УДК 539.3 DOI: 10.32326/1814-9146-2026-88-2-132-142

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ ТРЕХФАЗНОЙ ДЕФОРМИРУЕМОЙ ПОРОУПРУГОЙ СРЕДЫ*

Петров А.Н.

Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Российская Федерация

andrey.petrov@mech.unn.ru

Поступила в редакцию 10.02.2026

Представлена математическая модель трехфазной пороупругой среды, состоящей из упругого деформируемого скелета и двух текучих наполнителей. На основе метода гомогенизации и подхода с многофазными континуумами получена замкнутая система уравнений, включающая в себя закон Гука для скелета с учетом принципа эффективных напряжений, обобщенный закон Дарси для фильтрации каждой из текучих фаз, уравнения сохранения массы, преобразованные с учетом сжимаемости фаз и наличия источников/стоков, а также уравнение импульса для трехфазной системы в целом. Модель учитывает капиллярные эффекты (давление вытеснения, относительные фазовые проницаемости) и осредненное поровое давление как взвешенную по насыщенности величину.

Проведен сравнительный анализ полученных уравнений с известными решениями других авторов. Показано, что отличие заключается в выражениях для отдельных коэффициентов, а именно в присутствии множителя в виде пористости в слагаемых, возникающих при дифференцировании уравнений сохранения масс. Установлено, что в предельных случаях предложенная модель переходит в известные корректные постановки. Численные расчеты, выполненные для широкого диапазона значений насыщенности, демонстрируют, что значения коэффициентов, полученные представленными формулами, систематически превышают соответствующие значения, рассчитанные по известным формулам, более чем в 4 раза. Наибольшие различия наблюдаются в условиях, близких к полному насыщению порового пространства жидкостью.

Полученные результаты указывают на необходимость учета предложенных поправок при моделировании динамических процессов в частично насыщенных пороупругих средах, особенно в задачах, связанных с быстропротекающими процессами и высокими значениями насыщенности. Разработанная модель может найти применение в геомеханике (прогноз оседания земной поверхности, устойчивость скважин), подземной гидродинамике (закачка углекислого газа, разработка нефтегазовых месторождений) и биомеханике (моделирование тканей, насыщенных жидкостями).

---

* Выполнено при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (проект №FSWR-2026-0019).

Ключевые слова: пороупругость, трехфазная среда, закон Дарси, эффективные напряжения, гомогенизация, многофазный континуум, связанные задачи.

Введение

Общепризнанная в настоящее время феноменологическая теория насыщенной пористой среды Био [1–3] находит широкое применение для описания процессов в пористой среде при решении как фундаментальных, так и прикладных задач. Очевидная сложность таких задач не позволяет строить общие аналитические решения и приводит к необходимости применения численных методов. Внедрение численных алгоритмов совместного моделирования изменения напряженно-деформированного состояния пористой среды и порового давления флюида в вычислительные коммерческие пакеты [4–8] подтверждает высокую важность получения количественной информации.

С целью расширения области применения модель насыщенной пористой среды позднее модифицировалась и обобщалась многими авторами. Одним из вариантов обобщения теории пороупругости Био является учет течения в порах двух несмешивающихся флюидов. Такое обобщение сделал В. Брутсаерт [9], предложив уравнения модели в предположении неравного давления в текучих фазах. Позднее Дж. Бэрриман и Л. Тигпен рассмотрели пороупругую модель с единым давлением в фазах [10]. В наиболее общем виде уравнения подобной модели деформирования пористой среды с двумя текучими фазами представлены в [11].

Конечно-элементные модели для численного решения задач пороупругости с попыткой совместного описания деформирования твердого скелета и течения двухфазного флюида предложены в [12, 13]. Книга Р. Льюиса и Б. Шрефлера [12] в основном посвящена задачам консолидации и другим медленным (квазистатическим) явлениям в пористых средах, в [13] О. Зенкевичем и соавторами более подробно рассмотрены динамические явления. На основании публикаций [12, 13] разработаны различные варианты конечно-разностных [14–16] и гранично-элементных [17–20] схем для решения задач пороупругости.

В настоящей статье рассматривается модель, которая включает в себя уравнения переноса компонент трехфазной среды, получаемые на основе законов сохранения, условий совместности деформирования и замыкающих соотношений в форме обобщенного закона Гука в соответствии с подходом, описанным в [12]. Уравнения строятся с учетом допущений, введенных П. Ли и М. Шанцем в [20]. Проводится сравнительный анализ полученных уравнений.

