

УДК 539.3

**ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ
УСТОЙЧИВОСТИ КОНСОЛЬНО ЗАКРЕПЛЕННОГО СТЕРЖНЯ
СО СЛЕДЯЩЕЙ СИЛОЙ НА СВОБОДНОМ КОНЦЕ^{*)}**

Д.В. Капитанов, В.Ф. Овчинников, Л.В. Смирнов

Нижний Новгород

Представлены результаты численно-аналитического исследования неконсервативной устойчивости распределенной механической системы в виде консольно закрепленного стержня со следящей силой на свободном конце. Для исследования разработан численный алгоритм, предназначенный для изучения зависимости собственных значений от параметров системы. Алгоритм позволяет получить точное решение, так как подход не ограничивается традиционным учетом только небольшого числа низших форм колебаний. Показано, что потеря устойчивости проявляется в виде колебаний по второй форме и что известное дестабилизирующее влияние внутреннего трения в значительной мере зависит от влияния внешнего трения. Тестирование алгоритма проведено путем сравнения с результатами классических и современных численных и экспериментальных исследований.

Обусловленные несамосопряженностью операторов проблемы устойчивости неконсервативных упругих систем представляют несомненный теоретический интерес. В частности, это связано с актуальным для современной техники изучением динамики распределенных механических систем. Как показывают последние публикации, посвященные теоретическим и экспериментальным исследованиям в данной области (см., например, [1–3]), рассмотрение классических задач не утратило актуальности. Это связано с развитием вычислительной техники, а также теоретических методов исследования, что дает возможность проведения более детального анализа и рассмотрения новых качественных эффектов в подобных системах.

В настоящей работе представлены результаты численно-аналитического исследования устойчивости неконсервативной распределенной механической системы в виде консольно закрепленного стержня со следящей силой на свободном конце. Для исследования разработан численный алгоритм, с помощью которого изучены зависимость собственных значений от параметров и характер потери устойчивости. Алгоритм позволяет получить точное решение, так как подход не ограничивается традиционным учетом только небольшого числа низших форм колебаний. Тестирование алгоритма, проведенное с использованием классических результатов, согласуется с известными данными [4, 5].

^{*)} Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 05-08-50187а) и Министерства образования и науки РФ (грант Президента РФ на поддержку ведущих научных школ НШ-6391.2006.8).

1. Математическая модель

Полагаем, что однородный прямой стержень совершает малые плоские изгибные колебания. Один конец стержня жестко заделан, а другой свободен и нагружен продольной силой. Длину стержня будем считать много большей его поперечных размеров. При таких условиях уравнение колебаний стержня получено во многих работах. В монографии [6] это уравнение представлено как уравнение Эйлера вариационной задачи в форме принципа Гамильтона–Остроградского:

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + P \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \xi \frac{\partial y}{\partial t} + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

где $y(x, t)$ – поперечное перемещение стержня, x – продольная координата, t – время, EI – изгибная жесткость, P – сжимающая сила, ξ – коэффициент внешнего трения, m – приходящаяся на единицу длины масса стержня.

В рассматриваемом в статье случае консольного закрепления стержня с учетом действия продольной силы на свободном (то есть при $x = l$, где l – длина стержня) конце имеем следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} y(x, t)|_{x=0} = 0; \quad \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0; \quad EI \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \Big|_{x=l} = 0; \\ EI \frac{\partial^3 y(x, t)}{\partial x^3} \Big|_{x=l} + P(1 - \beta) \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=l} = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $\beta = 0$, если сила направлена вдоль оси x и $\beta = 1$, если сила следящая. Отметим, что первые два граничных условия отвечают за жесткую заделку одного конца стержня, а два последних отвечают за обращение в нуль момента и силы на другом, свободном, конце.

