УДК 539.3 DOI: 10.32326/1814-9146-2026-88-2-123-131

КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ О ДЕЙСТВИИ ТУПОУГОЛЬНЫХ КЛИНОВИДНЫХ В ПЛАНЕ ШТАМПОВ НА АНИЗОТРОПНЫЙ КОМПОЗИТ*

© 2026 г. **Бабешко В.А.**[1,2], **Евдокимов В.С.**[1], **Бабешко О.М.**[1], **Евдокимова О.В.**[2]

[1]*Кубанский государственный университет, Краснодар, Российская Федерация*
[2]*Южный научный центр РАН, Ростов-на-Дону, Российская Федерация*

babeshko41@mail.ru

Поступила в редакцию 10.03.2026

Впервые построено точное решение контактных задач о действии тупоугольных клиновидных в плане штампов на анизотропную композитную многослойную среду. Этот тип контактных задач долгое время не удавалось решить, хотя их актуальность в инженерной практике велика, особенно в задачах для композитных материалов. Исследование задач такого типа стало возможным в связи с разработанным авторами решением двумерных интегральных уравнений Винера – Хопфа в сочетании с применением таких подходов, как метод блочного элемента, топологические и факторизационные методы. Найдены диапазоны параметров областей, для которых можно строить точное решение контактных задач для тупоугольных клиновидных штампов, основываясь на решениях двумерного интегрального уравнения Винера – Хопфа. Для этих целей использован гомеоморфизм отображений дифференциальной топологии. В результате исследования подтверждено, что вопросы выделения неограниченных особенностей решений граничных задач, возникающих на границах штампов, наряду с применением методов спектрального анализа можно осуществлять факторизационными методами, что ранее не было известно. Построенное решение открыло возможность не только для изучения конструкционных свойств многокомпонентных анизотропных композитов, контактирующих с жесткими штампами указанной формы, но также и для исследования прочности и разрушения блочных структур разноразмерных блоков и включений, возникающих в сейсмологии. Кроме этого, решение поставленной задачи открыло возможность создания нового типа излучателей и преобразователей поверхностных волн, ранее не описанных, для клиновидных областей, что может оказаться полезным в решении проблем в электронике, акустике и применено в исследовании наноматериалов.

Ключевые слова: контактные задачи, клиновидный тупоугольный в плане штамп, анизотропный композит, факторизация.

* Выполнено при финансовой поддержке РНФ и Кубанского научного фонда, региональный совместно финансируемый проект 24-11-20006.

Введение

Контактные задачи играют важную роль в самых разных прикладных областях. Они возникают при исследовании прочности и разрушения [1], распространения волн в упругих телах [2], в акустике [3], в неразрушающих методах контроля [4], теории рассеивания электромагнитных волн и при создании элементной базы электроники [5], в теории волн в жидкости [6, 7], геофизике [8], трибологии [9, 10]. Исследования анизотропных задач, в том числе для композитов и контактных задач, выполнялись как аналитическими, так и численными методами в [9–14]. Заметим, что применяемые свойства топологических методов все больше используются в механике [15–24].

В статьях [25, 26] строится решение контактной задачи в четверти плоскости. Этот подход оказался полезным для построения решения рассматриваемой контактной задачи для клина с тупым углом.

Постановка задачи

Рассматриваются контактные задачи о действии абсолютно жесткого штампа на многослойную среду, задачи решаются для четверти плоскости. Предполагается, что многослойная среда представляет собой анизотропный композит, для которого построена функция Грина. С ее помощью получается интегральное уравнение контактной задачи. Методы построения функций Грина для анизотропных сред достаточно детально изложены в [12–14]. Рассматривается интегральное уравнение Винера – Хопфа, заданное в первом квадранте, [25, 26]. Оно имеет вид

$$\mathbf{K}q = \int_0^\infty\int_0^\infty k(x-\xi, y-\eta)q(\xi,\eta)d\xi d\eta = f(x,y), \quad 0 \le x < \infty,\ 0 \le y < \infty, \tag{1}$$

$$k(x,y) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{\Gamma_1}\int_{\Gamma_2} K(\alpha,\beta)\exp\left(-i(\alpha x + \beta y)\right)d\alpha d\beta.$$

