УДК 539.3 DOI: 10.32326/1814-9146-2026-88-3-16-25

ВНЕДРЕНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ШТАМПА С ПЛОСКОЙ ПОДОШВОЙ И ОКРУГЛЫМ КРАЕМ В НЕОДНОРОДНОЕ ПО ГЛУБИНЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО*

© 2026 г. **Кренев Л.И., Айзикович С.М., Кренев Д.А.**

Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону, Российская Федерация

lkrenev@yandex.ru

Поступила в редакцию 10.02.2026

Рассмотрена осесимметричная статическая задача о внедрении гладкого цилиндрического штампа с плоской подошвой в неоднородный слой, сцепленный с упругим полупространством. Край штампа предполагается закругленным. Модуль Юнга и коэффициент Пуассона слоя изменяются по его глубине по произвольно заданным законам. Исследуется влияние закругления края плоской подошвы кругового штампа на концентрацию напряжений на его крае.

Задача исследуется аналитически. Применяется метод интегральных преобразований. Полученная в результате система обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами решается численно с использованием специально разработанного алгоритма. Далее решение этого парного интегрального уравнения ищется в приближенном виде с помощью разработанного авторами специального асимптотического метода.

С помощью специальных преобразований парное интегральное уравнение приводится к более простому виду. Затем ядро аппроксимируется дробно-рациональным выражением. Решение системы дифференциальных уравнений, полученной с помощью операционного исчисления, представляется суммой общего решения однородного и частного решения неоднородного уравнений на отдельных участках области определения с неизвестными комплексными константами. Обратным преобразованием Фурье находится выражение для трансформанты распределения контактных давлений, затем с помощью обратного преобразования Ханкеля находится распределение контактных давлений. Подстановкой найденного решения в исходное уравнение (в упрощенном виде) строится система линейных уравнений для определения неизвестных констант.

На основе построенного решения выполнены расчеты распределения нормальных контактных напряжений под штампом. Рассмотрены случаи различной жесткости приповерхностного слоя, а также проанализировано, как изменение радиуса закругления края штампа влияет на распределение контактного давления.

Ключевые слова: интегральные уравнения, неоднородное полупространство, слой, край штампа, подошва кругового штампа.

* Выполнено при поддержке РНФ (грант 22-19-00732-П).

Введение

Контактные задачи теории упругости остаются востребованным направлением механики в связи с тем, что именно такие модели обычно описывают взаимодействие объектов с деформируемым основанием. Аналитическое решение подобных задач необходимо, во-первых, с точки зрения качественного анализа напряженно-деформированного состояния и, во-вторых, для корректной интерпретации результатов экспериментальных испытаний, выполняемых с использованием инденторов различной формы.

Классическая осесимметричная задача о вдавливании цилиндрического штампа с плоской подошвой с острой и гладкой кромкой в однородное упругое полупространство впервые была рассмотрена И.Я. Штаерманом [1]. В публикациях [2–4] были обобщены основные подходы к решению контактных задач. Также сохраняется значительный интерес к задачам о внедрении штампов с различной конфигурацией основания и механическими характеристиками, изменяющимися по глубине [5–14].

Эффективный подход к решению контактных задач для полупространства с произвольным изменением свойств по глубине был представлен в статьях [15–20]. В основу метода положен двусторонний асимптотический метод, позволяющий свести исходную смешанную краевую задачу к интегральному уравнению и затем построить его приближенное аналитическое решение. Следующий этап предполагает численное определение трансформанты ядра соответствующего интегрального уравнения. Далее трансформанта аппроксимируется специальным аналитическим выражением, а уравнение с аппроксимированным ядром решается в замкнутом виде. Явный вид решения дает возможность аккуратно исследовать характеристики контактного взаимодействия. В настоящей статье этот метод применяется к задаче о внедрении цилиндрического штампа с плоской подошвой, край которого закруглен.