При учете внутреннего трения по гипотезе Кельвина–Фохта в уравнении (1) и краевых условиях (2) следует заменить модуль Юнга E на оператор $E(1 + \mu \partial / \partial t)$, где μ – коэффициент внутреннего трения. При $P = 0$ или $\beta = 1$ второе слагаемое в последнем из краевых условий (2) отсутствует, и в этом случае эти краевые условия (2) достаточны для исследования с учетом внутреннего трения.

2. Анализ математической модели

Краевая задача (1), (2) является несамосопряженной [4]. Источником несамосопряженности является следящая сжимающая нагрузка на свободном конце. Самосопряженность оператора D в рассматриваемом одномерном случае проверяется по выполнению перестановочного соотношения в скалярном произведении $\int u D v dx$ для двух любых непрерывных, дифференцируемых нужное число раз и удовлетворяющих краевым условиям функций u и v .

После умножения уравнения (1) на $\partial y / \partial t$ и интегрирования по x с учетом краевых условий и внутреннего трения в результате преобразований получим следующее выражение для производной от полной механической энергии системы:

$$\frac{d}{dt}(T + \Pi) = - \int_0^l \left[\xi \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 + EI \left(\frac{\partial^3 y}{\partial x^2 \partial t} \right)^2 \right] dx - P \beta \frac{\partial y(l, t)}{\partial x} \frac{\partial y(l, t)}{\partial t}, \quad (3)$$

где

$$T + \Pi = \frac{1}{2} \int_0^l \left\{ m \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 + EI \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)^2 - P \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right\} dx.$$

Анализ правой части выражения (3) показывает, что неконсервативность рассматриваемого стержня обусловлена двумя факторами: выражающейся первым слагаемым в правой части мощностью потерь на внешнее и внутреннее трение и выражающейся вторым слагаемым мощностью следящей силы. Смена знака правой части выражения (3) соответствует анализируемой ниже границе колебательной потери устойчивости прямолинейной формы.

3. Метод исследования поведения корней характеристического уравнения задачи

Для перехода к безразмерным уравнениям поделим уравнение (1) на EI/l^4 и проведем замену переменных: $x = l\varphi$, $t = \sqrt{m/EI} l^2 \tau$. В предположении, что сила на свободном конце является следящей ($\beta = 1$), получим:

$$\gamma \frac{\partial^5 y}{\partial \varphi^4 \partial \tau} + \frac{\partial^4 y}{\partial \varphi^4} + b \frac{\partial^2 y}{\partial \varphi^2} + \delta \frac{\partial y}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 y}{\partial \tau^2} = 0; \quad (4)$$

$$y(\varphi, \tau)|_{\varphi=0} = 0; \quad \frac{\partial y(\varphi, \tau)}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=0} = 0; \quad \frac{\partial^2 y(\varphi, \tau)}{\partial \varphi^2} \Big|_{\varphi=1} = 0; \quad \frac{\partial^3 y(\varphi, \tau)}{\partial \varphi^3} \Big|_{\varphi=1} = 0,$$

где

$$\gamma = \frac{\mu}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}; \quad \delta = \frac{\xi l^2}{EI} \sqrt{\frac{EI}{m}}; \quad b = \frac{Pl^2}{EI}.$$

После подстановки в (4) решения в виде $y(\varphi, \tau) = W(\varphi)e^{\lambda\tau}$ придем к краевой задаче на собственные значения:

$$(1 + \gamma\lambda) \frac{d^4 W}{d\varphi^4} + b \frac{d^2 W}{d\varphi^2} + (\delta\lambda + \lambda^2)W = 0; \quad (5)$$

$$W(\varphi)|_{\varphi=0} = 0; \quad \frac{dW(\varphi)}{d\varphi} \Big|_{\varphi=0} = 0; \quad \frac{d^2 W(\varphi)}{d\varphi^2} \Big|_{\varphi=1} = 0; \quad \frac{d^3 W(\varphi)}{d\varphi^3} \Big|_{\varphi=1} = 0.$$

Решение этой задачи для консольного закрепления стержня в частном случае, когда $b = \gamma = \delta = 0$, известно [7]. Этим решением можно воспользоваться для контроля описываемой ниже методики и в качестве исходной точки для расчета изменения корней характеристического уравнения задачи (5) в зависимости от значений параметров.