Функция $K(\alpha, \beta)$, в общем случае комплекснозначная, порождается решением анизотропной граничной задачи в многослойной среде, является непрерывной и суммируемой на осях по обоим аргументам с поведением на бесконечности вида

$$K(\alpha,\beta) = O(\alpha^{-1}), \quad \beta = \text{const}, \quad K(\alpha,\beta) = O(\beta^{-1}), \quad \alpha = \text{const}, \quad |\alpha|, |\beta| \to \infty. \tag{2}$$

Здесь Γ_1, Γ_2 – непрерывные контуры соответственно в комплексных плоскостях α, β, лежащие на вещественных осях и отклоняющиеся от них, обходя особенности, описанные в [13, 14]. В настоящей статье приведены теоремы единственности интегрального уравнения (1).

Решение интегрального уравнения для штампа с прямым углом клина

Исследование, выполненное авторами статей [25, 26], дало возможность методом факторизации и блочного элемента построить точное решение двумерного интегрального уравнения Винера – Хопфа (1), которое имеет вид

$$q(x,y) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} Q(\alpha,\beta)\exp\left(-i(\alpha x + \beta y)\right)d\alpha d\beta. \tag{3}$$

Здесь принято обозначение

$$Q(\alpha,\beta) = K^{-1}F - \frac{1}{2}\Big[K_{+\alpha}^{-1}\{K_{-\alpha}^{-1}F\}_{-\alpha} + K_{+\beta}^{-1}\{K_{-\beta}^{-1}F\}_{-\beta} +$$
$$+ K_{+\alpha+\beta}^{-1}\{K_{+\alpha-\beta}^{-1}\{K_{-\alpha}^{-1}F\}_{+\alpha}\}_{-\beta} + K_{+\beta+\alpha}^{-1}\{K_{+\beta-\alpha}^{-1}\{K_{-\beta}^{-1}F\}_{+\beta}\}_{-\alpha}\Big]. \qquad (4)$$

Операторы в фигурных скобках детально описаны в [13, 14] и имеют вид

$$\{G(\alpha,\beta)\}_{+\alpha} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{G(\xi,\beta)}{\xi-\alpha}d\xi,\ \alpha\in\Pi_\alpha^+, \quad \{G(\alpha,\beta)\}_{-\alpha} = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{G(\xi,\beta)}{\xi-\alpha}d\xi,\ \alpha\in\Pi_\alpha^-,$$

$$\{G(\alpha,\beta)\}_{+\beta} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}\frac{G(\alpha,\eta)}{\eta-\beta}d\eta,\ \beta\in\Pi_\beta^+, \quad \{G(\alpha,\beta)\}_{-\beta} = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}\frac{G(\alpha,\eta)}{\eta-\beta}d\eta,\ \beta\in\Pi_\beta^-,$$

$$K_{+\alpha}(\alpha,\beta) = \exp\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{\ln K(\xi,\beta)}{\xi-\alpha}d\xi\right), \quad \alpha\in\Pi_\alpha^+,$$

$$K_{-\alpha}(\alpha,\beta) = \exp\left(-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{\ln K(\xi,\beta)}{\xi-\alpha}d\xi\right), \quad \alpha\in\Pi_\alpha^-, \qquad (5)$$

$$K_{+\beta}(\alpha,\beta) = \exp\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}\frac{\ln K(\alpha,\eta)}{\eta-\beta}d\eta\right), \quad \beta\in\Pi_\beta^+,$$

$$K_{-\beta}(\alpha,\beta) = \exp\left(-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}\frac{\ln K(\alpha,\eta)}{\eta-\beta}d\eta\right), \quad \eta\in\Pi_\beta^-.$$

Функции $G(\alpha,\eta)$, $G(\xi,\beta)$ приняты для обозначения операторов, символы Π_α^+, Π_α^- обозначают комплексные области выше (плюс) и ниже (минус) контура Γ_1, а символы Π_β^+, Π_β^- – области выше (плюс) и ниже (минус) контура Γ_2 соответственно.

