

УДК 539.3

DOI: 10.32326/1814-9146-2026-88-2-60-70

**ДРЕНИРОВАНИЕ ИЗБЫТКА ПОРОВОЙ ЖИДКОСТИ
ПРИ ОСАДКЕ ИНДЕНТОРА В ЖИДКОНАСЫЩЕННУЮ
ПОРООПРУГУЮ ПОЛУПЛОСКОСТЬ***

© 2026 г.

Зеленцов В.Б., Лапина П.А.

*Донской государственный технический университет,
Ростов-на-Дону, Российская Федерация*

vbzelen@gmail.com, polina_azarova86@mail.ru

Поступила в редакцию 08.12.2025

Рассматривается контактная задача об осадке жесткого индентора с плоской формой основания в жидконасыщенную пороупругую среду Био в виде полуплоскости. Дренаж жидкости осуществляется через основание индентора. С помощью преобразований Лапласа и Фурье решение контактной задачи сводится к решению системы двух двумерных интегральных уравнений I рода. Неизвестными в интегральных уравнениях являются контактные напряжения и контактное давление поровой жидкости. Полученная система интегральных уравнений, в свою очередь, сводится к системе двух одномерных интегральных уравнений I рода относительно трансформант Лапласа неизвестных функций контактных напряжений и контактного давления поровой жидкости. После выделения в левой части системы особых, в том числе сингулярных, частей ядер интегральных уравнений и переноса в правую часть регулярных интегралов система интегральных уравнений методом исключения приводится к треугольному виду. Последовательное обращение особых интегральных операторов, стоящих в левой части, приводит треугольную систему интегральных уравнений I рода к системе интегральных уравнений II рода. Для решения последней организуется схема метода последовательных приближений, посредством которой определяются сингулярные интегральные уравнения для определения трансформант Лапласа ее нулевого приближения. После обращения найденных интегральных уравнений определяются трансформанты Лапласа нулевого приближения, после обращения которых получаются нулевые члены решения поставленной задачи – контактные напряжения и контактное давление поровой жидкости. Полученные решения позволяют определить степень влияния рассматриваемого дренажа на поровое давление жидкости.

Ключевые слова: контактная задача, жидконасыщенная пороупругая среда, среда Био, контактные напряжения, контактное давление, дренаж, квазистатика, физико-механические свойства.

* Выполнено при поддержке РФФ, грант №22-19-00732-П.

Введение

Существенной проблемой расчета жидконасыщенных грунтов при осадке фундамента сооружений является расчет консолидации такого грунта, происходящей как в процессе строительства сооружений, так и в период их эксплуатации. Решение этой проблемы потребовало больших усилий исследователей в течение как минимум двух веков, начиная с работ Дарси, появившихся в начале XIX века. Большой вклад в эти исследования внесли публикации К. Terzaghi. Позднее М.А. Biot сформулировал основные уравнения математической модели консолидации грунта [1], а также представил решение задачи об осадке грунта при равномерной нагрузке для случаев проницаемой поверхности [2] и непроницаемой поверхности [3]. L.K. Agbezuge и H. Deresiewicz исследовали задачи об осадке в жидконасыщенное пороупругое полупространство проницаемых и непроницаемых сферических инденторов, а также цилиндрического штампа с плоским основанием [4–6]. В обзорной статье V.B. Glagovsky, B.M. Nuller [7] обсуждаются аналитические методы решения контактных задач теории консолидации. В статье A.P.S. Selvadurai [8] представлен обзор аналитических методов решения задач геомеханики. В обзорной статье M. Schanz [9] обсуждаются динамические модели пороупругости в рамках теории консолидации Био, их аналитические и полуаналитические решения, а также численные схемы аппроксимации. В книге A.H.-D. Cheng [10], посвященной механике инфильтрированных жидкостью пористых материалов, представлен подробный обзор аналитических способов решения задач консолидации. В [11] I. Argatov, G. Mishuris рассмотрели контактные задачи об индентировании жидконасыщенного пороупругого полупространства. A.P.S. Selvadurai, P. Samea в [12] детально рассмотрели задачу об индентировании пористого полупространства для трех видов граничных условий с учетом адгезии. В статье M.H. Esteki с соавторами [13] изучено влияние скорости вдавливания индентора на характеристики контакта при помощи метода конечных элементов. В [14] M. Wang с соавторами на основе теории Био и обобщенной контактной модели Герца предложили теорию, подходящую для материалов, в том числе биологических тканей, как с малыми, так и с большими релаксациями. В [15] V.B. Zelentsov, P.A. Larina рассмотрели задачу об осадке прозрачного для жидкости индентора. В статье M. Liu, X. Wen [16] получено решение пороупругой осесимметричной задачи Буссинеска в рамках теории Био для различных условий проницаемости на границе. В [17] Z. Zhang с соавторами рассмотрели задачу индентирования многослойного полупространства, состоящего из поперечно изотропных и пороупругих материалов.

