

УДК 539.4

DOI: 10.32326/1814-9146-2026-88-3-26-37

**РАСЧЕТ НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ ИЗГИБАЕМЫХ
СЛОИСТО-ВОЛОКНИСТЫХ КОЛЬЦЕВЫХ ПЛАСТИН,
КОНТАКТИРУЮЩИХ С АГРЕССИВНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ
ЖИДКОСТЬЮ. 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И МЕТОД РЕШЕНИЯ***

© 2026 г.

Янковский А.П.

*Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича
СО РАН, Новосибирск, Российская Федерация*

yankovsky_ap@itam.nsc.ru

Поступила в редакцию 30.03.2026

Сформулирована задача на условный экстремум, позволяющая рассчитывать верхнюю границу предельной нагрузки, выдерживаемой изгибаемой слоистой кольцевой пластиной, контактирующей с агрессивной несжимаемой жидкостью. Внутреннее отверстие в составной конструкции плотно закрыто абсолютно жесткой вставкой. Пластина может быть соединена со вставкой шарнирно или жестко. Внешняя кромка конструкции закреплена или шарнирно оперта; допустимо ее вертикальное смещение: подвижная заделка или шарнир. В предельном состоянии пластины жидкость не может перетекать с одной ее лицевой поверхности на другую. Слои в пластине имеют переменную толщину и по-разному усилены волокнами. В каждом слое структура армирования является радиально- и осесимметричной. Материалы фаз композиции жесткопластические, имеющие разные пределы текучести при растяжении и сжатии; связующее может быть ортотропным. Пластическое течение в компонентах композиции ассоциировано с модифицированными условиями текучести Треска. В предельном состоянии кинематика составной конструкции описывается уравнениями классической теории изгиба пластин. Рассмотрены схемы усиления каждого слоя: 1) два семейства арматуры из одного и того же материала уложены по радиально симметричным спиральям; 2) в радиальном и/или окружном направлениях (материалы волокон при этом могут быть различны). Выполнена дискретизация поставленной задачи, что позволило свести ее к проблеме теории линейного программирования. Показано, что получающееся численное решение является неполным, так как не позволяет определить величину отпора жидкости в предельном состоянии конструкции; несмотря на это, несущую способность пластины все-таки удастся рассчитать с точностью порядка 1%.

Ключевые слова: кольцевая слоистая пластина, армирование, составная конструкция, контакт с агрессивной жидкостью, жесткопластические материалы, кусочно-линейные условия текучести, пластическая анизотропия, предельное равновесие, деградация пластических свойств.

*Выполнено в рамках государственного задания (№ госрегистрации 124021400036-7).

Введение

При высокоинтенсивном нагружении, характерном для современных инженерных изделий из композитных материалов (КМ), компоненты композиции могут деформироваться пластически [1–4], поэтому актуальна проблема моделирования неупругого поведения КМ-конструкций [5–13], в частности контактирующих с жидкой средой [9, 14–20].

В начальном приближении расчет несущей способности элементов конструкций по второму предельному состоянию, когда их материал (в том числе и композитный) деформируется чисто пластически, можно проводить с использованием жесткопластической модели [5, 7, 9, 10, 12–16, 18–20]. Критический анализ, проведенный в [18], показал: в статье [15] была допущена серьезная ошибка при определении предельной кривой текучести в изгибаемых моментах для КМ-пластины из разносопротивляющихся растяжению и сжатию материалов компонентов композиции; в статье [16] использована структурная модель механики композитов из [5], которая позволяет рассчитывать несущую способность кольцевых пластин только с радиально-окружной укладкой волокон. Ошибка, допущенная в [15], повторена и в статье [9], а аналитическое решение, полученное в [16] и воспроизводящее ход рассуждений из [14], относится к слишком идеализированному случаю – однородной радиально-окружной структуре армирования. Как продемонстрировано в [18–20], при такой укладке волокон постоянного поперечного сечения (что традиционно и обеспечивают современные технологии [1, 2]), структуры армирования вдоль радиуса кольцевых пластин оказываются существенно неоднородными. Указанные недостатки статей [15, 16] привели к необходимости разработки численных методов решения соответствующих задач о предельном равновесии КМ-пластин, покоящихся на несжимаемом жидком основании. При этом использовались основные идеи из [7] и методы теории линейного программирования [21]. Так, в статьях [18, 19] моделировался случай, когда материалы фаз композиции одинаково сопротивляются растяжению и сжатию, что позволило в явной форме рассчитать кривые текучести КМ-пластин в изгибающих моментах. В отличие от этого, в [20] рассмотрен случай разносопротивляющихся материалов компонентов композиции, что приводит к возникновению не только изгибающих моментов, но и мембранных усилий в предельном состоянии такой конструкции, поэтому расчет несущей способности соответствующих КМ-пластин не может быть выполнен методом, разработанным в [18], без повторения ошибок, допущенных в [9, 15]. В силу этого обстоятельства в [20], как и в [7], была использована двуслойная модель изгибаемой пластины в предположении, что оба фиктивных армированных слоя выполнены из одного и того же КМ. Это и позволило обоснованно провести соответствующие расчеты и получить практически приемлемые результаты.

Известно, что для изгибаемых пластин эффективным является разнесение на некоторое расстояние несущих (в частности, армированных) слоев с заполнением пространства между ними низкопрочным (недорогим) материалом, то есть целесообразно создание трехслойных и даже многослойных тонкостенных КМ-конструкций [22]. В этой связи следует напомнить, что в [16] также рассматриваются трехслойные КМ-пластины, но армированным в них является только средний слой, что неэффективно для пластин, работающих в условиях изгиба.