Постановка задачи о внедрении штампа с плоской подошвой и округлым краем в непрерывно-неоднородное по глубине полупространство

Рассмотрим упругое полупространство Ω, свойства которого изменяются по глубине в пределах прилегающего к поверхности слоя толщиной H, а за его пределами постоянны. В его поверхность внедряется штамп с плоской подошвой радиуса r_1, округлый край которого описывается параболической поверхностью; a – радиус области контакта, R – радиус кривизны закругления на краю штампа с плоской подошвой (рис. 1). Поверхность штампа может быть представлена функциями:

$$\begin{gathered} z = \phi_1(r) = -\delta, \quad r \le r_1, \\ z = \phi_2(r) = -\delta + \frac{(r - r_1)^2}{2R}, \quad r_1 < r \le a. \end{gathered} \tag{1}$$

Коэффициенты Ламе неоднородного по глубине полупространства $\mathrm{M}(z)$ и $\Lambda(z)$ имеют вид:

$$\mathrm{M}(z) = \mathrm{M}(-H) = \mathrm{M}^S,\ \Lambda(z) = \Lambda(-H) = \Lambda^S, \quad -\infty < z \le -H,$$

$$\mathrm{M}(z) = \mathrm{M}^C(z), \quad \Lambda(z) = \Lambda^C(z), \quad -H < z \le 0,$$

где H – толщина неоднородного слоя, сцепленного с подстилающим однородным

полупространством. Индекс C соответствует неоднородному слою, S – подстилающему однородному полупространству.

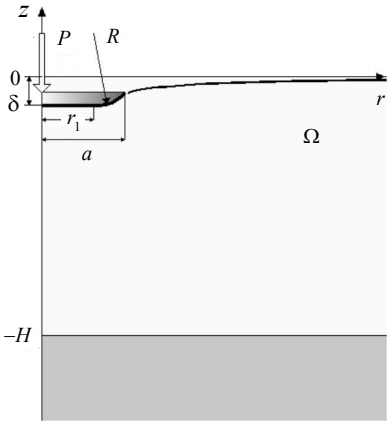


Рис. 1. Внедрение цилиндрического штампа с плоской подошвой и округлым краем в функционально-градиентное покрытие упругого полупространства

Под действием силы P штамп перемещается в направлении оси z на величину δ. Значения величин δ и P определяются из условия равенства нулю контактных напряжений на краю штампа.

Граничные условия при сделанных предположениях имеют вид:

$$z=0,\ \tau_{zr}=\tau_{z\varphi}=0,\quad \begin{cases}\sigma_z=0, & r>a,\\ w=-\delta, & 0\le r\le r_1,\\ w=-\delta+(r-r_1)^2/(2R), & r_1<r\le a.\end{cases} \tag{2}$$

На границе слоя с однородным полупространством при $z = –H$ в силу непрерывности должны выполняться условия сопряжения по смещениям и их производным:

$$\sigma_z^C(r,-H)=\sigma_z^S(r,-H),\quad \tau_{rz}^C(r,-H)=\tau_{rz}^S(r,-H),$$
$$u^C(r,-H)=u^S(r,-H),\quad w^C(r,-H)=w^S(r,-H).$$

При $(r,-z)\to\infty$ смещения, деформации и напряжения исчезают:

$$\lim_{z\to-\infty,\,r\to\infty}(u,w,\varepsilon_r,\varepsilon_\varphi,\varepsilon_z,\varepsilon_{rz},\sigma_r,\sigma_\varphi,\sigma_z,\tau_{rz})=0.$$

С учетом вышеописанных условий требуется определить распределение контактных нормальных напряжений под штампом.

Построение приближенного численно-аналитического решения задачи о внедрении штампа с плоской подошвой и округлым краем в неоднородное по глубине полупространство

Согласно результатам, изложенным в [16, 17, 19], в нормированном на $\lambda = H/a$ виде поставленная задача сводится к решению системы парных интегральных уравнений:

$$\begin{cases} \int_0^\infty Q(\gamma)L(\lambda\gamma)J_0(r\gamma)d\gamma = \Delta(0)(-\delta),\ r \le r_1, \\ \int_0^\infty Q(\gamma)L(\lambda\gamma)J_0(r\gamma)d\gamma = \Delta(0)\left(-\delta + \dfrac{(r-r_1)^2}{2R}\right),\ r_1 < r \le 1, \\ \int_0^\infty Q(\gamma)J_0(r\gamma)\gamma d\gamma = 0,\ r > 1. \end{cases} \tag{3}$$

Здесь

$$\Delta(z) = \frac{G(z)}{1-\nu(z)} = \frac{0{,}5E(z)}{1-\nu(z)^2} = 2\mathrm{M}(z)\frac{\Lambda(z)+\mathrm{M}(z)}{\Lambda(z)+2\mathrm{M}(z)}.$$