В настоящей статье впервые представлена постановка и аналитическое решение квазистатической контактной задачи о дренаже избытков поровой жидкости, образующихся при осадке жесткого индентора с плоской формой основания в жидконасыщенную пороупругую среду в виде упругой полуплоскости. Для создания дренажа достаточно на основании индентора задать вертикальную составляющую скорости дренируемой жидкости и основание становится прозрачным для проникания жидкости сквозь него. Представлены формулы для определения основных механических характеристик задачи. Результаты численного эксперимента по полученным формулам представлены в виде графиков с кратким их анализом.

1. Контактная задача об осадке дренирующего индентора

Рассмотрим задачу об осадке вдоль оси z жесткого индентора с плоской формой основания шириной $2a$ ($-a \leq x \leq a$) в жидконасыщенную пороупругую полуплоскость $-\infty < x < \infty$, $-\infty < z \leq 0$ под действием силы $P(t)$ (рис. 1) с возможностью дренирования жидкости через основание индентора.

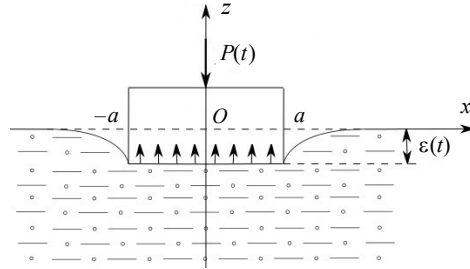


Рис. 1. Схема осадки индентора при наличии дренажа

Напряженно-деформированное состояние жидконасыщенной пороупругой полуплоскости в рамках модели среды Био [1–3] определяется соотношениями

$$\sigma_{xx} = G \left(2e_x + \frac{2\nu}{1-2\nu} \theta - \frac{\alpha_0}{G} \sigma \right), \quad e_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (1)$$

$$\sigma_{zz} = G \left(2e_z + \frac{2\nu}{1-2\nu} \theta - \frac{\alpha_0}{G} \sigma \right), \quad e_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad (2)$$

$$\sigma_{xz} = G e_{xz}, \quad e_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \theta = e_x + e_z, \quad (3)$$

где G – модуль сдвига упругого скелета жидконасыщенной пороупругой среды, ν – коэффициент Пуассона, σ_{xx} , σ_{zz} , σ_{xz} – упругие напряжения, e_x , e_z , e_{xz} – упругие деформации скелета, σ – давление поровой жидкости, u , w – горизонтальные и вертикальные смещения в упругом скелете, θ – объемная деформация, α_0 – безразмерный коэффициент.

