150.

17. Ватульян А.О., Юров В.О., Гусаков И.В. О прикладной теории растяжения прямоугольника. *Изв. РАН. МТТ*. 2025. № 6. С. 114–127. DOI: 10.7868/S3034543X25060074.

18. Ватульян А.О., Гусаков И.В. О влиянии трения на сжатие вытянутых призматических образцов. *Российский журнал биомеханики*. 2026. Т. 30. № 1. С. 38–47. DOI: 10.15593/RZhBiomeh/2026.1.03.

19. Канторович Л.В., Крылов В.И. *Приближенные методы высшего анализа*. Л.: Физматлит, 1962. 706 с.

20. Rho J.Y., Ashman R.B., Turner C.H. Young's modulus of trabecular and cortical bone material: ultrasonic and microtensile measurements. *Journal of Biomechanics*. 1993. Vol. 26. Iss. 2. P. 111–119. DOI: 10.1016/0021-9290(93)90042-d.

21. Katz J.L., Meunier A. The elastic anisotropy of bone. *Journal of Biomechanics*. 1987. Vol. 20. Iss. 11–12. P. 1063–1070. DOI: 10.1016/0021-9290(87)90024-8.

22. Don X.B., Guo X.E. The dependence of transversally isotropic elasticity of human femoral cortical bone on porosity. *Journal of Biomechanics*. 2004. Vol. 37. Iss. 8. P. 1281–1237. <https://doi.org/10.1016/j.jbiomech.2003.12.011>.

23. Bishay P.L., Repka M., Sladek V., Sladek J. On the characterization of porosity-related parameters in micro-dilatation theory. *Acta Mechanica*. 2017. Vol. 228. P. 1631–1644. DOI: 10.1007/s00707-016-1789-9.

References

1. Lekhnitsky S.G. *Teoriya uprugosti anizotropnogo tela [Theory of Elasticity of Anisotropic Bodies]*. Moscow. Nauka Publ. 1977. 416 p. (In Russian).

2. Ding H., Chen W., Zhang L. *Elasticity of Transversely Isotropic Materials*. Part of the book series: Solid Mechanics and its Applications. Vol. 126. Springer. 2006. 435 p. <https://doi.org/10.1007/1-4020-4034-2>.

3. Lurie A.I. *Teoriya uprugosti [Theory of Elasticity]*. Moscow. Nauka Publ. 1970. 940 p. (In Russian).

4. Cowin S.C., Nunziato J.W. Linear elastic materials with voids. *J. Elasticity* 1983. Vol. 13. P. 125–147. DOI: 10.1007/BF00041230.

5. Ghiba I.-D. On the deformation of transversely isotropic porous elastic circular cylinder. *Arch. Mech.* 2009. Vol. 61. Iss. 5. P. 407–421. DOI: 10.13140/2.1.1372.9924.

6. Scalia A., Sumbatyan M.A. Contact problem for porous elastic half-plane. *J. Elast.* 2000. Vol. 60. Iss. 2. P. 91–102. DOI: 10.1023/A:1010880823544.

7. Zelentsov V.B., Zagrebneva A.D., Lapina P.A., Aizikovich S.M., Vang Yun-Che. Otnositelnyy obem por pri identirovaniy poristyykh materialov [Relative pore volume under indentation