1. Уравнения движения пороупругой среды

1.1. Базовые определения, соотношения, допущения. Рассматривается произвольный объем пористого материала, насыщенного двумя текучими наполнителями и моделируемого в виде сплошной среды. Для формализации описания вводится понятие элементарного представительного объема V гетерогенного материала, включающего в себя конечные объемы, соответствующие отдельным фазам системы: V_s – объем твердой фазы, V_w – объем смачивающей текучей фазы, V_a – объем несмачивающей текучей фазы. Объемы фаз заполняют элементарный представительный объем, что выражается соотношением: $V = V_s + V_w + V_a$.

Принимаются следующие допущения, упрощающие математическое описание системы:

а) все фазы сжимаемы;

б) все фазы имеют одинаковую температуру;

в) для описания переноса текучих фаз справедлив обобщенный закон Дарси;

г) текучие фазы непрерывно заполняют поровое пространство;

д) массоперенос в результате испарения/конденсации не учитывается.

В соответствии с веденными предположениями процесс гомогенизации применяется к трехфазной системе, где каждая фаза рассматривается как непрерывно занимающая весь элементарный представительный объем. В этом контексте предлагаемая система рассматривается как три независимых перекрывающихся континуума (то есть в каждой точке одновременно присутствуют все фазы), каждый из которых имеет свою собственную кинематику, массу, импульс и взаимодействует с другими на основании физических законов. Таким образом, получается сплошной континуум с новыми степенями свободы в каждой точке среды.

Распределение фаз в пространстве описывается макроскопическими величинами пористости n и коэффициентами насыщенности S_w и S_a, которые характеризуют объемное содержание фаз в представительном элементе трехфазной среды:

$$n = \frac{V_{\text{void}}}{V}, \quad S_w = \frac{V_w}{V_{\text{void}}}, \quad S_a = \frac{V_a}{V_{\text{void}}}, \tag{1}$$

где V_{void} – объем взаимосвязанных пор в объеме V.

Определение объемного содержания фаз (1) позволяет ввести в рассмотрение приведенные плотности твердой $\overline{\rho}_s = (1-n)\rho_s$ и текучих фаз $\overline{\rho}_w = nS_w\rho_w$ и $\overline{\rho}_a = nS_a\rho_a$, где ρ_s, ρ_w, ρ_a – соответствующие истинные плотности фаз. Тогда полная эффективная плотность трехфазной гомогенизированной среды вычисляется по формуле:

$$\rho = \overline{\rho}_s + \overline{\rho}_w + \overline{\rho}_a = \rho_s(1-n) + nS_w\rho_w + nS_a\rho_a. \tag{2}$$

Тензор полных напряжений σ_{ij} пороупругой среды в соответствии с принципом эффективных напряжений записывается в виде:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{if}^{\text{eff}} - \delta_{ij}\alpha p^f, \tag{3}$$

где σ_{if}^{eff} – эффективные напряжения в твердой фазе, p^f – осредненное поровое давление в смеси текучих фаз, δ_{ij} – символ Кронекера. Для вычисления изотропного коэффициента передачи порового давления используется эмпирическая формула:

$$\alpha = 1 - \frac{K}{K_s}, \tag{4}$$

где K и K_s – объемные модули твердой фазы скелета и материала твердой фазы соответственно. Осредненное поровое давление p^f определяется как взвешенное по насыщенности среднее арифметическое порового давления смачивающей фазы p^w и порового давления несмачивающей фазы p^a:

$$p^f = S_w p^w + S_a p^a. \tag{5}$$

Пористый скелет рассматривается как изотропное линейно-упругое тело, подчиняющееся закону Гука

$$\sigma_{ij}^{\text{eff}} = 2G\varepsilon_{ij} + \left(K - \frac{2}{3}G\right)\varepsilon_{kk} \tag{6}$$

с константами K и G, где ε_{ij} – тензор деформаций, связанный с перемещением скелета u_i соотношением

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}). \tag{7}$$

Фильтрация текучих фаз в поровом пространстве описывается обобщенным законом Дарси:

$$nS_w \dot{u}_i^w = -\frac{K_{rw}k}{\eta_w}\left(p_{,i}^w + \rho_w \ddot{u}_i + \rho_w \ddot{u}_i^w\right), \tag{8}$$

$$nS_a \dot{u}_i^a = -\frac{K_{ra}k}{\eta_a}\left(p_{,i}^a + \rho_a \ddot{u}_i + \rho_a \ddot{u}_i^a\right). \tag{9}$$