При контакте конструкций с агрессивной средой свойства их материалов могут деградировать по толщине [23]. Аппроксимируя при этом в поперечном направлении

зависимости механических характеристик от степени их деградации кусочно-постоянными функциями, в случае пластин, контактирующих с такой средой по одной из лицевых поверхностей, можно использовать модель многослойной конструкции с постоянными механическими свойствами по толщине каждого слоя. Таким образом, за счет слоистости пластин можно описывать изгибное поведение не только конструктивно неоднородных изделий, но и изначально однородных в поперечном направлении конструкций, свойства материала которых подверглись деградации за счет контакта с агрессивной средой.

Согласно вышеизложенному, настоящее исследование посвящено разработке численного метода расчета верхней границы значения критической нагрузки, соответствующей второму предельному состоянию для изгибаемых слоисто-волоконистых круглых составных пластин, контактирующих по одной из лицевых сторон с несжимаемой жидкостью (возможно, агрессивной). При этом рассматривается общий случай, когда материалы субструктурных элементов композиции каждого слоя могут иметь разные пределы текучести при растяжении и сжатии.

Формулировка задачи и метод расчета

Рассматривается составная конструкция, состоящая из тонкой слоистой кольцевой пластины, которая ограничена кромками радиусов R_0 и R_1 ($R_0 < R_1$). Отверстие внутри пластины закрыто абсолютно жесткой вставкой (шайбой). По одной из лицевых поверхностей конструкция контактирует с несжимаемой жидкостью, заключенной в ограниченном объеме с жесткими стенками; в предельном состоянии перетекание жидкости с одной лицевой поверхности на другую невозможно. На внутренней кромке радиуса R_0 пластина может быть соединена с шайбой жестко (подвижное защемление) или шарнирно (подвижный шарнир); на внешней кромке радиуса R_1 возможны разные виды опирания: жесткий или подвижный шарнир, жесткая или подвижная заделка. В целом конструкция осесимметрична. Пластина состоит из M слоев (возможно разной структуры и переменной толщины), которые пронумерованы в поперечном направлении z снизу вверх. Осевые координаты z точек границы между m -м и $(m + 1)$ -м слоями обозначим как $H_m(r)$ ($1 \leq m \leq M - 1$). Точки нижней и верхней лицевых поверхностей задаются зависимостями $z = H_0(r)$ и $z = H_M(r)$ соответственно. Осевые координаты точек срединной поверхности m -го слоя обозначим как $z_m(r) = (H_m(r) + H_{m-1}(r))/2$ ($R_0 \leq r \leq R_1$, $1 \leq m \leq M$).

Каждый слой пластины осесимметрично усилен двумя семействами волокон с плотностями $\omega_k^{(m)}$ и углами армирования $\psi_k^{(m)}$, отсчитываемыми от направления полярного радиуса r (рис. 1а в [18]). В осевом направлении z структуры армирования слоев однородны: $\partial \omega_k^{(m)} / \partial z = \partial \psi_k^{(m)} / \partial z = 0$ ($k = 1, 2$, $1 \leq m \leq M$).

Так как настоящая статья, по сути, продолжает исследования, начатые в [18–20], в силу ограниченности объема статьи всюду, где это возможно без утраты смысла, будут ссылки на рисунки и формулы из [18–20].

Жесткопластические компоненты композиции каждого слоя однородны, причем их пределы текучести при растяжении и сжатии могут быть различны. Армирующие волокна изотропны, а материал связующего в каждом m -м слое может иметь цилиндрическую анизотропию – разные пределы текучести в радиальном и окружном направлениях. Пластическое течение фаз композиции в предельном их состоянии ассоциировано с кусочно-линейными условиями текучести типа модифицированных критериев Треска [7, 24–26] и Ишлинского – Ивлева [27]. Если m -й слой армиро-

ван по спиральным траекториям, то его структура обладает радиальной симметрией ($\omega_1^{(m)}(r) = \omega_2^{(m)}(r)$ и $\psi_1^{(m)}(r) = -\psi_2^{(m)}(r)$), а волокна обоих семейств выполнены из одного и того же материала. В случае радиально-окружной укладки волокон в m -м слое арматура разных семейств может быть изготовлена из разных материалов. Рассматриваемая конструкция осесимметрично нагружена как в поперечном z , так и в радиальном r направлениях. При указанных пластических свойствах компонентов композиции, структура армирования каждого слоя, а также особенностях геометрии, нагружения и закрепления пластины в ее предельном состоянии реализуется осесимметричный изгиб, который можно описать уравнениями классической теории [7, 22]. При этом направления главных усредненных напряжений в композиции каждого слоя (а также ассоциированных с ними усредненных скоростей деформаций) в предельном состоянии составной конструкции совпадают с радиальным и окружным направлениями.

Внешние нагрузки, приложенные к конструкции, разделяются на два типа: к первому типу относятся силы с заданными (фиксированными) значениями; ко второму – силы, пропорциональные некоторому параметру p , предельное значение которого и требуется определить.

Замечание 1. Некоторая нагрузка $F(r)$ второго типа имеет выражение $F(r) = p\bar{F}(r)$, где $\bar{F}(r)$ – заданная зависимость от r ($0 \leq r \leq R_1$).

Предполагается: согласно классической теории изгиба пластин [7, 22], в каждом m -м слое приближенно реализуется плоское напряженное состояние (ПНС), при этом кривая текучести КМ в плоскости главных усредненных напряжений ($\sigma_1^{(m)}, \sigma_2^{(m)}$) аппроксимирована кусочно-линейно и имеет $N^{(m)}$ ($1 \leq m \leq M$) угловых точек [7, 18, 20, 24–28].