С помощью операторов

$$\begin{gathered} U_1^t\varphi(r) = \frac{d}{dt}\int_0^t \frac{r\varphi(r)dr}{\sqrt{t^2-r^2}}, \quad U_1^t J_0(r\gamma) = \cos(t\gamma), \\ U_1^t 1 = 1, \quad U_1^t r = \frac{\pi}{2}t, \quad U_1^t r^2 = 2t^2, \\ U_1^{t-r_1}\varphi(r) = \frac{d}{dt}\int_0^{t-r_1} \frac{r\varphi(r)dr}{\sqrt{(t-r_1)^2-r^2}}, \quad U_1^{t-r_1} J_0(r\gamma) = \cos((t-r_1)\gamma), \end{gathered} \tag{4}$$

$$\begin{gathered} U_1^{t-r_1} 1 = 1, \quad U_1^{t-r_1} r = \frac{\pi}{2}(t-r_1), \quad U_1^{t-r_1} r^2 = 2(t-r_1)^2 \\ U_2^t\varphi(r) = \int_t^\infty \frac{r\varphi(r)dr}{\sqrt{r^2-t^2}}, \quad U_2^t \mathrm{J}_0(r\gamma) = \gamma^{-1}\cos(t\gamma) \end{gathered} \tag{5}$$

преобразуем (3) к виду

$$\begin{cases} \int_0^\infty Q(\gamma)L(\lambda\gamma)\cos(t\gamma)\,d\gamma = g_1(t) = \Delta(0)(-\delta),\ 0 \le t \le r_1, \\ \int_0^\infty Q(\gamma)L(\lambda\gamma)\cos((t-r_1)\gamma)\,d\gamma = g_2(t-r_1) = \Delta(0)\left(-\delta + \dfrac{1}{R}(t-r_1)^2\right),\ r_1 < t \le 1, \\ \int_0^\infty Q(\gamma)\cos(t\gamma)\,d\gamma = 0,\ 1 < t < \infty. \end{cases} \tag{6}$$

В случае однородного полупространства $L(\lambda\gamma) = 1$. В случае неоднородного по глубине полупространства аппроксимируем трансформанты ядра парного интегрального уравнения отношением двух полиномов второго порядка:

$$L(\lambda\gamma) = L_N(\lambda\gamma) = \frac{R_1(\lambda^2\gamma^2)}{R_2(\lambda^2\gamma^2)} = \prod_{i=1}^{N}\frac{\lambda^2\gamma^2 + A_i^2}{\lambda^2\gamma^2 + B_i^2}. \tag{7}$$

Введем обозначения:

$$q(t) = \begin{cases} q_1(t) = \int_0^\infty Q(\alpha)\cos(\alpha t)d\alpha, \quad 0 \le t \le r_1, \\ q_2(t-r_1) = \int_0^\infty Q(\alpha)\cos(\alpha(t-r_1))d\alpha, \quad r_1 < t \le 1. \end{cases} \tag{8}$$

Тогда выражение (6) можно представить в виде

$$R_1(-D)q_1(t) = R_2(-D)g_1(t), \quad D = \frac{d^2}{dt^2}, \quad t \in [0, r_1],$$
$$R_1(-D)q_2(t-r_1) = R_2(-D)g_2(t-r_1), \quad D = \frac{d^2}{dt^2}, \quad t \in [0, 1], \tag{9}$$

где полиномы R_1 и R_2 определяются, как в (7).

Решение дифференциальных уравнений (9) имеет вид:

$$q(t) = \begin{cases} q_1(t) = \left[\sum_{i=1}^{N} c_{i,1} \operatorname{ch}(A_i \lambda^{-1} t) - \Delta(0) L_N^{-1}(0) \delta \right], & 0 \le t \le r_1, \\ q_2(t-r_1) = \left[\sum_{i=1}^{N} c_{i,2} \operatorname{ch}(A_i \lambda^{-1}(t-r_1)) + \right. & \\ \left. + \frac{\Delta(0)}{L_N(0)} \left(-\delta + \frac{2}{R} S_1 + \frac{1}{R}(t-r_1)^2 \right) \right], & r_1 < t \le 1, \end{cases} \tag{10}$$

где

$$S_1 = \lambda^2 \sum_{i=1}^{N} (A_i^{-2} - B_i^{-2}),$$

а коэффициенты $c_{i,j}$ ($j = 1, 2,\ i = 1, 2, ..., N$) неизвестны и определяются в дальнейшем при подстановке этого вида решения в интегральное уравнение (6). Введем обозначение $\widetilde{a}_i = A_i \lambda^{-1}, \widetilde{b}_i = B_i \lambda^{-1}$.