Здесь u_i^w, u_i^a – смещения текучих фаз относительно твердого скелета, k – абсолютная проницаемость пористого материала, K_{rw}, K_{ra} – относительные фазовые проницаемости, η_w, η_a – динамические вязкости текучих фаз. Относительные фазовые проницаемости рассчитываются как

$$K_{rw} = S_e^{(2+3\theta)/\theta}, \quad K_{ra} = (1 - S_e)^2\left[1 - S^{(2+\theta)/\theta}\right], \quad S_e = \frac{S_w - S_{rw}}{S_{ra} - S_{rw}}, \tag{10}$$

где S_e – эффективная насыщенность; S_{rw}, S_{ra} – остаточные насыщенности текучих фаз; $\theta \in [0{,}2;\ 3]$ – коэффициент, характеризующий распределение пор по размеру.

Капиллярное давление $p^c = p^a - p^w$ представляется функцией коэффициента эффективной насыщенности

$$p^c = p^d S_e^{-1/\theta}, \tag{11}$$

где p^d – давление вытеснения.

1.2. Уравнения сохранения масс. Система уравнений для описания динамики пороупругой, насыщенной флюидом среды выводится на основе механики многофазных сред многожидкостного континуума. Используются уравнения сохранения каждой массы каждой из фаз в виде

$$\frac{\partial((1-n)\rho_s)}{\partial t} + \operatorname{div}\left((1-n)\rho_s \frac{\partial u_i}{\partial t}\right) = 0, \tag{12}$$

$$\frac{\partial(nS_w\rho_w)}{\partial t} + \operatorname{div}\left(nS_w\rho_w \frac{\partial(u_i + u_i^w)}{\partial t}\right) = \rho_w I^w, \tag{13}$$

$$\frac{\partial(nS_a\rho_a)}{\partial t} + \operatorname{div}\left(nS_a\rho_a \frac{\partial(u_i + u_i^a)}{\partial t}\right) = \rho_a I^a, \tag{14}$$

где I^w и I^a – интенсивности источников текучих фаз. Уравнение (12) в пренебрежении градиентами пористости и плотности записывается в виде

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{1-n}{\rho_s} \cdot \frac{\partial \rho_s}{\partial t} + (1-n)\frac{\partial u_{i,i}}{\partial t}. \tag{15}$$

С учетом соотношения

$$\frac{1}{\rho_s} \cdot \frac{\partial \rho_s}{\partial t} = \frac{1}{1-n}\left((\alpha - n)\frac{1}{K_s} \cdot \frac{\partial p^f}{\partial t} - (1-\alpha)\frac{\partial u_{i,i}}{\partial t}\right), \tag{16}$$

которое следует из предположения о сжимаемости твердой фазы, и с учетом

$$\frac{\partial S_w}{\partial t} = -\frac{\partial S_a}{\partial t}, \tag{17}$$

следующего из предположения о полном заполнении пор текучими фазами, то есть $S_w + S_a = 1$, а также из равенства

$$\frac{\partial S_w}{\partial t} = \frac{\partial S_w}{\partial p^c} \cdot \frac{\partial p^c}{\partial t}, \tag{18}$$

которое следует из (11), уравнение (15) приводится к виду

$$\frac{\partial n}{\partial t} - \zeta\left(S_{ww}\frac{\partial p^w}{\partial t} + S_{aa}\frac{\partial p^a}{\partial t}\right) + \zeta K_s \frac{\partial u_{i,i}}{\partial t} = 0, \tag{19}$$

где $\zeta = (\alpha - n)/K_s$, $S_{ww} = S_w + p^c\partial S_w/\partial p^c$, $S_{aa} = S_a - p^c\partial S_w/\partial p^c$. В соответствии с (10) и (11) величины $p^c\partial S_w/\partial p^c$ и $\partial S_w/\partial p^c$ вычисляются по формулам:

$$\frac{\partial S_w}{\partial p^c} = -\frac{\vartheta(S_{ra} - S_{rw})}{p^d}\left(\frac{S_w - S_{rw}}{S_{ra} - S_w}\right)^{(\vartheta+1)/\vartheta}, \tag{20}$$

$$p^c\frac{\partial S_w}{\partial p^c} = -\vartheta(S_w - S_{rw}). \tag{21}$$

Уравнения (13) и (14) в пренебрежении градиентами пористости, плотностей и насыщенностей текучих фаз, с учетом (18) и (19), а также равенств

$$\frac{1}{\rho_w}\cdot\frac{\partial \rho_w}{\partial t} = \frac{1}{K_w}\cdot\frac{\partial p^w}{\partial t}, \quad \frac{1}{\rho_a}\cdot\frac{\partial \rho_a}{\partial t} = \frac{1}{K_a}\cdot\frac{\partial p^a}{\partial t}, \tag{22}$$