В предельном состоянии исследуемой конструкции мощность диссипации механической энергии $D(r)$, отнесенная к единице площади отсчетной плоскости пластины, складывается из аналогичных величин $D^{(m)}(r)$ каждого m -го слоя [7, 20]:

$$D(r) = \sum_{m=1}^M D^{(m)}(r), \quad D^{(m)}(r) = \int_{H_{m-1}}^{H_m} \bar{D}^{(m)}(r, z) dz, \quad R_0 \leq r \leq R_1, \quad 1 \leq m \leq M, \quad (1)$$

где $\bar{D}^{(m)}(r, z)$ – то же, что и $D^{(m)}(r)$, только для элементарного слоя с осевой координатой $z \in (H_{m-1}, H_m)$.

Далее считаем, что функции $\bar{D}^{(m)}(r, z)$ не зависят от поперечной координаты z в пределах каждого m -го слоя, но изменяются при переходе от слоя к слою. Такое допущение, по сути, является начальным этапом дискретизации рассматриваемой задачи и не является слишком обременительным. Действительно, в [7] показано, что даже фиктивное разбиение однородной по толщине пластины всего на два слоя ($M = 2$), в каждом из которых мощность диссипации $\bar{D}^{(m)}$ не зависит от поперечной координаты z , вполне достаточно для проведения практических расчетов, что подтвердила и верификация, выполненная в [20] для рассматриваемого типа задач. На основании этого из второй формулы (1) получаем

$$D^{(m)}(r) = (H_m(r) - H_{m-1}(r))\bar{D}^{(m)}(r), \quad R_0 \leq r \leq R_1, \quad 1 \leq m \leq M, \quad (2)$$

где, согласно классической теории изгиба пластин [7, 20, 22],

$$\bar{D}^{(m)}(r) = \sum_{i=1}^2 \sigma_i^{(m)}(r)(\xi_i(r) + z_m(r)\kappa_i(r)), \quad 1 \leq m \leq M; \quad (3)$$

$$\xi_1(r) = u'(r), \quad \xi_2(r) = \frac{u(r)}{r}, \quad \kappa_1(r) = \vartheta_1'(r), \quad \kappa_2(r) = \frac{\vartheta(r)}{r},$$

$$\vartheta(r) = -v'(r), \quad R_0 \leq r \leq R_1; \quad (4)$$

u, v – скорости точек отсчетной плоскости КМ-пластины ($z = 0$) в радиальном r и осевом z направлениях (v – скорость прогиба); ξ_1, ξ_2 – скорости мембранных деформаций точек отсчетной плоскости в радиальном и окружном направлениях; κ_1, κ_2 – скорости параметров искривления этой плоскости в тех же направлениях; $\sigma_1^{(m)}, \sigma_2^{(m)}$ – удовлетворяющие условию текучести радиальное и окружное усредненные напряжения в композиции m -го слоя, которые, как и $\xi_1, \xi_2, \kappa_1, \kappa_2$, являются главными; верхний индекс в скобках – номер слоя; штрих – производная по r .

Повторяя рассуждения из работ [7, 20], получаем, что рассматриваемая задача расчета верхней (кинематической) границы предельной нагрузки, приложенной к изгибаемой M -слойной КМ-пластине и к внутренней вставке, контактирующей с несжимаемой жидкостью (в частности, агрессивной), сводится к определению минимального значения p^* параметра внешней нагрузки p при всех кинематически допустимых скоростях перемещений точек отсчетной плоскости $u(r)$ и $v(r)$ с учетом первого соотношения (1):

$$p^* = \min_{u,v} p = \min_{u,v} \left\{ 2\pi \int_{R_0}^{R_1} \sum_{m=1}^M D^{(m)}(r) r dr - Gv_0 - 2\pi R_0 M_n^0 \vartheta_0 - \right. \\ \left. - 2\pi R_1 (Q_1 v_1 + T_1 u_1 + M_n^1 \vartheta_1) - 2\pi \int_{R_0}^{R_1} [g_r(r)u(r) + g_z(r)v(r)] r dr \right\} \quad (5)$$

при условии нормировки

$$\bar{P}_z v_0 + 2\pi R_1 (\bar{Q}_z^1 v_1 + \bar{T}_r^1 u_1 + \bar{m}_n^1 \vartheta_1) + 2\pi R_0 \bar{m}_n^0 \vartheta_0 + 2\pi \int_{R_0}^{R_1} \bar{p}_z(r) v(r) r dr = I, \quad (6)$$

ограничении-равенстве

$$v_0 R_0^2 + 2 \int_{R_0}^{R_1} v(r) r dr = 0 \quad (7)$$

и ограничениях-неравенствах (см. (2) при учете (3) и (4))

$$D^{(m)}(r) \geq (H_m(r) - H_{m-1}(r)) [\sigma_{1,l}^{(m)}(r)(u'(r) - z_m(r)v''(r)) + \\ + \sigma_{2,l}^{(m)}(r)(u(r) - z_m(r)v'(r))/r], \quad D^{(m)}(r) \geq 0, \quad 1 \leq l \leq N^{(m)}, \quad 1 \leq m \leq M, \quad (8)$$