Применяя обратное преобразование Фурье в (10), получим выражение для $Q(\gamma)$:

$$Q(\gamma) = \frac{2}{\pi} \left(\sum_{i=1}^{N} c_{i,1} \frac{\widetilde{a}_i \operatorname{sh}(\widetilde{a}_i r_1) \cos(\gamma r_1) + \gamma \sin(\gamma r_1) \operatorname{ch}(\widetilde{a}_i r_1)}{\gamma^2 + \widetilde{a}_i^2} - \delta \frac{\Delta(0)}{L_N(0)} \frac{\sin(\gamma r_1)}{\gamma} \right) +$$
$$+ \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^{N} c_{i,2} \left(\frac{\widetilde{a}_i \operatorname{sh}(\widetilde{a}_i (1-r_1)) \cos\gamma + \gamma \sin\gamma \operatorname{ch}(\widetilde{a}_i (1-r_1))}{\gamma^2 + \widetilde{a}_i^2} - \frac{\gamma \sin(\gamma r_1)}{\gamma^2 + \widetilde{a}_i^2} \right) +$$
$$+ \frac{2}{\pi} \frac{\Delta(0)}{L_N(0)} \left(-\delta + \frac{2}{R} S_1 \right) \left(\frac{\sin\gamma}{\gamma} - \frac{\sin(\gamma r_1)}{\gamma} \right) +$$
$$+ \frac{2}{\pi} \frac{\Delta(0)}{L_N(0)} \frac{1}{R} \left(\frac{(1-r_1)^2 \sin\gamma}{\gamma} + \frac{2(\gamma \cos\gamma - \sin\gamma)}{\gamma^3} - \frac{2(\gamma r_1 \cos\gamma - \sin(\gamma r_1))}{\gamma^3} \right). \tag{11}$$

Распределение контактных нормальных напряжений получим обратным преобразованием Ханкеля

$$q_1(r) = \int_0^\infty Q(\gamma) J_0(\gamma r) \gamma d\gamma, \quad 0 \le r \le r_1,$$
$$q_2(r) = \int_0^\infty Q(\gamma) J_0(\gamma r) \gamma d\gamma, \quad r_1 < r \le 1. \tag{12}$$

Подставляя (11) в (12), получим соотношения

$$q_1(r) = \int_0^\infty Q(\gamma) J_0(\gamma r) d\gamma, \quad 0 < r < r_1,$$

$$q_1(r)=\left(\sum_{i=1}^{N}c_{i,1}\widetilde{a}_i\int_r^{r_1}\frac{\operatorname{sh}(\widetilde{a}_i x)dx}{\sqrt{x^2-r^2}}+\sum_{i=1}^{N}c_{i,2}\widetilde{a}_i\int_{r_1}^{1}\frac{\operatorname{sh}(\widetilde{a}_i(x-r_1))dx}{\sqrt{x^2-r^2}}\right)-$$

$$-\frac{2}{\pi}\frac{\Delta(0)}{L_N(0)}\frac{2}{R}\left(\frac{1-r_1^{\,2}}{\sqrt{r_1^{\,2}-r^2}+\sqrt{1-r^2}}-r_1(\operatorname{Arch}(1/r)-\operatorname{Arch}(r_1/r))\right),\qquad(13)$$

$$q_2(r)=\int_0^{\infty}Q(\gamma)J_0(\gamma r)d\gamma,\quad r>r_1,$$

$$q_2(r)=\left(\sum_{i=1}^{N}c_{i,2}\widetilde{a}_i\left(\int_r^{1}\frac{\operatorname{sh}(\widetilde{a}_i(x-r_1))dx}{\sqrt{x^2-r^2}}\right)\right)-\frac{2}{\pi}\frac{\Delta(0)}{L_N(0)}\frac{2}{R}\left(\sqrt{1-r^2}-r_1\operatorname{Arch}(1/r)\right).$$

Выражения (13) получены в предположении, что контактные напряжения ограничены. Отсюда:

$$\sum_{i=1}^{N}c_{i,1}\operatorname{ch}(\widetilde{a}_i r_1)-\sum_{i=1}^{N}c_{i,2}-\Delta(0)L_N^{-1}(0)\frac{2}{R}S_1=0.\qquad(14)$$

Смещение δ также определено из условия отсутствия напряжений на границе зоны контакта $q_2(1)=0$:

$$\delta=\frac{2}{R}S_1+\frac{1}{R}(1-r_1)^2+\Delta(0)^{-1}L_N(0)\sum_{i=1}^{N}c_{i,2}\operatorname{ch}(\widetilde{a}_i(1-r_1)).\qquad(15)$$