где K_w и K_a – объемные модули текучих фаз, согласно предположению о сжимаемости текучих фаз, приводятся к виду

$$\alpha S_w \dot{u}_{i,i} + \left(\zeta S_{ww} S_w + \frac{n}{K_w} S_w - nS_u\right)\dot{p}^w + \left(\zeta S_{aa} S_w + nS_u\right)\dot{p}^a + nS_w \dot{u}^w_{i,i} = I^w, \tag{23}$$

$$\alpha S_a \dot{u}_{i,i} + \left(\zeta S_{ww} S_a + nS_u\right)\dot{p}^w + \left(\zeta S_{aa} S_a + \frac{n}{K_a} S_a - nS_u\right)\dot{p}^a + nS_a \dot{u}^a_{i,i} = I^a, \tag{24}$$

где $S_u = \partial S_w/\partial p^c$.

1.3. Уравнения сохранения импульса. Уравнение импульса для трехфазной системы в целом с учетом объемных сил F_i имеет вид:

$$Gu_{i,jj} + \left(K + \frac{1}{3}G\right)u_{j,ij} - \alpha\left(S_w p^w_{,i} + S_a p^a_{,i}\right) + F_i = \rho\ddot{u}_i + nS_w\rho_w\ddot{u}^w_i + nS_a\rho_a\ddot{u}^a_i, \tag{25}$$

$u_{i,j}$ означает $\partial u_i/\partial x_j$.

Законы сохранения импульса для текучих фаз приводят к обобщенному закону Дарси в виде (8) и (9).

Таким образом, получается замкнутая совместная модель (8), (9), (23)–(25) упругого деформирования скелета и течения двух вязких наполнителей с перемещениями u_i, u^w_i, u^a_i и поровыми давлениями p^w и p^a.

2. Сравнительный анализ уравнений

Полученные уравнения модели отличаются от уравнений, предложенных авторами в [20], выражениями для отдельных коэффициентов. Для подробного сравнения вводятся обозначения для отмеченных коэффициентов в настоящей статье:

$$B_1 = \zeta S_{ww} S_w + \frac{n}{K_w} S_w - S_u n, \quad B_2 = \zeta S_{aa} S_a + \frac{n}{K_a} S_a - S_u n, \tag{26}$$

$$B_3 = -(\zeta S_{aa} S_w + S_u n), \quad B_4 = -(\zeta S_{ww} S_a + S_u n) \tag{27}$$

и

$$\widetilde{B}_1 = \zeta S_{ww} S_w + \frac{n}{K_w} S_w - S_u, \quad \widetilde{B}_2 = \zeta S_{aa} S_a + \frac{n}{K_a} S_a - S_u, \tag{28}$$

$$\widetilde{B}_3 = -(\zeta S_{aa} S_w + S_u), \quad \widetilde{B}_4 = -(\zeta S_{ww} S_a + S_u). \tag{29}$$

Из (26)–(29) видно, что B_i и $\widetilde{B}_i$ различаются выражением для последнего слагаемого, которое в случае (26), (27) содержит множитель в виде параметра пористости n, возникающий в записи уравнений сохранения масс текучих фаз (13), (14) и сохраняющийся далее при соблюдении правил дифференцирования по переменной времени. Анализ размерностей не позволяет обнаружить указанных различий, так как параметр n является безразмерным.

В предельных случаях ($n = 0$ и $n = 1$) $B_i = \widetilde{B}_i$, уравнения (8), (9), (23)–(25) совпадают с уравнениями, полученными в [20], и сводятся к уравнениям упругой динамики и гидродинамики соответственно. В общем случае в рамках рассматриваемой модели трехфазной пороупругой среды при $0 < n < 1$ абсолютная разность значений $|B_i - \widetilde{B}_i|$ составит величину, равную, $|S_u(n-1)|$.