где

$$v_0 = v(R_0), \quad u_1 = u(R_1), \quad \vartheta_i = \vartheta(R_i) \quad (i = 0, 1), \quad I = 1 \text{ Вт}; \quad (9)$$

v_0 – скорость смещения шайбы в осевом направлении z ; G – заданный вес шайбы; $g_r(r), g_z(r)$ – фиксированные распределенные массовые нагрузки, действующие на единицу площади отсчетной плоскости в радиальном r и трансверсальном z направлениях и имеющие, например, выражения, аналогичные (3) из [20] (с учетом M -слойности рассматриваемой КМ-пластины); M_n^j – заданные изгибающие моменты на кромках радиусов R_j ; $p\bar{m}_n^j$ ($j = 0, 1$) – изгибающие моменты на тех же кромках,

пропорциональные параметру p (см. замечание 1); T_1, Q_1 – заданные на кромке $r = R_1$ радиальное усилие и перерезывающая сила; $p\bar{T}_r^1, p\bar{Q}_z^1$ – те же величины, но пропорциональные p ; $p\bar{p}_z(r)$ – внешняя распределенная поперечная нагрузка, приложенная к пластине и пропорциональная параметру p ; $\sigma_{j,l}^{(m)}$ – значение напряжения $\sigma_j^{(m)}$ ($j = 1, 2$) в l -й угловой точке кусочно-линейной кривой текучести композиции m -го слоя при ПНС.

Система неравенств (8) характеризует принцип максимума Мизеса [7, 26, 27]. Равенство (7) соответствует условиям несжимаемости жидкости (с которой контактирует конструкция) и невозможности ее перетекания с одной лицевой поверхности на другую в предельном состоянии КМ-пластины. Условие нормировки (6), которое также является ограничением-равенством, вводится для того, чтобы избавиться от сомножителя при параметре p в выражении (5) (см. формулы (5), (9) и (10) в [20]).

К соотношениям (5)–(9) следует добавить кинематические граничные условия на внешней кромке (см. (4) и (9))

$$u(R_1) = u_1^*, \quad v(R_1) = v_1^*, \quad v'(R_1) = \vartheta_1^* \quad (10)$$

и условия совместного перемещения точек жесткой вставки и внутренней кромки пластины (с учетом первого равенства (9))

$$u(R_0) = 0, \quad v'(R_0) = 0, \quad (11)$$

которые наряду с (7) нужно рассматривать как дополнительные ограничения-равенства. В соотношениях (10) $u_1^*, v_1^*, \vartheta_1^*$ – фиксированные величины. Если на внешней кромке пластины задан шарнир (подвижный или неподвижный), то последнее равенство в (10) не учитывается; аналогично, если шайба скреплена с пластиной шарнирно, то второе условие в (11) также не учитывается.

Подчеркнем, что соотношения (5)–(11) не содержат величину $q = \text{const}$ отпора жидкости в предельном состоянии составной конструкции. Как и в [18, 20], это вызвано тем, что q должно входить в правую часть формулы (5) (см. равенство (5) в [20]), но при этом в качестве сомножителя содержит выражение, совпадающее с левой частью уравнения (7), в силу выполнения которого величина q и выпадает из рассмотрения. Следовательно, вариационный принцип (5)–(11) не позволяет построить полное решение исследуемой задачи: значение q при этом остается не определенным, хотя аналитические решения, полученные в [14, 16], позволяют его рассчитать. Как показывает верификация, проведенная в [19, 20], даже при неполноте решения вариационный принцип (5)–(11) позволяет определить значение параметра p^* с приемлемой для инженерных приложений точностью (до 1% и даже точнее).

Как и в [18–20], для получения решения рассматриваемой задачи требуется предварительно определить координаты угловых точек $\sigma_{1,l}^{(m)}$ и $\sigma_{2,l}^{(m)}$ ($1 \leq l \leq N^{(m)}$) кусочно-линейных кривых текучести композиции в каждом m -м слое пластины при ПНС. В общем случае это можно сделать методом, изложенным в [28], если кривые текучести материалов всех фаз композиции аппроксимированы также кусочно-линейно. В частном случае, когда кривая текучести ортотропного связующего в m -м слое является шестиугольником, соответствующим модифицированному критерию Треска [25] (см. рис. 2а в [20]) с пределами текучести $\sigma_{0,j}^{\pm(m)} > 0$ при растяжении (+) и сжатии (–) в радиальном ($j = 1$) и окружном ($j = 2$) направлениях, а пределы текучести изотропных волокон k -го семейства имеют значения $\sigma_{[k]}^{+(m)}$ и $\sigma_{[k]}^{-(m)}$ при растяжении и сжатии соответственно ($\sigma_{[k]}^{\pm(m)} > 0, k = 1, 2, 1 \leq m \leq M$), можно ис-

пользовать упрощенные (по сравнению с [28]) структурные соотношения из [20]. Так, при спиральном армировании m -го слоя со структурой $\psi_2^{(m)}(r) = -\psi_1^{(m)}(r)$, $\omega_2^{(m)}(r) = \omega_1^{(m)}(r)$ и $\sigma_{[2]}^{\pm(m)} = \sigma_{[1]}^{\pm(m)}$ ($R_0 \leq r \leq R_1$) значения $\sigma_{1,l}^{(m)}$ и $\sigma_{2,l}^{(m)}$ в неравенствах (8) рассчитываются по формулам (19), (20) из [20] с учетом введенных здесь обозначений. При радиально-окружной укладке волокон в m -м слое значения $\sigma_{1,l}^{(m)}$ и $\sigma_{2,l}^{(m)}$ вычисляются по формулам (21) и (22) из [20] (при этом возможно $\sigma_{[2]}^{\pm(m)} \neq \sigma_{[1]}^{\pm(m)}$). Если материал связующего является изотропным, но по-разному сопротивляется растяжению и сжатию ($\sigma_{01}^{+(m)} = \sigma_{02}^{+(m)}$ и $\sigma_{01}^{-(m)} = \sigma_{02}^{-(m)}$), то кривая текучести для него при ПНС представляет собой шестиугольник, соответствующий критерию Ху [24], из которого при выполнении равенств $\sigma_{01}^{+(m)} = \sigma_{02}^{+(m)} = \sigma_{01}^{-(m)} = \sigma_{02}^{-(m)}$ следует условие текучести Треска [7, 26, 27].