Построенное решение (3), (4) обращает уравнение (1) в тождество. В [25, 26] исследованы свойства решения. Доказано, что в вершине клина решение имеет степенную особенность, которая построена аналитически в [25, 26]. Ранее эта особенность была исследована приближенно в [14].

Покажем, что интегральное уравнение (1) точно удовлетворяется функцией $q(x,y)$ вида (3), (4). Внося функцию (3) в интегральное уравнение (1) и учитывая свойства (4), получим соотношение вида

$$\mathbf{K}q = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^\infty\int_0^\infty\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}K(\alpha,\beta)\exp\left(-i[\alpha(x-\xi)+\beta(y-\eta)]\right)q(\xi,\eta)d\xi d\eta d\alpha d\beta = f(x,y).$$

После несложных преобразований с учетом свойств (4) получим представление

$$\mathbf{K}q = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}K(\alpha,\beta)Q(\alpha,\beta)\exp\left(-i(\alpha x+\beta y)\right)d\alpha d\beta = f(x,y).$$

Внесем в эту формулу $Q(\alpha,\beta)$ из (4) и исследуем интеграл слева. В результате анализа факторизованных функций, исключения членов, обращающих интеграл в ноль, убеждаемся, что получается требуемое соотношение

$$\mathbf{K}q = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-i(\alpha x+\beta y)\right)F(\alpha,\beta)d\alpha d\beta = f(x,y).$$

Соотношения (3), (4) принимаются за основу для построения решений контактных задач для штампов остроугольной формы.

Теория тупоугольных клиновидных штампов на анизотропном композите

Для тупоугольных клиновидных областей Ω_ν вводятся координаты вида

$$\Omega_\nu(\rho,\nu),\quad \rho=\sqrt{x^2+y^2},\quad x=\rho\cos\nu,\quad y=\rho\sin\nu,\quad 0\le\rho<\infty,\ \pi/2\le\nu\le\pi.$$

Здесь ν – угол раствора штампа. Очевидно, что при $\nu = \pi/2$ клиновидный штамп имеет прямой угол.

С применением гомеоморфизмов носителей, операторов и решений уравнений (1), (3), (4) для разных ν оказывается возможным построить точные решения для всей совокупности штампов с тупым углами $\pi/2 \le \nu \le \pi$. После проведения гомеоморфных преобразований получается результат, приведенный в [25].

Точные решения $q_\nu(x, y)$ интегральных уравнений (1) в областях Ω_ν, $\pi/2 \le \nu \le \pi$, описываются решениями уравнения (1), формулы (3), (4) при $\nu = \pi/2$, построенными при измененных ядрах, где вместо $K(\alpha, \beta)$ берется $K(\alpha, -\alpha\sin\nu + \beta\cos\nu)$, и заданных функциях, где вместо $f = f(x, y)$ берется функция $f[x + y\,\mathrm{tg}\,\nu,\ y/\cos\nu]$. Решения для каждого $0 < \nu \le \pi/2$ даются формулами

$$q_\nu(x,y)=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}Q_\nu(\alpha,\beta)\exp\left(-i(\alpha\xi+\beta\eta)\right)d\alpha d\beta,\quad \xi=x+y\,\mathrm{tg}\,\nu,\ \eta=\frac{y}{\cos\nu}. \quad (6)$$

Здесь приняты обозначения, где произведены упомянутые замены

$$Q_\nu(\alpha,\beta)=K^{-1}F-\frac{1}{2}\left[K_{+\alpha}^{-1}\left\{K_{-\alpha}^{-1}F\right\}_{-\alpha}+K_{+\beta}^{-1}\left\{K_{-\beta}^{-1}F\right\}_{-\beta}+\right.$$
$$\left.+K_{+\alpha+\beta}^{-1}\left\{K_{+\alpha-\beta}^{-1}\left\{K_{-\alpha}^{-1}F\right\}_{+\alpha}\right\}_{-\beta}+K_{+\beta+\alpha}^{-1}\left\{K_{+\beta-\alpha}^{-1}\left\{K_{-\beta}^{-1}F\right\}_{+\beta}\right\}_{-\alpha}\right]. \quad (7)$$

Пример. Используя приведенные способы нахождения особенностей концентрации контактных напряжений в угловой точке штампа [25, 26], осуществим их аналитическое описание у штампов, занимающих области Ω_ν.