Общее решение задачи (5) имеет вид:

$$y = \sum_{i=1}^4 A_i e^{W_i \varphi},$$

где $W_i(\lambda, b, \gamma, \delta)$, $i = \overline{1, 4}$ – корни характеристического уравнения

$$F(W) = (1 + \gamma\lambda)W^4 + bW^2 + \delta\lambda + \lambda^2 = 0. \quad (6)$$

Для определения коэффициентов A_i ($i = \overline{1, 4}$) из краевых условий задачи имеем систему четырех однородных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned}
A_1 + A_2 + A_3 + A_4 &= 0, \\
W_1 A_1 + W_2 A_2 + W_3 A_3 + W_4 A_4 &= 0, \\
W_1^2 e^{W_1} A_1 + W_2^2 e^{W_2} A_2 + W_3^2 e^{W_3} A_3 + W_4^2 e^{W_4} A_4 &= 0, \\
W_1^3 e^{W_1} A_1 + W_2^3 e^{W_2} A_2 + W_3^3 e^{W_3} A_3 + W_4^3 e^{W_4} A_4 &= 0.
\end{aligned} \tag{7}$$

Раскрыв определитель системы (7) и приравняв его к нулю, так как задача должна иметь нетривиальное решение, получим следующее уравнение относительно неизвестных W_1, W_2, W_3, W_4 :

$$\begin{aligned}
D &= (W_2 - W_1)(W_4 - W_3)(e^{W_3+W_4} W_3^2 W_4^2 + e^{W_1+W_2} W_1^2 W_2^2) + \\
&+ (W_1 - W_3)(W_4 - W_2)(e^{W_2+W_4} W_2^2 W_4^2 + e^{W_1+W_3} W_1^2 W_3^2) + \\
&+ (W_4 - W_1)(W_3 - W_2)(e^{W_2+W_3} W_2^2 W_3^2 + e^{W_1+W_4} W_1^2 W_4^2) = 0.
\end{aligned} \tag{8}$$

Заметим, что собственные числа λ рассматриваются над полем комплексных чисел и имеют вид $\lambda = h + iw$.

4. Алгоритм численных расчетов

Функции $W_i (i = \overline{1,4})$ удовлетворяют уравнениям (6), (8). Равенство нулю функций $F(W_i)$ и D имеет место тогда и только тогда, когда действительные и мнимые части этих функций равны нулю. В результате получаем систему из десяти уравнений с десятью неизвестными:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} F(\lambda, W_i) = 0, \quad i = \overline{1,4}; \quad \operatorname{Im} F(\lambda, W_i) = 0, \quad i = \overline{1,4}; \\
\operatorname{Re} D(W_1, W_2, W_3, W_4) = 0; \quad \operatorname{Im} D(W_1, W_2, W_3, W_4) = 0.
\end{aligned} \tag{9}$$

Далее в разработанном алгоритме на каждом шаге малого изменения силы P от нуля до некоторого значения методом Ньютона решается система уравнений (9) и находятся собственные значения, причем в качестве начальных значений при отсутствии силы берутся значения, приведенные в литературе [7]. В дальнейшем (при изменении силы) в качестве начальных значений берутся значения, полученные на предыдущем шаге. В итоге получаем картину перемещения корней (h, w) на комплексной плоскости λ , что позволяет, в частности, определить критическое значение нагрузки и характер потери устойчивости.