Замечание 2. При наличии необходимых экспериментальных данных деградацию свойств КМ-пластины (значения $\sigma_{1,l}^{(m)}$ и $\sigma_{2,l}^{(m)}$, $1 \leq l \leq N^{(m)}$) вследствие ее контакта с агрессивной средой можно рассчитать, например, с использованием моделей, предложенных в [23] и основанных на идее диффузии атомов (в частности, водорода) из агрессивной жидкости в материал конструкции, что вызывает изменение ее механических (пластических) свойств. Начально-краевые задачи диффузии хорошо изучены в теории уравнений математической физики, поэтому не будем на них подробно останавливаться. В рамках рассматриваемой модели жесткопластического поведения армированной пластины учесть влияние деформированного состояния конструкции на диффузионные процессы в ней невозможно, а значит, задачи расчетов диффузии атомов агрессивной среды в пластину и ее несущей способности не связаны и можно предполагать, что деградированное состояние изделия в данный момент времени известно из предварительного решения задачи о диффузии (как это, по аналогии, традиционно предполагается и при решении несвязанных задач термоупругости [22]). Некоторые упрощенные и приемлемые с инженерной точки зрения методы решения задачи диффузии приведены в [23]. Поэтому не будем акцентировать внимание на этой проблеме, а в дальнейшем будем предполагать, что на текущий момент времени пластические свойства деградированных компонентов композиции каким-то образом уже рассчитаны и известны.

Минимум функционала (5) при ограничениях-неравенствах (8) и ограничениях-равенствах (6), (7), (9)–(11) будем искать численно с использованием теории линейного программирования [7, 18, 20, 21]. Для этого дополнительно дискретизируем поставленную задачу на условный экстремум: введем на отрезке $r \in [R_0, R_1]$ равномерную сетку с шагом $\Delta = (R_1 - R_0)/(K - 1)$ и узлами $r_k = r_1 + (k - 1)\Delta$ ($r_1 = R_0$, $r_K = R_1$, $k = 1, 2, \dots, K$), где K – количество узлов сетки. После этого интегралы в равенствах (5)–(7) аппроксимируем конечными суммами с использованием формулы трапеций. Производные в неравенствах (8), граничных условиях (10), (11) и в соотношениях (5), (6) при учете последнего выражения (4) аппроксимируем их конечно-разностными аналогами так, как это описано в [20] после формулы (18). Затем дискретный аналог сформулированной задачи может быть решен одним из методов линейного программирования [21].

Заключение

Сформулирована задача определения верхней (кинематической) границы несущей способности плоских конструкций, состоящих из слоистых кольцевых изгибаемых

пластин, внутреннее отверстие в которых закрыто жесткой вставкой, и контактирующих с несжимаемой жидкостью (возможно, агрессивной). Тонкие слои могут иметь переменную толщину и усилены двумя семействами волокон либо по спиральным, радиально-симметричным траекториям (арматура разных семейств при этом изготовлена из одного и того же материала), либо по радиальным и/или окружным траекториям (в этом случае волокна могут быть изготовлены из разных материалов). В поперечном направлении слоистая пластина может и не обладать структурной симметрией относительно срединной плоскости. Материалы фаз композиции каждого слоя жесткопластические и в общем случае могут иметь разные пределы текучести при растяжении и сжатии; материал связующего при этом может обладать цилиндрической пластической анизотропией. Деформирование компонентов композиции ассоциировано с кусочно-линейными критериями текучести. Использование модели многослойной пластины позволяет, в частности, исследовать предельные состояния рассматриваемых составных конструкций, в которых в процессе длительного контакта с агрессивной средой произошла деградация (изменение) пластических свойств в поперечном направлении.

Для расчета предельно допустимой нагрузки, выдерживаемой такими конструкциями, использован вариационный принцип минимума виртуальной мощности. Проведена дискретизация поставленной задачи на условный экстремум, после чего она сведена к проблеме теории линейного программирования, которая решена симплекс-методом Данцига [21]. Так как разработанная в настоящем исследовании модель является, по сути, обобщением модели из [20], то ее тестирование в случае использования лишь двух фиктивных слоев полностью совпадает с верификацией, проведенной в [20], где продемонстрирована высокая точность (порядка 1%) совпадения численных расчетов с аналитическими результатами, полученными в [14].