Применив использованный алгоритм [26], получаем, что для функции

$$q_\nu(x,y)=O\left(r^{-\lambda}\right) \quad (8)$$

поведение концентрации контактных напряжений в диапазоне $\pi/2 \le \nu \le \pi$ определяется выражением

$$\lambda=1-\frac{1}{\pi}\mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{1+\sin^2\nu}}{\cos\nu}. \quad (9)$$

На рис. 1 построен график функции λ. Вычисленное по этой формуле значение параметра особенностей λ практически точно совпадает с этим же параметром кривой рис. 2 на интервале [0,25, 0,50], что соответствует углам раствора штампа $[\pi/2, \pi]$. Вычисления выполнены приближенным методом [17, стр. 129]. Для сравнения с результатом статьи необходимо брать $\varepsilon = 0$, $\theta/\pi = [0{,}25, 0{,}5]$.

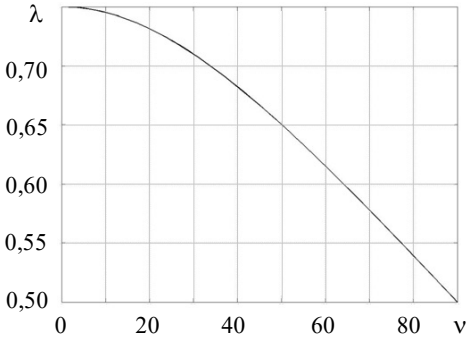


Рис. 1. График функции λ при изменении угла ν от 90° (0) до 180° (90)

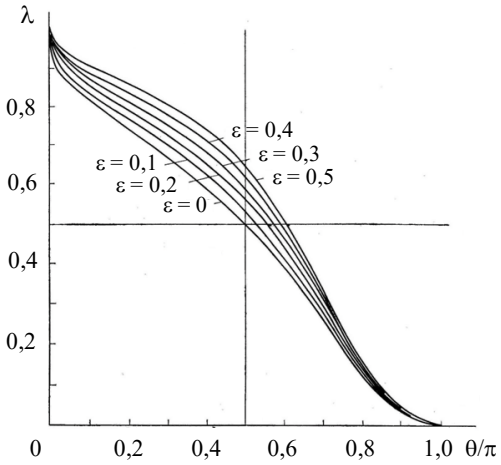


Рис. 2. Поведение параметра особенности λ в угловой точке штампа для разных коэффициентов трения ε

При $\nu \to \pi$ особенность концентрации контактных напряжений становится соответствующей прямой границе штампа, то есть $\lambda \to 0{,}5$. Таким образом, формулы (3), (4), (8), (9) при $\pi/2 \le \nu \le \pi$ впервые аналитически описывают поведение решения в угловой точке тупоугольного штампа на анизотропном композите.

Нужно иметь в виду, что решение, полученное с помощью этого подхода, применимо в задачах для интеллектуальных материалов, динамических и нестационарных задач.

Заключение

Впервые приведены общие свойства точного решения контактной задачи для клиновидного штампа с тупым углом. Этот результат, благодаря топологическим преобразованиям, позволяет точно описывать особенности в угловых точках границы штампов с тупым углом. Решение может быть использовано в сейсмологии для выявления новых предвестников сейсмического роста в горных районах с анизотропными свойствами окружающей среды. В частности, полученные значения концентрации напряжений указывают на области повышенной сейсмичности в зонах перехода горных территорий в равнинные при наличии изломов границы с тупым углом. Результаты могут быть полезны в инженерной практике при проектировании

изделий с использованием конструкционных материалов, в том числе, интеллектуальных.