5. Результаты расчетов

Безразмерные параметры b, γ, δ являются независимыми. Нагрузка принимала различные значения, начиная с $P = 0$, с шагом, определяемым в зависимости от изменения характеристических показателей $\lambda_k = h_k + iw_k, k = 1, 2, \dots$. Результаты расчетов представлены на рисунках, где приведены годографы характеристических показателей, соответствующих двум нижшим модам собственных колебаний. В силу симметрии графиков относительно оси w на рисунках изображена только верхняя часть плоскости hw . Годографы характеристических показателей, соответствующие более высоким модам, не представляют интереса для определения границы устойчивости и не приводятся.

Результаты исследования устойчивости консольного стержня со следящей силой на свободном конце без учета внешнего и внутреннего трения, полученные с использованием разработанного алгоритма, представлены на рис. 1. Потеря устойчивости в этом случае происходит при $b_{кр} = PF/EI = 20,05$, после слияния первых двух характеристических показателей, годограф которых изображен на рис. 1.

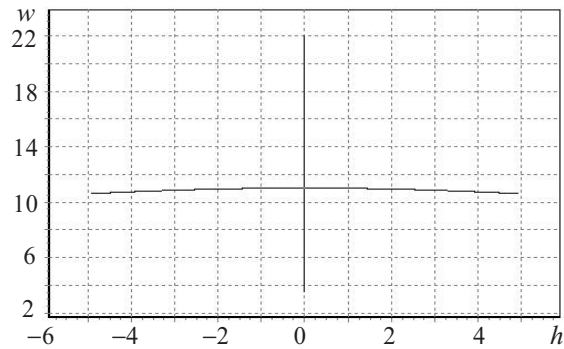


Рис. 1

Найденное критическое значения параметра b очень близко к приведенному в [4–5]. Так, в монографии [4] с использованием второго приближения по методу Бубнова–Галеркина при таком же качественном поведении характеристических показателей получено $b_{кр} = 20,19$. При этом следует отметить, что используемый в [4] метод для несамосопряженных задач не имеет строгого обоснования. Вместе с тем сравнение полученного в настоящей работе точного значения $b_{кр}$ с указанным приближенным лишней раз свидетельствует о справедливости приведенного в [4] утверждения, что формы потери устойчивости в несамосопряженных задачах могут быть удачно аппроксимированы при помощи линейной комбинации небольшого числа первых форм собственных колебаний, а примеров, когда это не так, не имеется.

В случае внешнего трения $\delta = 1,29$ характеристические показатели сдвигаются на одинаковое значение в левую полуплоскость (рис. 2). Качественное поведение корней аналогично первому случаю, и потеря устойчивости наступает при больших значениях параметра нагрузки: $b_{кр} = 20,29$.

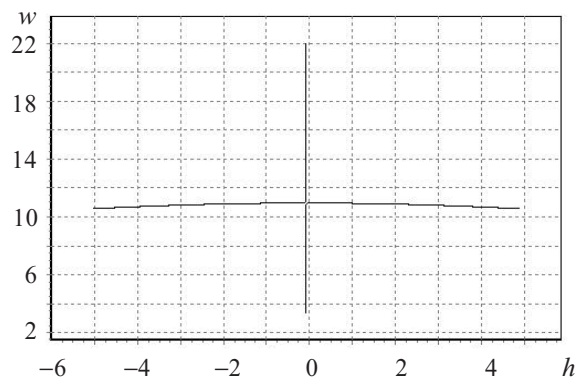


Рис. 2

В случае внутреннего трения $\gamma = 0,0035$ характеристические показатели стар-
туют также из левой полуплоскости, но уже с различной действительной частью
(рис. 3), что свидетельствует о том, что внутреннее трение влияет на старшие моды
колебания сильнее, чем на младшие.