Постоянные $c_{i,j}$ $(j=1,2,\ i=1,2,...,N)$ определяются из системы линейных алгебраических уравнений, получаемой подстановкой в (6) выражения для $Q(\gamma)$ (11):

$$\sum_{i=1}^{N}c_{i,1}\frac{\widetilde{a}_i^2\operatorname{ch}(\widetilde{a}_i r_1)}{\widetilde{b}_k^2-\widetilde{a}_i^2}-\sum_{i=1}^{N}\frac{c_{i,2}\widetilde{a}_i^2}{\widetilde{b}_k^2-\widetilde{a}_i^2}=\frac{\Delta(0)}{L_N(0)}\frac{2}{R}\left(\frac{1}{\widetilde{b}_k^2}\right),$$

$$\sum_{i=1}^{N}c_{i,2}\frac{\widetilde{b}_k\widetilde{a}_i\operatorname{sh}(\widetilde{a}(1-r_1))+\widetilde{a}_i^2\operatorname{ch}(\widetilde{a}_i(1-r_1))}{\widetilde{b}_k^2-\widetilde{a}_i^2}=-\frac{\Delta(0)}{L_N(0)}\frac{2}{R}\left(\frac{1+\widetilde{b}_k(1-r_1)}{\widetilde{b}_k^2}\right).\qquad(16)$$

На рис. 2 приведены результаты расчетов контактных напряжений при внедрении штампов с гладким и острым краем как в однородное полупространство, так и в жесткий и мягкий слои (E_C – модуль Юнга поверхностного слоя, E_S – модуль Юнга подстилающего полупространства). Цифрами на рис. 2 обозначено: *1* – гладкий край, мягкий слой ($E_C/E_S=0{,}5$); *2* – острый край, мягкий слой ($E_C/E_S=0{,}5$); *3* – гладкий край, однородное полупространство ($E_C/E_S=1{,}0$); *4* – острый край, однородное полупространство ($E_C/E_S=1{,}0$); *5* – гладкий край, жесткий слой ($E_C/E_S=2{,}0$); *6* – острый край, жесткий слой ($E_C/E_S=2{,}0$). Гладкий край – $r_1=0{,}9$, $R=1{,}0$; острый край – $\delta=0{,}01$.

Согласно формуле (15), при $R=1$ и $r_1=0{,}9$ смещение штампа с гладким краем $\delta=0{,}01$, поэтому при расчете штампа с острым краем задано аналогичное смещение. Смещение штампа с гладким краем при внедрении в мягкий и жесткий слои отличаются незначительно.

На рис. 3 показано влияние радиуса кривизны гладкого края штампа с плоской подошвой, внедряемого в жесткое покрытие однородной подложки, на распределение контактных напряжений. На рисунке цифрами обозначены кривые: *1* – для радиуса кривизны $R=0{,}25$, *2* – для $R=0{,}5$, *3* – для $R=1{,}0$, *4* – для $R=2{,}0$.

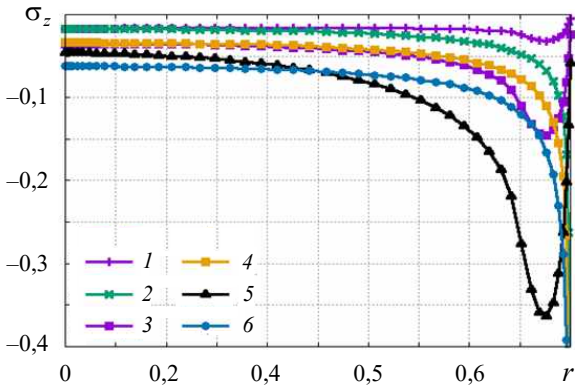


Рис. 2. Распределение контактного давления при внедрении цилиндрических штампов с плоской подошвой с гладким и острым краями