Список литературы

1. *Composites: State of Art*. Eds. L.W. Weeton, E. Scala. New York: Metallurgical Society of AIME, 1974. 365 p.
2. *Композиционные материалы: Справочник*. Под ред. Д.М. Карпиноса. Киев: Наукова думка, 1985. 592 с.
3. Braestrup M.W. Concrete plasticity – A historical perspective. *Structural Concrete*. 2021. Vol. 22. No 5. P. 2508–2525. DOI:10.1002/suco.202100444.
4. Хазов П.А., Ведяйкина О.И., Помазов А.П., Кожанов Д.А. Упругопластическое деформирование сталебетонных балок с локальным смятием при трехточечном изгибе. *Проблемы прочности и пластичности*. 2024. Т. 86. №1. С. 71–82. DOI: 10.32326/1814-9146-2024-86-1-71-82.
5. Mroz Z., Shamiev F.G. Simplified yield conditions for fibre-reinforced plates and shells. *Archiwum Inzynierii Ladowej*. 1979. Vol. 25. No 3. P. 463–476.
6. Brassart L., Stainier L., Doghri I., Delannay L. Homogenization of elasto-(visco) plastic composites based on an incremental variational principle. *International Journal of Plasticity*. 2012. Vol. 36. P. 86–112. <https://doi.org/10.1016/J.IJPLAS.2012.03.010>.
7. Ерхов М.И. *Теория идеально пластических тел и конструкций*. М.: Наука, 1978. 352 с.
8. Vasiliev V.V., Morozov E. *Advanced Mechanics of Composite Materials and Structural Elements*. Amsterdam: Elsevier, 2013. 412 p.
9. Романова Т.П. Моделирование динамического изгиба жесткопластических армированных слоистых круглых пластин с произвольным отверстием на вязком основании при взрывных нагрузках. *Проблемы прочности и пластичности*. 2017. Т. 79. № 3. С. 267–284.
10. Ho P.L.H., Le C.V., Tran-Cong T. Limit state analysis of reinforced concrete slabs

using an integrated radial basis function based mesh-free method. *Applied Mathematical Modelling*. 2018. Vol. 53. P. 2168–2168-11. DOI: 10.1016/j.apm.2017.08.006.

11. Hosseini H.R., Amoushahi H., Azhari M. Nonlinear effect of low-velocity impact on tapered laminated composite structures using spline finite strip method. *Structure*. 2022. Vol. 39. P. 739–764. <https://doi.org/10.1016/j.istruc.2022.03.051>.

12. Kumar S., Rai A., Jain N. Yield line analysis of two way reinforced concrete slab of three-sides supported with various loading conditions. *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science*. 2024. Vol. 1326. No 1. Article No 012034. DOI: 10.1088/1755-1315/1326/1/012034.

13. Romanova T.P. Mathematical modeling the limit and dynamic behavior of rigid plastic reinforced laminated annular plates with free parts of contour under explosive loads. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 2026. Vol. 33. Iss. 1. Article No 2588655. DOI: 10.1080/15376494.2025.2588655.

14. Hodge P.G., Chang-Kuei Sun. Yield-point load of a circular plate seating an incompressible fluid. *International Journal of Mechanical Sciences*. 1967. Vol. 9. Iss. 7. P. 405–414.

15. Немировский Ю.В., Романова Т.П. Несущая способность усиленных ледяных круглых пластин. *Проблемы прочности и пластичности*. 2011. Вып. 73. С. 25–34.

16. Джагангиров А.А. Несущая способность усиленной трехслойной волокнистой круглой пластинки, заземленной по контуру и находящейся на несжимаемой среде. *Механика машин, механизмов и материалов*. 2015. №4 (33). С. 50–54.

17. Ченг Ванг, Тонгуи Янг, Ван Ли, Ли Тао, Абузяров М.Х., Кочетков А.В. Моделирование упругопластического деформирования элементов пространственных конструкций при импульсном взаимодействии с жидкостью на основе метода Годунова повышенной точности. *Проблемы прочности и пластичности*. 2019. Т. 81. №4. С. 489–500. DOI: 10.32326/1814-9146-2019-81-4-488-499.

18. Янковский А.П. Определение верхней границы несущей способности изгибаемых армированных металлокомпозитных кольцевых пластин, контактирующих с жидкой несжимаемой средой. 1. Постановка задачи и метод расчета. *Проблемы прочности и пластичности*. 2024. Т. 86. №3. С. 270–284. DOI: 10.32326/1814-9146-2024-86-3-270-284.

19. Янковский А.П. Определение верхней границы несущей способности изгибаемых армированных металлокомпозитных кольцевых пластин, контактирующих с жидкой несжимаемой средой. 2. Анализ результатов расчетов. *Проблемы прочности и пластичности*. 2024. Т. 86. № 4. С. 445–460. DOI: 10.32326/1814-9146-2024-86-4-445-460.

20. Янковский А.П. Численное определение несущей способности армированных кольцевых пластин, покоящихся на несжимаемом жидком основании и по-разному сопротивляющихся растяжению и сжатию. *Вычислительная механика сплошных сред*. 2025. Т. 18. №2. С. 155–172. DOI: 10.7242/1999-6691/2025.18.2.12.

21. Зуховицкий С.И., Авдеева Л.И. *Линейное и выпуклое программирование*. М.: Наука, 1964. 348 с.

22. Григоренко Я.М. *Изотропные и анизотропные слоистые оболочки вращения переменной жесткости*. Киев: Наукова думка, 1973. 228 с.

23. Локощенко А.М. *Ползучесть и длительная прочность металлов*. М.: Физматлит, 2016. 504 с.

24. Hu L.W. Modified Tresca's yield condition and associated flow rules for anisotropic materials and applications. *Journal of the Franklin Institute*. 1958. Vol. 265. No 3. P. 187–204.

25. Ramu S.A., Iyengar K.J. Plastic response of orthotropic spherical shells under blast loading. *Nuclear Engineering and Design*. 1979. Vol. 55. No 3. P. 363–373.

26. Chakrabarty J. *Applied Plasticity*. New York: Springer, 2010. 755 p.

27. Ишлинский А.Ю., Ивлев Д.Д. *Математическая теория пластичности*. М.: Физматлит, 2001. 707 с.