Два дифференциальных уравнения равновесия в смещениях в отсутствие сил инерции и дифференциальное уравнение Дарси описывают поведение жидконасыщенной пороупругой полуплоскости Био [1–3] и записываются в виде

$$\Delta u - (2\eta - 1) \frac{\partial e}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial x} = 0, \quad (4)$$

$$\Delta w - (2\eta - 1) \frac{\partial e}{\partial z} - \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial z} = 0, \quad (5)$$

$$c \Delta e = \frac{\partial e}{\partial t}, \quad (6)$$

где Δ – оператор Лапласа, $\eta = (1 - \nu)/(1 - 2\nu)$, $e = -\theta$, $\tilde{\sigma} = \alpha_0 \sigma / G$ (в дальнейшем волна над σ опускается), $c = 2G\eta k$ – коэффициент Дарси, $k = k_n / \kappa = k_\phi / (\rho_j g)$, k_n – коэффициент проникания жидкости в упругой среде, κ – коэффициент гидродинамической вязкости, k_ϕ – коэффициент фильтрации, g – ускорение свободного падения, ρ_j – плотность жидкости, t – время.

Пусть осадка индентора происходит по закону $\varepsilon(t)$ при $t > 0$. Смешанные граничные условия на поверхности $z = 0$ полуплоскости записываются в виде:

$$w(x, 0, t) = -\varepsilon(t) \text{ при } -a \leq x \leq a, \quad (7)$$

$$\sigma_{zz}(x, 0, t) = -\varphi(x, t) \text{ при } -a \leq x \leq a, \quad (8)$$

$$\sigma_{zz}(x, 0, t) = 0 \text{ при } -\infty < x < -a, \quad a \leq x < \infty, \quad (9)$$

$$\sigma_{xz}(x, 0, t) = 0 \text{ при } -\infty < x < \infty, \quad (10)$$

$$\sigma(x, 0, t) = -\frac{\alpha_0}{G} \psi(x, t) \text{ при } -a \leq x \leq a, \quad (11)$$

$$\sigma(x, 0, t) = 0 \text{ при } -\infty < x < -a, \quad a \leq x < \infty, \quad (12)$$

$$V_z(x, 0, t) = -v_0(t) \text{ при } -a \leq x \leq a, \quad (13)$$

где $\varphi(x, t)$ и $\psi(x, t)$ – контактные напряжения и контактное давление поровой жидкости, развивающиеся на основании индентора и подлежащие определению; $V_z(x, z, t) = -G \cdot k / \alpha_0 \cdot (\partial \sigma / \partial z)$ – вертикальная (вдоль оси z) составляющая скорости поровой жидкости в среде; $v_0(t)$ – скорость дренажа поровой жидкости через основание индентора, при этом сила контактного воздействия $P(t)$ вычисляется по формуле

$$P(t) = \int_{-a}^a \varphi(x, t) dx, \quad t > 0.$$

Смещения u, w и их производные в полуплоскости при $\sqrt{x^2 + z^2} \rightarrow \infty$ исчезают:

$$\lim_{\sqrt{x^2+z^2} \rightarrow \infty} u, w, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (14)$$

Начальные условия поставленной задачи нулевые, так как до начального момента $t = 0$ среда находилась в покое:

$$u|_{t=0} = w|_{t=0} = \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \frac{\partial w}{\partial t}|_{t=0} = e|_{t=0} = 0. \quad (15)$$

2. Система интегральных уравнений контактной задачи

Сформулированная квазистатическая контактная задача об осадке жесткого индентора с плоской формой основания в жидконасыщенную пороупругую полуплоскость сводится с помощью интегральных преобразований Лапласа по времени t [18, 19] и Фурье по продольной координате x [20] к решению системы двух двумерных интегральных уравнений (СДЦИУ) I рода типа свертки Лапласа относительно безразмерных переменных и при $-1 \leq x \leq 1, t > 0$:

$$\int_0^t d\tau \int_{-1}^1 \varphi_*(\xi, \tau) k_{11} \left(\frac{\xi - x}{\lambda}, t - \tau \right) d\xi + \int_0^t d\tau \int_{-1}^1 \psi_*(\xi, \tau) k_{12} \left(\frac{\xi - x}{\lambda}, t - \tau \right) d\xi = f_1(t), \quad (16)$$

$$\int_0^t d\tau \int_{-1}^1 \varphi_*(\xi, \tau) k_{21} \left(\frac{\xi - x}{\lambda}, t - \tau \right) d\xi - \int_0^t d\tau \int_{-1}^1 \psi_*(\xi, \tau) k_{22} \left(\frac{\xi - x}{\lambda}, t - \tau \right) d\xi = f_2(t) \quad (17)$$