Список литературы

1. Freund L. B. *Dynamic Fracture Mechanics*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1998. 520 p.

2. Achenbach J.D. *Wave Propagation in Elastic Solids*. Amsterdam: North-Holland, 1973. 480 p.

3. Abrahams I.D., Wickham G.R. General Wiener – Hopf factorization matrix kernels with exponential phase factors. *Journal of Applied Mathematics*. 1990. Vol. 50. No 3. P. 819–838. https://www.jstor.org/stable/2101888.

4. Norris A.N., Achenbach J.D. Elastic wave diffraction by a semi infinite crack in a transversely isotropic material. *Quarterly Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 1984. Vol. 37. Iss. 4. P. 565–580. https://doi.org/10.1093/qjmam/37.4.565.

5. Cocou M. A class of dynamic contact problems with Coulomb friction in viscoelasticity. *Nonlinear Analysis: Real World Applications.* 2015. Vol. 22. P. 508–519. DOI: 10.1016/j.nonrwa.2014.08.012.

6. Papangelo A., Ciavarella M., Barber J. R. Fracture mechanics implications for apparent static friction coefficient in contact problems involving slip-weakening laws. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Science*. 2015. Vol. 471. No 2180. P. 1–13. https://doi.org/10.1098/RSPA.2015.0271.

7. Chakrabarti A., George A.J. Solution of a singular integral equation involving two intervals arising in the theory of water waves. *Applied Mathematics Letters.* 1994 . Vol. 7. P. 43–47. DOI: 10.1016/0893-9659(94)90070-1.

8. Davis A.M.J. Continental shelf wave scattering by a semi-infinite coastline. *Geophysics, Astrophysics, Fluid Dynamics*. 1987. Vol. 39. Iss. 1. P. 25–55. DOI: 10.1080/03091928708208804.

9. Горячева И.Г. *Механика фрикционного взаимодействия*. М.: Наука, 2001. 478 с.

10. Баженов В.Г., Игумнов Л.А. *Методы граничных интегральных уравнений и граничных элементов*. М.: Физматлит, 2008. 352 с.

11. Калинчук В.В., Белянкова Т.И. *Динамические контактные задачи для предварительно напряженных тел*. М.: Физматлит, 2002. 240 с.

12. Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М., Евдокимов В.С., Хрипков Д.А. Динамические контактные задачи для полуполосового штампа на анизотропном композите. *Проблемы прочности и пластичности*. 2024. Т. 86. №4. С. 461–470. DOI: 10.32326/1814-9146-2024-86-4-461-470.

13. Ворович И.И., Бабешко В.А. *Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей*. М.: Наука, 1979. 320 с.

14. Бабешко В.А., Глушков Е.В., Зинченко Ж.Ф. *Динамика неоднородных линейно-упругих сред*. М.: Наука, 1989. 344 с.

15. Kushch V.I. *Micromechanics of Composites: Multipole Expansion Approach*. Oxford–Waltham: Elsevier, 2013. 489 p.

16. McLaughlin R. A study of the differential scheme for composite materials. *International Journal of Engineering Science*. 1977. Vol. 15. P. 237–244.

17. Awrejcewicz J., Pavlov S.P., Krysko A.V., Zhigalov M.V., Bodyagina K.S., Krysko V.A. Decreasing shear stresses of the solder joints for mechanical and thermal loads by topological optimization. *Materials*. 2020. Vol. 13. No 8. P. 1862-1 – 1862-19. DOI: 10.3390/ma13081862.

18. Awrejcewiez J., Krysko V.A., Mitskievich S.A., Zhigalov M.V., Krysko A.V. Nonlinear dynamics of heterogeneous shells. Part 1: Statics and dynamics of heterogeneous variable stiffness shells. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2021. Vol. 130. No 13. Article No 103669. https://doi.org/10.1016/jijnonlinmec.2021.103669.