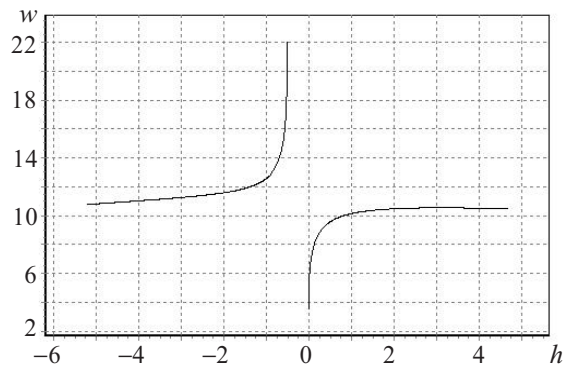


Рис. 3

При увеличении нагрузки показатели, соответствующие первой моде колебаний,
возвращаются к мнимой оси и переходят в правую полуплоскость. Однако потеря
устойчивости наступает при гораздо меньшей нагрузке по сравнению со случаем
отсутствия внутреннего трения: $b_{кр} = 11$. Впервые это явление было замечено Ци-
глером и носит в литературе название парадокса Циглера. Отметим также, что значения
критических параметров, полученные в настоящей работе, близки к значениям кри-
тических параметров, установленным другими авторами [5].

В общем случае присутствия обоих видов трения ($\delta = 1,29$; $\gamma = 0,0035$) харак-
теристические показатели стартуют также из левой полуплоскости; качественное
поведение характеристических показателей аналогично предыдущим случаям (рис.
4). Потеря устойчивости наступает при $b_{кр} = 20,22$.

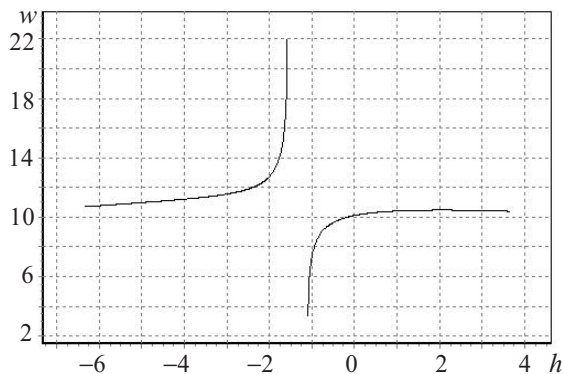


Рис. 4

При изучении влияния двух видов трения на критическое значение сжимающей
нагрузки основной интерес представляет внутреннее трение. Рост последнего, в
отличие от внешнего трения, не всегда приводит к росту критического значения

нагрузки: в области малых значений внутреннего трения имеет место снижение $b_{кр}$ при увеличении γ (так называемый эффект дестабилизации из-за внутреннего трения). Величина уменьшения критической нагрузки зависит от значения внешнего трения, с ростом которого эффект дестабилизации убывает. Это подтверждают результаты расчетов, приведенные на рис. 5, где представлены зависимости критических значений параметра $b_{кр}$ от величины внутреннего трения для нескольких различных значений внешнего трения.

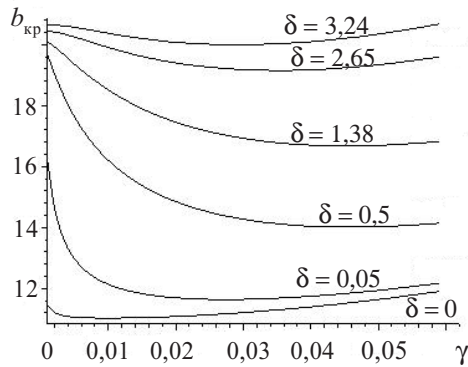


Рис. 5

Полная картина влияния параметров внутреннего и внешнего трения на величину критической нагрузки представлена на рис. 6. Из анализа рис. 5 и рис. 6 следует, что плоскость параметров внутреннего и внешнего трений (γ, δ) в зависимости от характера влияния внутреннего трения на величину критической нагрузки можно разбить на две области (рис. 7). В одной из них проявляется дестабилизирующее влияние внутреннего трения, когда с ростом уровня внутреннего трения критическая нагрузка снижается, а в другой – внутреннее трение оказывает стабилизирующее влияние.