3. Численные результаты

Для сравнительной оценки значений, получаемых по формулам (26)–(29), проведены расчеты при различных значениях насыщенности S_w и значениях параметров пороупруго материала из [20]: $n = 0{,}23$, $\rho_s = 2650$ кг/м³, $\rho_w = 997$ кг/м³, $\rho_a = 1{,}1$ кг/м³, $K = 1{,}02 \cdot 10^9$ Па, $G = 1{,}44 \cdot 10^9$ Па, $K_s = 3{,}5 \cdot 10^{10}$ Па, $K_w = 2{,}25 \cdot 10^9$ Па, $K_a = 1{,}1 \cdot 10^5$ Па, $k = 2{,}5 \cdot 10^{-12}$ м², $\eta_w = 1{,}0 \cdot 10^{-3}$ Н·с/м², $\eta_a = 1{,}8 \cdot 10^{-5}$ Н·с/м², $S_{rw} = 0$, $S_{ra} = 1$, $\theta = 1{,}5$, $p^d = 5 \cdot 10^{-4}$ Па. Результаты расчетов, выполненные с использованием арифметики двойной точности и размерных параметров, как и в [20], приведены в таблицах 1–4.

Таблица 1

S_w	$B_1 \cdot 10^5$, Па$^{-1}$	$\widetilde{B}_1 \cdot 10^5$, Па$^{-1}$	$\lvert B_1 - \widetilde{B}_1 \rvert \cdot 10^5$, Па$^{-1}$
0,5	0,21734122762614	0,94494563394043	0,72760440631429
0,6	0,29451651793286	1,28048734193750	0,98597082400464
0,8	0,47570667998171	2,06826480285320	1,59255812287150
0,9	0,57888575858165	2,51698666725450	1,93798091396340
0,95	0,63347250420638	2,75419896581190	2,12072646160560
0,9999	0,68989416687769	2,99950917971110	2,30961501283340
0,99999	0,68999766381215	2,99995916394040	2,30996150012830

Таблица 2

S_w	$B_2 \cdot 10^5$, Па$^{-1}$	$\tilde{B}_2 \cdot 10^5$, Па$^{-1}$	$\lvert B_2 - \tilde{B}_2 \rvert \cdot 10^5$, Па$^{-1}$
0,5	0,31883158611500	1,04948756492570	0,72760440631429
0,6	0,37814822995018	1,3641190539548	0,98597082400464
0,8	0,51751795406293	2,1100760769345	1,59255812287150
0,9	0,59978681369482	2,5377677276582	1,93798091396340
0,95	0,63347250420638	2,7646449114411	2,12072646160560
0,9999	0,68990591324178	2,9995209260752	2,30961501283340
0,99999	0,68999059097917	2,9999591639404	2,30996150012830

Таблица 3

S_w	$B_3 \cdot 10^5$, Па$^{-1}$	$\tilde{B}_3 \cdot 10^5$, Па$^{-1}$	$\lvert B_3 - \tilde{B}_3 \rvert \cdot 10^5$, Па$^{-1}$
0,5	0,21733505814768	0,94493946446197	0,72760440631429
0,6	0,29450911455871	1,28047993856330	0,98597082400464
0,8	0,47569680881618	2,06825493168770	1,59255812287150
0,9	0,57887465352042	2,51685556748380	1,93798091396340
0,95	0,63346078219731	2,75418724380290	2,12072646160560
0,9999	0,68988182915467	2,99949684198810	2,30961501283340
0,99999	0,68998532497862	2,99994682510690	2,30996150012830

Таблица 4

S_w	$B_4 \cdot 10^5$, Па$^{-1}$	$\tilde{B}_4 \cdot 10^5$, Па$^{-1}$	$\lvert B_4 - \tilde{B}_4 \rvert \cdot 10^5$, Па$^{-1}$
0,5	0,21733664569870	0,94494105201299	0,72760440631429
0,6	0,94494105201299	1,28048184362450	0,98597082400464
0,8	0,47569934889781	2,06825747176930	1,59255812287150
0,9	0,57887751111226	2,51685842507560	1,93798091396340
0,95	0,63346379854425	2,75419026014980	2,12072646160560
0,9999	0,68988500393920	2,99950001677260	2,30961501283340
0,99999	0,68998850004891	2,99995000017720	2,30996150012830

Из таблиц видно, что величины B_i, $\widetilde{B}_i$, $\lvert B_i - \widetilde{B}_i \rvert$ сопоставимы и значения $\widetilde{B}_i$ превосходят соответствующие значения B_i более чем в 4 раза при всех рассмотренных значениях насыщенности S_w. С ростом значений насыщенности S_w наблюдается рост значений B_i, $\widetilde{B}_i$, $\lvert B_i - \widetilde{B}_i \rvert \left(i = \overline{1, 4}\right)$.