19. Fedorov A.Yu., Matveenko V.P. Designing of interlayers between materials with minimum stress level at the interface. *International Journal of Adhesion and Adhesives*. 2021. Vol. 111. Article No 102963. https://doi.org/10.1016/j.ijadhadh.2021.102963.

20. Fernandez L., Novotny A.A., Prakash R., Sokolowski J. Pollution sources reconstruction based on the topological derivative method. *Applied Mathematics & Optimization.* 2021. Vol. 84. P. 1493–1525. https://doi.org/10.1007/s00245-020-09685-0.

21. Gomes G.F., de Almeida F.A. Tuning metaheuristic algorithms using mixture design: Application of sunflower optimization for structural damage identification. *Advances in Engineering Software*. 2020. Vol. 149. Article No 102877. https://doi.org/10.1016/j.advengsoft.2020.102877.

22. Goncalves J.F., Moreira J.B.D., Salas R.A. Identification problem of acoustic media in the frequency domain based on the topology optimization method. *Structural and Multidisciplinary Optimization*. 2020. Vol. 62. P. 1041–1059. https://doi.org/10.1007/s00158-020-02638-9.

23. Krysko A.V., Awrejcewicz J., Bodyagina K.S., Makseev A., Zhigalov M.V., Krysko V.A. Identification of inclusions in a non-uniform thermally conductive plate under extermal flows and internal heat sources by topological optimization. *Mathematics and Mechanics of Solids*. 2022. Vol. 27. No 9. P. 1649–1671. https://doi.org/10.1177/10812865211048522.

24. Krysko A.V., Awrejcewicz J., Dunchenkin P.D., Zhigalov M.V., Krysko V.A. Topological optimization of multilayer structural elements of MEMS/NEMS resonators with an adhesive layer subjected to mechanical loads. In: *Recent Approaches in the Theory of Plates and Plate-Like Structures*. Springer, 2022. P. 155–165. https://doi.org/10.1007/978-3-030-87185-7_13.

25. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Evdokimov V.S., Babeshko O.M. The mechanical concept of earthquakes in mountainous, fractured territories. *Acta Mechanica*. 2025. Vol. 236. No 11. P. 6489–6498. hpps//doi.org/10.1007/s00707-025-04470-y.

26. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M., Evdokimov V.S. Contact problems with a stamp in the form of an acute-angled wedge acting on an anisotropic composite layer. *Materials Physics and Mechanics*. 2025. Vol. 53. Iss. 3. P. 9–23. http://dx.doi.org/10.18149/MPM.5312025_x.

References

1. Freund L. B. *Dynamic Fracture Mechanics*. Cambridge, UK. Cambridge University Press. 1998. 520 p.

2. Achenbach J.D. *Wave Propagation in Elastic Solids*. Amsterdam. North-Holland. 1973. 480 p.

3. Abrahams I.D., Wickham G.R. General Wiener – Hopf factorization matrix kernels with exponential phase factors. *J. Appl. Math*. 1990. Vol. 50. No 3. P. 819–838. https://www.jstor.org/stable/2101888.

4. Norris A.N., Achenbach J.D. Elastic wave diffraction by a semi infinite crack in a transversely isotropic material. *Quart. J. Mech. Appl. Math*. 1984. Vol. 37. Iss. 4. P. 565–580. https://doi.org/10.1093/qjmam/37.4.565.

5. Cocou M.: A class of dynamic contact problems with Coulomb friction in viscoelasticity. *Nonlinear Analysis: Real World Applications.* 2015. Vol. 22. P. 508–519. DOI: 10.1016/j.nonrwa.2014.08.012.

6. Papangelo A., Ciavarella M., Barber J. R. Fracture mechanics implications for apparent static friction coefficient in contact problems involving slip-weakening laws. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Science*. 2015. Vol. 471. No 2180. P. 1–13. https://doi.org/10.1098/RSPA.2015.0271.