относительно неизвестных $\varphi_*(x, t)$ и $\psi_*(x, t)$, связанных с $\varphi(x, t)$ и $\psi(x, t)$ формулами

$$\varphi_*(x, t) = 2\eta\varphi(x, t), \quad \psi_*(x, t) = \alpha_0\psi(x, t) \text{ при } -1 \leq x \leq 1, t > 0. \quad (18)$$

Здесь

$$f_1(t) = 4\pi(2\eta - 1)Ga^{-1}\varepsilon(t), \quad f_2(t) = 4\pi(2\eta - 1)a^{-1}\alpha_0ck^{-1} \int_0^t v_0(\tau) d\tau,$$

$\lambda = (a\sqrt{p/c})^{-1}$ – безразмерный параметр, а ядра $k_{ij}(x, t)$ определяются формулами:

$$k_{ij}(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\gamma}^{i\infty+\gamma} e^{pt} dp \int_{-\infty}^{\infty} K_{ij}(u, p) e^{iux} du, \quad \operatorname{Re}(\gamma) > 0, \quad i, j = 1, 2, \quad (19)$$

$$K_{11}(u) = \frac{2\eta - 1}{2} \frac{1}{|u| \Delta(u)}, \quad (20)$$

$$K_{12}(u) = K_{21}(u) = (2\eta - 1) \frac{|u| \sqrt{u^2 + 1} - u^2}{|u| \Delta(u)}, \quad (21)$$

$$K_{22}(u) = -2(2\eta - 1) \frac{|u| \sqrt{u^2 + 1} (u^2 - \eta) - u^4}{|u| \Delta(u)}, \quad (22)$$

где $\Delta(u) = u^2 + \eta - |u| \sqrt{u^2 + 1}$.

Решение системы (16), (17) осуществляется в несколько этапов:

– с помощью преобразования Лапласа, применяемого к СДДИУ I рода (16), (17), ее решение сводится к решению эквивалентной системы двух одномерных интегральных уравнений (СДОИУ) I рода относительно неизвестных трансформант Лапласа контактных напряжений и контактного давления поровой жидкости;

– в полученной СДОИУ I рода осуществляется выделение особых (сингулярных) операторов, которые записываются в левой части, а получившиеся в результате этого регулярные интегральные операторы записываются в правой части СДОИУ I рода;

– после исключения во втором уравнении СДОИУ I рода оператора, содержащего контактные напряжения, система СДОИУ I рода преобразуется в новую СДОИУ треугольного вида с особыми операторами в левой части;

– после обращения особых (сингулярных) интегральных операторов, находящихся в левой части СДОИУ треугольного вида, получаем СДОИУ II рода, для решения которой используется метод последовательных приближений и выписывается его итерационная схема;

– нулевое приближение метода последовательных приближений определяется из треугольной СДОИУ вида

$$\int_{-1}^1 \varphi_{*0}^L(\xi, p) k_{11}^L \left(\frac{\xi - x}{\lambda} \right) d\xi + \int_{-1}^1 \psi_{*0}^L(\xi, p) k_{11}^L \left(\frac{\xi - x}{\lambda} \right) d\xi = 2\pi 2(2\eta - 1) G a^{-1} \varepsilon^L(p) \quad (23)$$