Полученные результаты позволяют предполагать, что использование предложенных в [20] уравнений для моделирования динамических процессов в частично насыщенных пороупругих средах без учета сделанных в настоящем исследовании поправок может приводить к иным численным решениям соответствующих краевых задач особенно в случаях почти полного насыщения среды.

Заключение

Построена замкнутая математическая модель для описания упругого деформирования скелета и течения двух вязких наполнителей в частично насыщенной пороупругой среде. Модель базируется на принципах механики многофазных сред и включает в себя систему уравнений сохранения массы для каждой фазы (твердой, смачивающей и несмачивающей текучих фаз); уравнение импульса для трехфазной системы с учетом объемных сил; обобщенный закон Дарси для описания фильтрации текучих фаз; закон Гука для изотропного линейно-упругого пористого скелета; соотношения для расчета эффективных напряжений, порового давления, относительной фазовой проницаемости и капиллярного давления. Проведен сравнительный анализ полученной модели с моделями других авторов. Установлено, что в предельных случаях (полное насыщение или отсутствие жидкости) уравнения совпадают с классическими уравнениями упругой динамики и гидродинамики; в общем случае различия обусловлены учетом параметра пористости в уравнениях сохранения массы, что влияет на расчет коэффициентов модели. В развитие представленного исследования целесообразно реализовать численное решение типовых задач для количественной оценки влияния выявленных различий в коэффициентах.

Список литературы

1. Biot M.A. Theory of elasticity and consolidation for a porous anisotropic solid. *Journal of Applied Physics*. 1955. Vol. 26. No 2. P. 182–185. https://doi.org/10.1063/1.1721956.

2. Biot M.A. General theory of three dimensional consolidation. *Journal of Applied Physics*. 1941. Vol. 12. No 2. P. 155–161. DOI: 10.1063/1.1712886.

3. Chung C.Y., Mansour J.M. Application of ANSYS to the stress relaxation of articular cartilage in unconfined compression. *Journal of the Chinese Institute of Engineers*. 2014. Vol. 37. No 3. P. 376–384. DOI: 10.1080/02533839.2013.78179.

4. Polzer S., Bursa J. Poroelastic model of intraluminal thrombus in FEA of aortic aneurysm. *6th World Congress of Biomechanics* (*WCB 2010*). Singapore, 1–6 Aug. 2010. Berlin–Heidelberg: Springer, 2010. P. 763–767.

5. Igumnov L.A., Ipatov A.A., Petrov A.N., Litvinchuk S.Y., Pfaff A., Eremeyev V.A. A comparison of boundary element method and finite element method dynamic solutions for poroelastic column. In: *Higher Gradient Materials and Related Generalized Continua.* Cham: Springer International Publishing, 2019. P. 121–134.

6. Chou D., Li Y.D., Mustansar Z., Chung C.Y. Using a poroelastodynamic model to investigate the dynamic behaviour of articular cartilage. *Computer Methods and Programs in Biomedicine*. 2023. Vol. 233. Article No 107481. DOI: 10.1016/j.cmpb.2023.107481.

7. Yu W., Wu X., Cen H., Guo Y., Li C., Wang Y., Qin Y., Chen, W. Study on the biomechanical responses of the loaded bone in macroscale and mesoscale by multiscale poroelastic FE analysis. *BioMedical Engineering Online*. 2019. Vol. 18. No 1. Article No 122. DOI: 10.1186/s12938-019-0741-3.

8. Jin L. *On a Saturated Poromechanical Framework and its Relation to Abaqus Soil Mechanics and Biot Poroelasticity Frameworks*. 2023. DOI: 10.48550/arXiv.2304.02148.

9. Brutsaert W. The propagation of elastic waves in unconsolidated unsaturated granular medium. *Journal of Geophysical Research*. 1964. Vol. 69. No 2. P. 234–257.

10. Berryman J.G., Thigpen L. Nonlinear and semilinear dynamic poroelasticity with microstructure. *Journal of Geophysical Research*. 1985. Vol. 33. No 2. P. 243–257.

11. Lo Wei-Cheng, Sposito G., Majer E. Immiscible two-phase fluid flows in deformable porous media. *Advanced in Water Rescources*. 2002. Vol. 25. P. 1105–1117. DOI:10.1016/S0309-1708(02)00050-7.

12. Lewis R.W., Schrefler B.A. *The Finite Element Method in the Deformation and Consolidation of Porous Media*. London: Wiley, 1987. 344 p.

13. Zienkiewicz O., Chan A., Pastor M., Schrefler B., Shiomi T. *Computational Geomechanics with special reference to Earthquake Engineering*. New York: John Wiley & Sons, 1999. 398 p.