7. Chakrabarti A., George A.J. Solution of a singular integral equation involving two intervals arising in the theory of water waves. *Appl. Math. Lett.* 1994 . Vol. 7. P. 43–47. DOI: 10.1016/0893-9659(94)90070-1.

8. Davis A.M.J. Continental shelf wave scattering by a semi-infinite coastline. *Geophysics, Astrophysics, Fluid Dynamics*. 1987. Vol. 39. Iss. 1. P. 25–55. DOI: 10.1080/03091928708208804.

9. Goryacheva I.G. *Mekhanika friktsionnogo vzaimodeystviya* [*Mechanics of Frictional Interaction*]. Moscow. Nauka Publ. 2001. 478 p. (In Russian).

10. Bazhenov V.G., Igumnov L.A. *Metody granichnykh integralnykh uravneniy i granichnykh elementov* [*Methods of Boundary Integral Equations and Boundary Elements*]. Moscow. Fizmatlit Publ. 2008. 352 p. (In Russian).

11. Kalinchuk V.V., Belyankova T.I. *Dinamicheskie kontaktnye zadachi dlya predvaritelno napryazhennykh tel* [*Dynamic Contact Problems for Prestressed Bodies*]. Moscow. Fizmatlit Publ. 2002. 240 p. (In Russian).

12. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M., Evdokimov V.S., Khripkov D.A. Dinamicheskie kontaktnye zadachi dlya polupolosovogo shtampa na anizotropnom kompozite [Dynamic contact problems for a half-strip stamp on an anisotropic composite]. *Problemy prochnosti i plastichnosti* [*Problems of Strength and Plasticity*]. 2024. Vol. 86. No 4. P. 461–470 (In Russian).

13. Vorovich I.I., Babeshko V.A. *Dinamicheskie smeshannye zadachi teorii uprugosti dlya neklassicheskikh oblastey* [*Dynamic Mixed Problems of Elasticity Theory for Nonclassical Domains*]. Moscow. Nauka Publ. 1979. 320 p. (In Russian).

14. Babeshko V.A., Glushkov E.V., Zinchenko Zh.F. *Dinamika neodnorodnykh lineyno-uprugikh sred* [*Dynamics of Inhomogeneous Linear Elastic Media*]. Moscow. Nauka Publ. 1989. 344 p. (In Russian).

15. Kushch V.I. *Micromechanics of Composites: Multipole Expansion Approach*. Oxford. Waltham, Ma (Usa). Elsevier. 2013. 489 p.

16. McLaughlin R. A study of the differential scheme for composite materials. *Int. J. Eng. Sci.* 1977. Vol. 15. P. 237–244.

17. Awrejcewicz J., Pavlov S.P., Krysko A.V., Zhigalov M.V., Bodyagina K.S., Krysko V.A. Decreasing shear stresses of the solder joints for mechanical and thermal loads by topological optimization. *Materials*. 2020. Vol. 13. No 8. P. 1862-1 – 1862-19. DOI: 10.3390/ma13081862.

18. Awrejcewiez J., Krysko V.A., Mitskievich S.A., Zhigalov M.V., Krysko A.V. Nonlinear dynamics of heterogeneous shells. Part 1: Statics and dynamics of heterogeneous variable stiffness shells. *Int. J. Non Linear. Mech.* 2021. Vol. 130. No 13. Article No 103669. https://doi.org/10.1016/jijnonlinmec.2021.103669.

19. Fedorov A.Yu., Matveenko V.P. Designing of interlayers between materials with minimum stress level at the interface. *Int. J. Adhes. Adhes.* 2021. Vol. 111. Article No 102963. https://doi.org/10.1016/j.ijadhadh.2021.102963.

20. Fernandez L., Novotny A.A., Prakash R., Sokolowski J. Pollution sources reconstruction based on the topological derivative method. *Applied Mathematics & Optimization.* 2021. Vol. 84. P. 1493–1525. https://doi.org/10.1007/s00245-020-09685-0.