28. Romanova T.P., Yankovskii A.P. Piecewise-linear yield loci of angle-ply reinforced medium of different-resisting rigid-plastic materials at 2D stress state. *Mechanics of Solids*. 2020. Vol. 55. No 8. P. 1235–1252.

References

1. *Composites: State of Art*. Eds. L.W. Weeton, E. Scala. New York. Metallurgical Society of AIME. 1974. 365 p.
2. *Kompozitsionnye materialy. Spravochnik [Composite Materials. Reference Book]*. Ed. D.M. Karpinos. Kiev. Naukova Dumka Publ. 1985. 592 p. (In Russian).
3. Braestrup M.W. Concrete plasticity – A historical perspective. *Struct. Concr.* 2021. Vol. 22. No 5. P. 2508–2525. DOI:10.1002/suco.202100444.
4. Khazov P.A., Vedyaykina O.I., Pomazov A.P., Kozhanov D.A. Uprugoplasticheskoe deformirovanie stalebetonnykh balok s lokalnym smyatiem pri trekhtochechnom izgibe [Elastic-plastic deformation of steel-concrete beams with local crumpling during three-point bending]. *Problemy prochnosti i plastichnosti [Problems of Strength and Plasticity]*. 2024. Vol. 86. No 1. P. 71–82 (In Russian).
5. Mroz Z., Shamiev F.G. Simplified yield conditions for fibre-reinforced plates and shells. *Arch. Inz. Lad.* 1979. Vol. 25. No 3. P. 463–476.
6. Brassart L., Stainier L., Doghri I., Delannay L. Homogenization of elasto-(visco) plastic composites based on an incremental variational principle. *Int. J. Plast.* 2012. Vol. 36. P. 86–112. <https://doi.org/10.1016/j.IJPLAS.2012.03.010>.
7. Erkhov M.I. *Teoriya idealno plasticheskikh tel i konstruktsey [Theory of Ideally Plastic Bodies and Structures]*. Moscow. Nauka Publ. 1978. 352 p. (In Russian).
8. Vasiliev V.V., Morozov E. *Advanced Mechanics of Composite Materials and Structural Elements*. Amsterdam. Elsevier. 2013. 412 p.
9. Romanova T.P. Modelirovanie dinamicheskogo izgiba zhestkoplasticheskikh armirovannykh sloistnykh kruglykh plastin s proizvolnym otverstiem na vyazkom osnovanii pri vzryvnykh nagruzkakh [Modeling of rigid-plastic dynamic bending of reinforced layered circular plates with arbitrary hole on viscous foundation under explosive loads]. *Problemy prochnosti i plastichnosti [Problems of Strength and Plasticity]*. 2017. Vol. 79. No 3. P. 267–284 (In Russian).
10. Ho P.L.H., Le C.V., Tran-Cong T. Limit state analysis of reinforced concrete slabs using an integrated radial basis function based mesh-free method. *Appl. Math. Model.* 2018. Vol. 53. P. 2168–1–2168–11 DOI: 10.1016/j.apm.2017.08.006.
11. Hosseini H.R., Amoushahi H., Azhari M. Nonlinear effect of low-velocity impact on tapered laminated composite structures using spline finite strip method. *Structure*. 2022. Vol. 39. P. 739–764. <https://doi.org/10.1016/j.istruc.2022.03.051>.
12. Kumar S., Rai A., Jain N. Yield line analysis of two way reinforced concrete slab of three-sides supported with various loading conditions. *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science*. 2024. Vol. 1326. No 1. Article No 012034. DOI: 10.1088/1755-1315/1326/1/012034.
13. Romanova T.P. Mathematical modeling the limit and dynamic behavior of rigid plastic reinforced laminated annular plates with free parts of contour under explosive loads. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 2026. Vol. 33. Iss. 1. Article No 2588655. DOI: 10.1080/15376494.2025.2588655.
14. Hodge P.G., Chang-Kuei Sun. Yield-point load of a circular plate seating an incompressible fluid. *Int. J. Mech. Sci.* 1967. Vol. 9. Iss. 7. P. 405–414.
15. Nemirovsky Yu.V., Romanova T.P. Nesushchaya sposobnost' usilennykh ledyanym kruglym plastin [Load-bearing capacity of reinforced ice round plates]. *Problemy prochnosti i plastichnosti [Problems of Strength and Plasticity]*. 2011. Iss. 73. P. 25–34 (In Russian).
16. Jahangirov A.A. Nesushchaya sposobnost' usilennoy trekhsloynnoy voloknistoy krugloy plastinki, zashchemlennoy po konturu i nakhodyashcheysya na neszhimayemoy srede [Carrying capacity of reinforced three layers circular composite plate clamped on edge and lying on non-compressible foundation]. *Mekhanika mashin, mekhanizmov i materialov [Mechanics of Machines, Mechanisms and Materials]*. 2015. No 4 (33). P. 50–54 (In Russian).
17. Cheng Wang, Tonghui Yang, Wan Li, Li Tao, Abuziarov M.Kh., Kochetkov A.V. Modelirovaniye uprugoplasticheskogo deformirovaniya elementov prostranstvennykh konstruktsey pri impul'snom vzaimodeystvii s zhidkost'yu na osnove metoda Godunova povyshennoy tochnosti [Modeling of elastic-plastic deformation of elements of spatial structures

during pulse interaction with fluid based on the Godunov's method of increased accuracy]. *Problemy prochnosti i plastichnosti* [Problems of Strength and Plasticity]. 2019. Vol. 81. No 4. P. 489–500 (In Russian).