14. Shwetank K., Deb D., Pramanik R. Coupled meshfree (SPH) and grid based (FDM) procedures for modeling fluid flow through deformable porous media. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*. 2023. Vol. 170. Article No 105494. https://doi.org/10.1016/j.ijrmms.2023.105494.

15. Sang Q.Y., Xiong Y.L., Zheng R.Y., Bao X.H., Ye G.L., Zhang F. An implicit coupled MPM formulation for static and dynamic simulation of saturated soils based on a hybrid method. *Computational Mechanics.* 2025. Vol. 75. No (3). P. 1033–1060.

16. Wang W., Wen X., Zhang B., Zhang Y., Wang W. Adaptive finite difference forward

modeling of two-phase media based on the Remez iterative algorithm for solving differential coefficients. *Chinese Journal of Geophysics*. 2020. Vol. 63. Iss. 6. P. 2400–2414. https://doi.org/10.6038/cjg2020N0068.

17. Maghoul P. Solutions fondamentales en Géo-Poro-Mécanique multiphasique pour l'analyse des effets de site sismiques. *D. Sci. Dissertation*. Paris: Université Paris-Est, 2010. 422 p.

18. Benallal A., Botta A.S., Venturini W.S. Consolidation of elastic-plastic saturated porous media by the boundary element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2008. Vol. 197. Iss. 51-52. P. 4626–4644. DOI: 10.1016/j.cma.2008.06.003.

19. Prochazka P.P. Effect of elevated temperature on concrete structures by discontinuous boundary element method. *International Journal of Computational Methods*. 2021. Vol. 18. No 09. Article No 2150034. DOI: 10.1142/S0219876221500341.

20. Li P., Schanz M. Time domain boundary element formulation for partially saturated poroelasticity. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2013. Vol. 37. Iss. 11. P. 1483–1498. https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2013.08.002.

References

1. Biot M.A. Theory of elasticity and consolidation for a porous anisotropic solid. *J. Appl. Phys.* 1955. Vol. 26. No 2. P. 182–185. https://doi.org/10.1063/1.1721956.

2. Biot M.A. General theory of three dimensional consolidation. *J. Appl. Phys.* 1941. Vol. 12. No 2. P. 155–161. DOI: 10.1063/1.1712886.

3. Chung C.Y., Mansour J.M. Application of ANSYS to the stress relaxation of articular cartilage in unconfined compression. *J. Chin. Inst. Eng.* 2014. Vol. 37. No 3. P. 376–384. DOI: 10.1080/02533839.2013.78179.

4. Polzer S., Bursa J. Poroelastic model of intraluminal thrombus in FEA of aortic aneurysm. *6th World Congress of Biomechanics* (*WCB 2010*). Singapore, 1–6 Aug. 2010. Berlin. Heidelberg. Springer. 2010. P. 763–767.

5. Igumnov L.A., Ipatov A.A., Petrov A.N., Litvinchuk S.Y., Pfaff A., Eremeyev V.A. A comparison of boundary element method and finite element method dynamic solutions for poroelastic column. In: *Higher Gradient Materials and Related Generalized Continua.* Cham. Springer International Publishing. 2019. P. 121–134.

6. Chou D., Li Y.D., Mustansar Z., Chung C.Y. Using a poroelastodynamic model to investigate the dynamic behaviour of articular cartilage. *Computer Methods and Programs in Biomedicine*. 2023. Vol. 233. Article No 107481. DOI: 10.1016/j.cmpb.2023.107481.

7. Yu W., Wu X., Cen H., Guo Y., Li C., Wang Y., Qin Y., Chen, W. Study on the biomechanical responses of the loaded bone in macroscale and mesoscale by multiscale poroelastic FE analysis. *Biomed. Eng. Online.* 2019. Vol. 18. No 1. Article No 122. DOI: 10.1186/s12938-019-0741-3.

8. Jin L. *On a Saturated Poromechanical Framework and its Relation to Abaqus Soil Mechanics and Biot Poroelasticity Frameworks*. 2023. DOI: 10.48550/arXiv.2304.02148.

9. Brutsaert W. The propagation of elastic waves in unconsolidated unsaturated granular medium. *Journal of Geophysical Research*. 1964. Vol. 69. No 2. P. 234–257.

10. Berryman J.G., Thigpen L. Nonlinear and semilinear dynamic poroelasticity with microstructure. *Journal of Geophysical Research*. 1985. Vol. 33. No 2. P. 243–257.