21. Gomes G.F., de Almeida F.A. Tuning metaheuristic algorithms using mixture design: Application of sunflower optimization for structural damage identification. *Adv. Eng. Softw.* 2020. Vol. 149. Article No 102877. https://doi.org/10.1016/j.advengsoft.2020.102877.

22. Goncalves J.F., Moreira J.B.D., Salas R.A. Identification problem of acoustic media in the frequency domain based on the topology optimization method. *Structural and Multidisciplinary Optimization*. 2020. Vol. 62. P. 1041–1059. https://doi.org/10.1007/s00158-020-02638-9.

23. Krysko A.V., Awrejcewicz J., Bodyagina K.S., Makseev A., Zhigalov M.V., Krysko V.A. Identification of inclusions in a non-uniform thermally conductive plate under extermal flows and internal heat sources by topological optimization. *Mathematics and Mechanics of Solids.* 2022. Vol. 27. No 9. P. 1649–1671. https://doi.org/10.1177/10812865211048522.

24. Krysko A.V., Awrejcewicz J., Dunchenkin P.D., Zhigalov M.V., Krysko V.A. Topological optimization of multilayer structural elements of MEMS/NEMS resonators with an adhesive layer subjected to mechanical loads. In: *Recent Approaches in the Theory of Plates and Plate-Like Structures.* Springer. 2022. P. 155–165. https://doi.org/10.1007/978-3-030-87185-7_13.

25. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Evdokimov V.S., Babeshko O.M. The mechanical concept of earthquakes in mountainous, fractured territories. *Acta Mech.* 2025. Vol. 236. No 11. P. 6489–6498. hpps//doi.org/10.1007/s00707-025-04470-y.

26. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M., Evdokimov V.S. Contact problems with a stamp in the form of an acute-angled wedge acting on an anisotropic composite layer. *Mater. Phys. Mech.* 2025. Vol. 53. Iss. 3. P. 9–23. http://dx.doi.org/10.18149/MPM.5312025_x.

CONTACT PROBLEMS ON THE ACTION OF OBTUSE WEDGE-SHAPED IN TERMS OF STAMPS FOR ANISOTROPIC COMPOSITE*

Babeshko V.A.[1,2], **Evdokimov V.S.**[1], **Babeshko O.M.**[1], **Evdokimova O.V.**[2]

[1]*Kuban State University, Krasnodar, Russian Federation*

[2]*Southern Scientific Center of the Russian Academy of Sciences, Rostov-on-Don, Russian Federation*

babeshko41@mail.ru

Received by the Editor 2026/03/10

In this work, for the first time, an accurate solution of contact action problems is constructed. obtuse-angled wedge-shaped stamps on an anisotropic composite multilayer medium. This type of contact problems has not been solved for a long time, although their relevance in engineering practice is great, especially in problems for composite materials. The study of these problems became possible due to the solution of two-dimensional Wiener–Hopf integral equations developed by the authors. This was facilitated by a combination of approaches such as the block element method, topological and factorization methods. As a result, ranges of domain parameters have been found for which it is possible to construct an accurate solution of contact problems for obtuse-angled wedge-shaped dies based on solutions of the two-dimensional Wiener–Hopf integral equation. For these purposes, the homeomorphism of maps of differential topology is used. As a result of the study, it is confirmed that the issues of identifying unlimited features of solutions to boundary problems arising at the boundaries of stamps, along with the use of spectral analysis methods, can be carried out using factorization methods, which was not previously known. The constructed solution opened up the possibility not only to study the structural properties of multicomponent anisotropic composites in contact with rigid dies of the specified shape, but also to study the strength and fracture of block structures of different sized blocks and inclusions that occur in seismology. In addition, the solution of this problem has opened up the possibility of creating a new type of surface wave emitters and transducers not previously described for wedge-shaped areas, which may be useful in problems of electronics, acoustics and nanomaterials.

Keywords: contact problems, wedge-shaped obtuse-angled stamp, anisotropic composite, factorization.

* Supported by the Russian Science Foundation and the Kuban Science Foundation (project 24-11-20006, regionally co-funded).