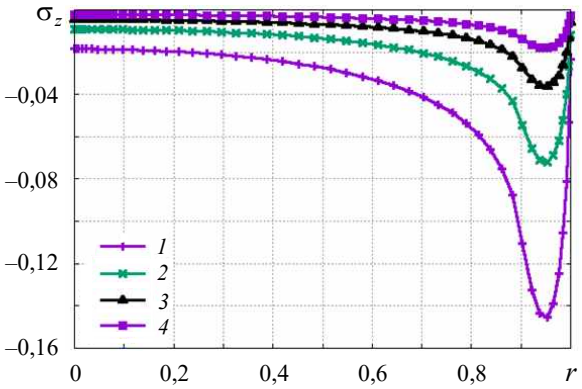


Рис. 3. Распределение контактного давления при внедрении цилиндрического штампа с плоской подошвой и гладким краем в жесткий слой ($E_C/E_S = 0{,}5$), $r_1 = 0{,}9$

Заключение

Результатом исследования стало построение приближенного асимптотического решения задачи о контактном взаимодействии составного цилиндрического штампа (с плоской подошвой и скругленной кромкой) с неоднородным по глубине упругим полупространством. На основе построенного решения выполнены расчеты контактных напряжений для различных вариантов изменения упругих характеристик в приповерхностной области и изменения кривизны скругленной кромки. Установлено, что не только изменение свойств основания по глубине, но и параметры закругления края штампа существенно влияют на распределения контактного давления, особенно на краю штампа. Проведено сравнение распределения контактных напряжений при внедрении штампов с плоской подошвой с округлым и острым краем при одинаковой глубине внедрения.

Список литературы

1. Штаерман И.Я. *Контактная задача теории упругости*. М.–Л.: Гостехиздат, 1949. 272 с.

2. Абрамян Б.Л., Александров В.М., Аменадзе Ю.А. и др. *Развитие теории контактных задач в СССР.* М.: Наука, 1976. 493 с.

3. Айзикович С.М., Александров В.М., Аргатов И.И. и др. *Механика контактных взаимодействий*. М.: Физматлит, 2001. 672 с.

4. Джонсон К.Л. *Механика контактного взаимодействия.* М.: Мир, 1989. 509 с.

5. Cömez İ. Analysis of stress and deformation of an exponentially graded viscoelastic coated half plane under indentation by a rigid flat punch indenter tip. *Mechanics of Time-Dependent Materials*. 2024. Vol. 28. P. 1271–1289. DOI: 10.1007/s11043-024-09682-8.

6. Brutti C. A theoretical model for elastic-perfectly plastic flat cylindrical punch indentation. *Mechanics of Materials.* 2021. Vol. 155. Article No 103770. DOI: 10.1016/j.mechmat.2021.103770.

7. Wang G.F., Niu X.R. Nanoindentation of soft solids by a flat punch. *Acta Mechanica Sinica.* 2015. Vol. 31. No 4. P. 531–535.

8. Ma Z., Liao H., Dang F. Effect of intermediate principal stress on flat-ended punch problems. *Archive of Applied Mechanics*. 2014. Vol. 84. No 2. P. 277–289. DOI: 10.1007/s00419-013-0799-5.

9. Chen Y.Z., Lin X.Y., Wang Z.X. Singular stress analysis in flat punch problem of elastic half-plane. *International Journal of Applied Mechanics*. 2010. Vol. 2. No 1. P. 69–85. DOI: 10.1142/S1758825110000457.

10. Pau M., Leban B., Baldi A. Experimental analysis of contact for the indentation of a flat rounded punch. *International Journal of Solids and Structures*. 2006. Vol. 43. No 25-26. P. 7959–7965. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2006.03.013.

11. Jaffar M.J. Frictionless contact between an elastic layer on a rigid base and a circular flat-ended punch with rounded edge or a conical punch with rounded tip. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2002. Vol. 44. No 3. P. 545–560. DOI: 10.1016/S0020-7403(01)00104-7.

12. Borodachev N.M. Impression of a punch with a flat square base into an elastic half-space. *International Journal Applied Mechanics*. 1999. Vol. 35. Iss. 10. P. 989–994.

13. Barber J.R. Indentation of an elastic half-space by a cooled flat punch. *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*. 1982. Vol. 35. Iss. 1. P. 141–154. DOI:10.1093/qjmam/35.1.141.

14. Smith S.F. On a flat punch indenting an elastic layer in plane strain. *Quarterly Journal of Mathematics*. 1964. Vol. 15. Iss. 1. P. 223–237. DOI: 10.1093/qmath/15.1.223.

15. Айзикович С.М., Александров В.М. Осесимметричная задача о вдавливании круглого штампа в упругое, неоднородное по глубине полупространство. *Изв. АН СССР. МТТ.* 1984. №2. С. 73–82.