11. Lo Wei-Cheng, Sposito G., Majer E. Immiscible two-phase fluid flows in deformable porous media. *Advanced in Water Rescources*. 2002. Vol. 25. P.1105–1117. DOI:10.1016/S0309-1708(02)00050-7.

12. Lewis R.W., Schrefler B.A. *The Finite Element Method in the Deformation and Consolidation of Porous Media*. London. Wiley. 1987. 344 p.

13. Zienkiewicz O., Chan A., Pastor M., Schrefler B., Shiomi T. *Computational Geomechanics with Special Reference to Earthquake Engineering.* New York. John Wiley & Sons. 1999. 398 p.

14. Shwetank K., Deb D., Pramanik R. Coupled meshfree (SPH) and grid based (FDM) procedures for modeling fluid flow through deformable porous media. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*. 2023. Vol. 170. Article No 105494. https://doi.org/10.1016/j.ijrmms.2023.105494.

15. Sang Q.Y., Xiong Y.L., Zheng R.Y., Bao X.H., Ye G.L., Zhang F. An implicit coupled MPM formulation for static and dynamic simulation of saturated soils based on a hybrid method. *Comput. Mech.* 2025. Vol. 75. No (3). P. 1033–1060.

16. Wang W., Wen X., Zhang B., Zhang Y., Wang W. Adaptive finite difference forward modeling of two-phase media based on the Remez iterative algorithm for solving differential coefficients. *Chin. J. Geophys.* 2020. Vol. 63. Iss. 6. P. 2400–2414. https://doi.org/10.6038/cjg2020N0068.

17. Maghoul P. Solutions fondamentales en Géo-Poro-Mécanique multiphasique pour l'analyse des effets de site sismiques. *D. Sci. Dissertation*. Paris. Université Paris-Est. 2010. 422 p.

18. Benallal A., Botta A.S., Venturini W.S. Consolidation of elastic-plastic saturated porous media by the boundary element method. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 2008. Vol. 197. Iss. 51-52. P. 4626–4644. DOI: 10.1016/j.cma.2008.06.003.

19. Prochazka P.P. Effect of elevated temperature on concrete structures by discontinuous boundary element method. *International Journal of Computational Methods*. 2021. Vol. 18. No 09. Article No 2150034. DOI: 10.1142/S0219876221500341.

20. Li P., Schanz M. Time domain boundary element formulation for partially saturated poroelasticity. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2013. Vol. 37. Iss. 11. P. 1483–1498. https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2013.08.002.

MATHEMATICAL MODEL OF THE DYNAMICS OF A THREE-PHASE DEFORMABLE POROELASTIC MEDIUM*

Petrov A.N.

National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Nizhny Novgorod, Russian Federation

andrey.petrov@mech.unn.ru

Received by the Editor 2026/02/10

This work presents a mathematical model of a three-phase poroelastic medium consisting of an elastic deformable skeleton and two fluid saturating phases. Based on the homogenization method and the multi-phase continuum approach, a closed system of equations is derived, including Hooke's law for the skeleton incorporating the principle of effective stresses, a generalized Darcy's law for the flow of each fluid phase, mass conservation equations transformed to account for phase compressibility and the presence of sources/sinks, as well as the momentum equation for the three-phase system as a whole. The model accounts for capillary effects (displacement pressure, relative phase permeabilities) and the averaged pore pressure as a saturation-weighted quantity.

A comparative analysis of the obtained equations with known solutions by other authors is performed. It is shown that the difference lies in the expressions for certain coefficients, namely, the presence of a porosity multiplier in the terms arising from the differentiation of the mass conservation equations. It is established that in limiting cases, the proposed model reduces to known well-posed formulations. Numerical calculations carried out for a wide range of saturation values demonstrate that the coefficient values obtained using the formulas of the present work systematically exceed the corresponding values calculated using known formulas by more than a factor of four. The greatest differences are observed under conditions close to full saturation of the pore space with liquid.

---

* The paper was carried out with the financial support of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (project No FSWR-2026-0019).

The obtained results indicate the necessity of accounting for the proposed corrections when modeling dynamic processes in partially saturated poroelastic media, particularly in problems involving fast processes and high saturation values. The developed model can find applications in geomechanics (prediction of land subsidence, wellbore stability), subsurface hydrodynamics (carbon dioxide injection, oil and gas reservoir development), and biomechanics (modeling of fluid-saturated tissues).

Keywords: poroelasticity, three-phase medium, Darcy's law, effective stress, homogenization, multi-phase continuum, coupled problems.