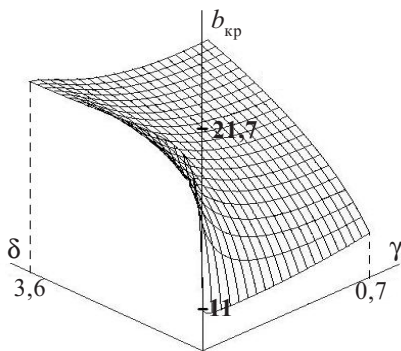


Рис. 6

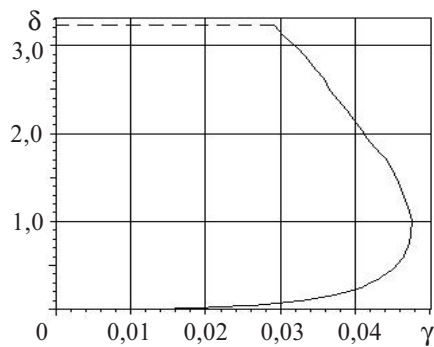


Рис. 7

Заключение

В статье предложена методика исследования динамических свойств прямого консольно закрепленного стержня со следящей силой на свободном конце, реализованная в виде численного алгоритма. С помощью последнего изучена зависимость собственных значений от параметров нагружения и коэффициентов трения и исследованы

дован характер потери устойчивости. Алгоритм позволяет получить точное решение, так как подход не ограничивается традиционным учетом только небольшого числа низших форм колебаний. Полученные с использованием этого алгоритма результаты количественно и качественно хорошо согласуются с данными, известными из литературы.

Литература

1. *Кириллов, О.Н.* Влияние малого и внешнего трения на устойчивость распределенных неконсервативных систем / О.Н. Кириллов, А.П. Сейранян // Прикладная математика и механика. – 2005. – Т. 69, вып. 4. – С. 584-611.
2. *Васильев, В.В.* Оценка критической следящей силы для консольного стержня / В.В. Васильев, М.Х. Муллагулов, Т.С. Набиев // Проблемы прочности. – 2004. – №5. – С. 108-112.
3. *Захаров, Ю.В.* Нелинейный изгиб тонких упругих стержней / Ю.В. Захаров, К.Г. Охоткин // Прикладная механика и техническая физика. – 2002. – Т.43, №5. – С. 124-131.
4. *Болотин, В.В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости / В.В. Болотин. – М.:Физматгиз, 1961. – 340 с.
5. *Пановко, Я.Г.* Устойчивость и колебания упругих систем / Я.Г. Пановко, И.И. Губанова. – М.: Наука, 1979. – 384 с.
6. *Смирнов, Л.В.* Колебания распределенных механических систем / Л.В. Смирнов. – Горький, 1984. – 48 с.
7. *Цейтлин, А.И.* Справочник по динамике сооружений / А.И. Цейтлин. – М.: Стройиздат, 1972. – 511 с.

[12.10.2007]

NUMERICAL-ANALYTICAL STABILITY INVESTIGATION OF BEAM WITH SERVO FORCE FIXED AS CANTILEVER AT FREE END

D.V. Kapitanov, V.F. Ovchinnikov, L.V. Smirnov

The numerical-analytical results of non-conservative stability investigation of the distributed mechanic system as a cantilevered-fixed beam with a servo force at the free end are presented. A numerical algorithm designed for studying eigenvalues-system parameters relation is developed and a stability loss according to these parameters is investigated. The algorithm allows to obtain an accurate solution, because the approach is not limited by traditional regarding only a small number of lower forms of vibrations. It is shown that the loss of stability becomes apparent in the form of vibrations of the second type and the known destabilized effect of the internal friction depends a lot on the effect of the external friction. The testing of the algorithm is carried out using the comparisons with classic and modern numerical and experimental investigations.