18. Yankovskii A.P. Opredeleniye verkhney granitsy nesushchey sposobnosti izgibayemykh armirovannykh metallokompozitnykh kol'tsevykh plastin, kontaktiruyushchikh s zhidkoy neszhimayemoy sredoy. 1. Postanovka zadachi i metod rascheta [Determination of the upper limit of the load-loading capacity of bending reinforced metal-composite ring plates in contact with a liquid incompressible medium. 1. Problem formulation and calculation method]. *Problemy prochnosti i plastichnosti* [Problems of Strength and Plasticity]. 2024. Vol. 86. No 3. P. 270–284 (In Russian).

19. Yankovskii A.P. Opredeleniye verkhney granitsy nesushchey sposobnosti izgibayemykh armirovannykh metallokompozitnykh kol'tsevykh plastin, kontaktiruyushchikh s zhidkoy neszhimayemoy sredoy. 2. Analiz rezultatov raschetov [Determination of the upper limit of the load-loading capacity of bending reinforced metal-composite ring plates in contact with a liquid incompressible medium. 2. Analysis calculation results]. *Problemy prochnosti i plastichnosti* [Problems of Strength and Plasticity]. 2024. Vol. 86. No 4. P. 445–460 (In Russian).

20. Yankovskii A.P. Chislennoye opredeleniye nesushchey sposobnosti armirovannykh kol'tsevykh plastin, pokoyashchikhsya na neszhimayemom zhidkom osnovanii i po-raznomu soprotivlyayushchikhsya rastyazheniyu i szhatiyu [Numerical determination of the bearing capacity of reinforced annular plates resting on an incompressible liquid base and differently resistant to tension and compression]. *Vychislitel'naya mekhanika sploshnykh sred* [Comput. Contin. Mech]. 2025. Vol. 18. No 2. P. 155–172 (In Russian).

21. Zuhovickii S.I., Avdeeva L.I. *Linejnoe i vypukloe programmirovaniye* [Linear and Convex Programming]. Moscow. Nauka Publ. 1964. 348 p. (In Russian).

22. Grigorenko Ya.M. *Izotropnyye i anizotropnyye sloistyye obolochki vrashcheniya perezmennoy zhestkosti* [Isotropic and Anisotropic Layered Shells of Rotation of Variable Rigidity]. Kiev. Naukova dumka Publ. 1973. 228 p. (In Russian).

23. Lokoshchenko A.M. *Polzuchest i dlitel'naya prochnost metallov* [Creep and Long-Term Strength of Metals]. Moscow. Fizmatlit Publ. 2016. 504 p. (In Russian).

24. Hu L.W. Modified Tresca's yield condition and associated flow rules for anisotropic materials and applications. *J. Franklin Inst.* 1958. Vol. 265. No 3. P. 187–204.

25. Ramu S.A., Iyengar K.J. Plastic response of orthotropic spherical shells under blast loading. *Nuclear Engineering and Design*. 1979. Vol. 55. No 3. P. 363–373.

26. Chakrabarty J. *Applied Plasticity*. New York. Springer. 2010. 755 p.

27. Ishlinskiy A.Yu., Ivlev D.D. *Matematicheskaya teoriya plastichnosti* [Mathematical Theory of Plasticity]. Moscow. Fizmatlit Publ. 2001. 707 p. (In Russian).

28. Romanova T.P., Yankovskii A.P. Piecewise-linear yield loci of angle-ply reinforced medium of different-resisting rigid-plastic materials at 2D stress state. *Mechanics of Solids*. 2020. Vol. 55. No 8. P. 1235–1252.

**CALCULATION OF THE LOAD-BEARING CAPACITY
OF BENDING LAYERED-FIBER RING PLATES IN CONTACT
WITH AN AGGRESSIVE INCOMPRESSIBLE FLUID.
1. FORMULATION OF THE PROBLEM AND SOLUTION METHOD***

Yankovskii A.P.

*Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics the SB RAS,
Novosibirsk, Russian Federation*

yankovsky_ap@itam.nsc.ru

Received by the Editor 2026/03/30

A problem on a conditional extremum is formulated, which makes it possible to calculate the upper limit of the ultimate load withstood by a bending layered annular plate in contact with an aggressive incompressible fluid. The internal opening in the composite structure is tightly closed by an absolutely rigid insert. The plate can be connected to the insert either hingedly or rigidly. The outer edge of the structure is clamped or hinged; its vertical displacement is permissible: a movable clamp or hinge. In the limit state of the plate, the liquid cannot flow from one of its front surfaces to the other. The layers in the plate have variable thickness and are reinforced with fibres in different ways. In each layer, the reinforcement structure is radially- and axisymmetric. The materials of the composition phases are rigid-plastic, having different yield strengths under tension and compression; the binder can be orthotropic. Plastic flow in the components of the composition is associated with modified Tresca's flow conditions. In the limit state, the kinematics of the composite structure is described by the equations of the classical theory of plate bending. The following reinforcement schemes for each layer are considered: 1) two families of reinforcement made of the same material are laid in radially symmetrical spirals; 2) in radial and/or circumferential directions (the fiber materials may be different). The discretization of the problem was carried out, which allowed us to reduce it to a problem of linear programming theory. It is shown that the resulting numerical solution is incomplete, since it does not allow one to determine the magnitude of the liquid resistance in the ultimate state of the structure; despite this, the bearing capacity of the plate can still be calculated with an accuracy of about 1%.

Keywords: annular laminated plate, reinforcement, composite structure, contact with aggressive liquid, rigid-plastic materials, piecewise linear yield conditions, plastic anisotropy, limit equilibrium, degradation of plastic properties.

*Completed within the framework of the state assignment (state registration No 124021400036-7).