16. Vasiliev A.S., Sevostianov I.B., Aizikovich S.M., Jeng Y.-R. Torsion of a punch attached to transversely isotropic half-space with functionally graded coating. *International Journal of Engineering Science.* 2012. Vol. 61. P. 24–35. DOI: 10.1016/j.ijengsci.2012.06.006.

17. Vasiliev A.S., Volkov S.S., Aizikovich S.M., Jeng Y.-R. Axisymmetric contact problems of the theory of elasticity for inhomogeneous layers. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics.* 2014. Vol. 94. Iss. 9. P. 705–712. DOI: 10.1002/zamm.201300067.

18. Vasiliev A.S., Volkov S.S., Sadyrin E.V., Aizikovich S.M. Simplified analytical solution of the contact problem on indentation of a coated half-space by a conical punch. *Mathematics.* 2020. Vol. 8. Iss. 6. P. 983-1 – 983-14. DOI: 10.3390/math8060983.

19. Aizikovich S.M., Krenev L.I., Trubchik I.S., Alexandrov V.M., Kalker J.J. Analytical solution of the spherical indentation problem for a half-space with gradients with the depth elastic properties. *International Journal of Solids and Structures*. 2002. Vol. 39. No 10. P. 2745–2772. DOI: 10.1016/S0020-7683(02)00124-5.

20. Krenev L.I., Aizikovich S.M., Tokovyy Y.V., Wang Y.C. Axisymmetric problem on the indentation of a hot circular punch into an arbitrarily nonhomogeneous half-space. *International Journal of Solids and Structures*. 2015. Vol. 59. P. 18–28. https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2014.12.017.

References

1. Shtaerman I.Ya. *Kontaktnaya zadacha teorii uprugosti* [*The Contact Problem of the Theory of Elasticity*]. Moscow. Leningrad. Gostekhizdat Publ. 1949. 272 p. (In Russian).

2. Abramyan B.L., Aleksandrov V.M., Amenadze Yu.A. et al. *Razvitie teorii kontaktnykh*

zadach v SSSR [*The Development of the Theory of Contacttasksin the USSR*]. Moscow. Nauka Publ. 1976. 493 p. (In Russian).

3. Ayzikovich S.M., Aleksandrov V.M., Argatov I.I. et al. *Mekhanika kontaktnykh vzaimodeystviy* [*Mechanics of Contactinteractions*]. Moscow. Fizmatlit Publ. 2001. 672 p. (In Russian).

4. Johnson K.L. *Contact Mechanics*. Cambridge. Cambridge University Press. 1987. 452 p.

5. Cömez İ. Analysis of stress and deformation of an exponentially graded viscoelastic coated half plane under indentation by a rigid flat punch indenter tip. *Mechanics of Time-Dependent Materials*. 2024. Vol. 28. P. 1271–1289. DOI: 10.1007/s11043-024-09682-8.

6. Brutti C. A theoretical model for elastic-perfectly plastic flat cylindrical punch indentation. *Mechanics of Materials*. 2021. Vol. 155. Article No 103770. DOI: 10.1016/j.mechmat.2021.103770.

7. Wang G.F., Niu X.R. Nanoindentation of soft solids by a flat punch. *Acta Mech. Sin.* 2015. Vol. 31. No 4. P. 531–535.

8. Ma Z., Liao H., Dang F. Effect of intermediate principal stress on flat-ended punch problems. *Arch. Appl. Mech.* 2014. Vol. 84. No 2. P. 277–289. DOI: 10.1007/s00419-013-0799-5.

9. Chen Y.Z., Lin X.Y., Wang Z.X. Singular stress analysis in flat punch problem of elastic half-plane. *Int. J. Appl. Mech.* 2010. Vol. 2. No 1. P. 69–85. DOI: 10.1142/S1758825110000457.

10. Pau M., Leban B., Baldi A. Experimental analysis of contact for the indentation of a flat rounded punch. *Int. J. Solids Struct.* 2006. Vol. 43. No 25-26. P. 7959–7965. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2006.03.013.

11. Jaffar M.J. Frictionless contact between an elastic layer on a rigid base and a circular flat-ended punch with rounded edge or a conical punch with rounded tip. *Int. J. Mech. Sci.* 2002. Vol. 44. No 3. P. 545–560. DOI: 10.1016/S0020-7403(01)00104-7.

12. Borodachev N.M. Impression of a punch with a flat square base into an elastic half-space. *Int. J. Appl. Mech.* 1999. Vol. 35. Iss. 10. P. 989–994.