- of porous materials]. *Problemy prochnosti i plastichnosti [Problems of Strength and Plasticity]*. 2021. Vol. 83. No 4. P. 462–470 (In Russian).
8. Chebakov M.I., Kolosova E.M. Kontaktnaya zadacha dlya porouprugogo tsilindra konechnykh razmerov na vinklerovskom osnovanii [Contact problem for a poroelastic cylinder of finite dimensions on a winkler foundation]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Severo-Kavkazskiy region. Seriya: Yestestvennyye nauki [Bulletin of Higher Educational Institutions. North Caucasus Region. Natural Science]*. 2025. No 3(227). P. 44–54 (In Russian).
 9. Nesterov S.A. O deformirovani sostavnykh uprugikh tel s pustymi porami [On the deformation of composite elastic bodies with empty pores]. *Ekologicheskiy vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva [Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation]*. 2025. Vol. 22. No 1. P. 68–79 (In Russian).
 10. Chau K.T. Young's modulus interpreted from compression tests with end friction. *J. Eng. Mech.* 1997. Vol. 123. No 1. P. 1–7. DOI: 10.1061/(ASCE)0733-9399(1997)123:1(1).
 11. Williams J.G., Gamonpilas C. Using the simple compression test to determine Young's modulus, Poisson's ratio and the Coulomb friction coefficient. *Int. J. Solids Struct.* 2008. Vol. 45. Iss. 16. P. 4448–4459. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2008.03.023.
 12. Filon L.N.G. On the elastic equilibrium of circular cylinders under certain practical systems of load. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A.* 1902. Vol. 198. P. 147–233. DOI: 10.1098/rsta.1902.0004.
 13. Dzhaneldidze G.Yu., Prokopov V.K. Metod odnorodnykh resheniy v matematicheskoy teorii uprugosti [The method of homogeneous solutions in mathematical theory of elasticity]. *Trudy IV Vsesoyuznogo matematicheskogo s'ezda [Proceedings of the 4th All-Union Mathematical Congress]*. Leningrad. Nauka Publ. 1964. Vol. 2. P. 551–557 (In Russian).
 14. Wei X.X., Chau K.T. Finite and transversely isotropic elastic cylinders under compression with end constraint induced by friction. *Int. J. Solids Struct.* 2009. Vol. 46. Iss. 9. P. 1953–1965. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2009.01.007.
 15. Vatulyan A.O., Uzlov M.N. O prikladnoy teorii szhatiya tsilindra [On the applied theory of compression of an elastic cylinder]. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya: Matematika. Mekhanika. Informatika [Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics]*. 2026. Vol. 26. Iss. 1. P. 46–55 (In Russian).
 16. Vatulyan A.O., Nesterov S.A. Prikladnaya model rastyazheniya poristogo vytyanutogo prizmaticheskogo obraztsa pryamougolnogo secheniya [Applied model of tension of a porous elongated prismatic rectangular cross-section sample]. *Prikladnaya matematika i mekhanika [Applied Mathematics and Mechanics]*. 2026. Vol. 90. Iss. 1. P. 134–150 (In Russian).
 17. Vatulyan A.O., Yurov V.O., Gusakov I.V. O prikladnoy teorii rastyazheniya pryamougolnika [On the applied theory of rectangle stretching]. *Izvestiya Rossiyskoy akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela [Mechanics of Solids]*. 2025. No 6. P. 114–127 (In Russian).
 18. Vatulyan A.O., Gusakov I.V. O vliyani treniya na szhatie vytyanutykh prizmaticheskikh obraztsov [On the influence of friction in compression of elongated prism specimens]. *Rossiyskiy zhurnal biomekhaniki [Russian Journal of Biomechanics]*. 2026. Vol. 30. No 1. P. 38–47 (In Russian).
 19. Kantorovich L.V., Krylov V.I. *Priblizhennyye metody vysshego analiza [Approximate Methods of Higher Analysis]*. Leningrad. Fizmatlit Publ. 1962. 706 p. (In Russian).
 20. Rho J.Y., Ashman R.B., Turner C.H. Young's modulus of trabecular and cortical bone material: ultrasonic and microtensile measurements. *J. Biomech.* 1993. Vol. 26. Iss. 2. P. 111–119. DOI: 10.1016/0021-9290(93)90042-d.
 21. Katz J.L., Meunier A. The elastic anisotropy of bone. *J. Biomech. Eng.* 1987. Vol. 20. Iss. 11–12. P. 1063–1070. DOI: 10.1016/0021-9290(87)90024-8.
 22. Don X.B., Guo X.E. The dependence of transversally isotropic elasticity of human femoral cortical bone on porosity. *J. Biomech.* 2004. Vol. 37. Iss. 8. P. 1281–1237. <https://doi.org/10.1016/j.jbiomech.2003.12.011>.
 23. Bishay P.L., Repka M., Sladek V., Sladek J. On the characterization of porosity-related parameters in micro-dilatation theory. *Acta Mech.* 2017. Vol. 228. P. 1631–1644. DOI: 10.1007/s00707-016-1789-9.

APPLIED MODEL OF AXIAL COMPRESSION OF TRANSVERSELY ISOTROPIC POROUS CYLINDER WITH END FRICTION*

Vatulyan A.O.¹, Gusakov I.V.¹, Nesterov S.A.², Uzlov M.N.¹

¹*Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russian Federation*

²*Southern Mathematical Institute – Branch of Vladikavkaz Scientific Center,
Russian Academy of Sciences, Vladikavkaz, Russian Federation*

aovatulyan@sfedu.ru, igusakov@sfedu.ru, 1079@list.ru, uzlov@sfedu.ru

Received by the Editor 2026/05/05

In the context of the linear Cowin – Nunziato micro-dilatation theory, the contact problem of axial compression of a finite transversely isotropic porous cylinder placed between two rigid plates moving towards each other is addressed. To account for the effect of friction, an effective integral parameter is introduced as the ratio of the equivalent tangential force to the normal force. Using physically justified approximations (linear radial variation of the radial displacement, no radial dependence of the axial displacement and micro-dilatation) together with the first-order Kantorovich method and the Lagrange variational principle, the three-dimensional boundary value problem is reduced to a system of three ordinary differential equations. The analytical solution is obtained as a sum of a rod-type solution describing the fundamental stress-strain state in the central part of the cylinder and exponentially decaying boundary-layer terms generated by the combined action of micro-dilatation phenomena and contact friction. Using cortical bone as an example, a parametric study is carried out to reveal the influence of the friction coefficient and porosity characteristics on axial distributions of displacements, stresses, and micro-dilatation. The analysis reveals that end friction restricts transverse expansion, causing “barreling” (bulging of the lateral surface), and leads to a concentration of compressive radial and tangential stresses near the ends. Friction also enhances volumetric compression in the end region, which stimulates micro-dilatation through coupling parameters. Additionally, the presence of porosity increases the overall compliance of the material. The derived relationships enable the accurate interpretation of laboratory compression tests, the correction of experimental data, and the identification of contact properties and porous characteristics of anisotropic biomaterials.

Keywords: micro-dilatation theory, transversely isotropic porous material, cylinder, axial compression, friction, Kantorovich method, edge effect, cortical bone tissue.

*The study was supported by the grant of the Russian Science Foundation No 22-11-00265-II, <https://rscf.ru/project/22-11-00265/> at Southern Federal University.