13. Barber J.R. Indentation of an elastic half-space by a cooled flat punch. *Q. J. Mech. Appl. Math.* 1982. Vol. 35. Iss. 1. P. 141–154. DOI:10.1093/qjmam/35.1.141.

14. Smith S.F. On a flat punch indenting an elastic layer in plane strain. *Q. J. Math.* 1964. Vol. 15. Iss. 1. P. 223–237. DOI: 10.1093/qmath/15.1.223.

15. Aizikovich S.M., Aleksandrov V.M. Osesimmetrichnaya zadacha o vdavlivanii kruglogo shtampa v uprugoe, neodnorodnoe po glubine poluprostranstvo [Axisymmetric problem of indentation of a circular punch into an elastic half-space inhomogeneous in depth]. *Izvestiya Akademii nauk SSSR. Mekhanika tverdogo tela.* 1984. No 2. P. 73–82 (In Russian).

16. Vasiliev A.S., Sevostianov I.B., Aizikovich S.M., Jeng Y.-R. Torsion of a punch attached to transversely isotropic half-space with functionally graded coating. *Int. J. Eng. Sci.* 2012. Vol. 61. P. 24–35. DOI: 10.1016/j.ijengsci.2012.06.006.

17. Vasiliev A.S., Volkov S.S., Aizikovich S.M., Jeng Y.-R. Axisymmetric contact problems of the theory of elasticity for inhomogeneous layers. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics.* 2014. Vol. 94. Iss. 9. P. 705–712. DOI: 10.1002/zamm.201300067.

18. Vasiliev A.S., Volkov S.S., Sadyrin E.V., Aizikovich S.M. Simplified analytical solution of the contact problem on indentation of a coated half-space by a conical punch. *Mathematics.* 2020. Vol. 8. Iss. 6. P. 983-1 – 983-14. DOI: 10.3390/math8060983.

19. Aizikovich S.M., Krenev L.I., Trubchik I.S., Alexandrov V.M., Kalker J.J. Analytical solution of the spherical indentation problem for a half-space with gradients with the depth elastic properties. *Int. J. Solids Struct*. 2002. Vol. 39. No 10. P. 2745–2772. DOI: 10.1016/S0020-7683(02)00124-5.

20. Krenev L.I., Aizikovich S.M., Tokovyy Y.V., Wang Y.C. Axisymmetric problem on the indentation of a hot circular punch into an arbitrarily nonhomogeneous half-space. *Int. J. Solids Struct*. 2015. Vol. 59. P. 18–28. https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2014.12.017.

THE INDENTATION OF A CYLINDRICAL STAMP WITH A FLAT SOLE AND A ROUNDED EDGE INTO A HALF-SPACE THAT IS NOT UNIFORM IN DEPTH*

Krenev L.I., Aizikovich S.M., Krenev D.A.

Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russian Federation

lkrenev@yandex.ru

Received by the Editor 2026/02/10

The paper considers an axisymmetric static problem of the embedding of a smooth cylindrical die with a flat sole into a heterogeneous layer bonded to an elastic half-space. The edge of the die is assumed to be rounded. The Young's modulus and Poisson's ratio of the layer vary with its depth according to arbitrary prescribed laws. The paper analyzes the effect of rounding the edge of the flat sole of a circular die on the stress concentration at its edge. The problem is solved analytically. The method of integral transformations is used.The resulting system of ordinary differential equations with variable coefficients is solved numerically using a specially developed algorithm. Next, the solution of this pair integral equation is obtained in an approximate form using a special asymptotic method developed by the authors. Using special transformations, the pair integral equation is reduced to a simpler form. Then, the kernel is approximated by a fractional-rational expression.The solution of the system of differential equations obtained using operational calculus is represented by the sum of the general solution of the homogeneous and the particular inhomogeneous on separate sections of the domain of definition with unknown complex constants. The inverse Fourier transform is found expression for the transformant of the distribution of contact pressures, then using the inverse Hankel transform is found distribution of contact pressures. Substituting the found solution into the original equation (in a simplified form) is constructed a system of linear equations to determine the unknown constants. Based on the constructed solution, performed calculations of the distribution of normal contact stresses under the stamp. The cases of different stiffness of the near-surface layer are considered, and it is analyzed how the change in the radius of curvature of the stamp edge affects the distribution of contact pressure.

Keywords: integral equations, heterogeneous half-space, layer, edge of stamp, sole of circular stamp.

* The research was supported by Russian Science Foundation (grant 22-19-00732-П).