при $-1 \leq x \leq 1$,

$$\int_{-1}^1 \psi_{*0}^L(\xi, p) k_{34}^L \left(\frac{\xi - x}{\lambda} \right) d\xi = 2\pi G a^{-1} \varepsilon^L(p) - 2\pi a^{-1} \alpha_0 c k^{-1} p^{-1} v_0^L(p) \quad (24)$$

при $-1 \leq x \leq 1$,

где верхним индексом L обозначены трансформанты Лапласа,

$$k_{ij}^L(\zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} K_{ij}(u) e^{i\zeta u} du, \quad ij = 11, ij = 34, \quad (25)$$

$$K_{34}(u) = -\frac{1}{2|u| \Delta(u)} \left(|u| \sqrt{u^2 + 1} (2u^2 - 1 - 2\eta) - u^2 (2u^2 - 1) \right), \quad (26)$$

а $K_{11}(u)$ задано в (20); $\Delta(u)$ приведено после (22).

3. Решение интегрального уравнения (24)

Эффективное решение интегрального уравнения (24) строится для малых значений параметра λ (или для больших p) в мультипликативной форме [21, 22]:

$$\Psi_*^L(x, p) = \frac{1}{2\pi} \frac{G}{a\lambda} \frac{\varepsilon^L(p)}{\sqrt{A \cdot B/C}} \Psi_+^L\left(\frac{1+x}{\lambda}, p\right) \Psi_-^L\left(\frac{1-x}{\lambda}, p\right) \text{ при } -1 \leq x \leq 1, \quad (27)$$

$$\Psi_{\pm}^L\left(\frac{1 \pm x}{\lambda}, p\right) = \frac{C}{B\sqrt{A}} \operatorname{Erf}\left(\sqrt{A} \frac{1 \pm x}{\lambda}\right) - \frac{C-B}{B} \frac{e^{-B(1 \pm x)/\lambda}}{\sqrt{A-B}} \operatorname{Erf}\left(\sqrt{(A-B)} \frac{1 \pm x}{\lambda}\right), \quad (28)$$

функция Erf – интеграл ошибок.

Построенное в такой форме решение интегрального уравнения (24) обращается в ноль на границе области контакта при $x = \pm 1$. Коэффициенты A, B, C являются коэффициентами аппроксимации трансформанты

$$K_{34}(u) = \sqrt{u^2 + A^2} \frac{u^2 + B^2}{u^2 + C^2}, \text{ при } K_{34}(0) = A \frac{B^2}{C^2}. \quad (29)$$

4. Решение интегрального уравнения (23)

Решение $\chi^L(x, p) = \Phi_{*0}^L(x, p) + \Psi_{*0}^L(x, p)$ интегрального уравнения (23) аналогично решению интегрального уравнения (24) строится в мультипликативной форме:

$$\chi^L(x, p) = \frac{2\eta-1}{\pi} \frac{G}{a} \frac{\varepsilon^L(p)}{\lambda} X_+^L\left(\frac{1+x}{\lambda}\right) X_-^L\left(\frac{1-x}{\lambda}\right) \text{ при } -1 \leq x \leq 1, \quad (30)$$

$$X_{\pm}^L\left(\frac{1 \pm x}{\lambda}\right) = \frac{C}{B} \Phi\left(0, 0, \frac{1 \pm x}{\lambda}\right) + \frac{B-C}{B} \Phi\left(0, B, \frac{1 \pm x}{\lambda}\right), \quad (31)$$

$$\Phi(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{e^{-\alpha\gamma}}{\sqrt{\pi\gamma}} + \sqrt{\alpha-\beta} e^{-\beta\gamma} \operatorname{Erf}\left(\sqrt{(\alpha-\beta)\gamma}\right). \quad (32)$$

Появление постоянных B, C в (31) связано с аппроксимацией

$$K_{11}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \delta^2}} \frac{\alpha^2 + B^2}{\alpha^2 + C^2} \text{ при } \delta \rightarrow 0. \quad (33)$$

Полученное решение $\chi_L(x, p)$ интегрального уравнения (23) является функцией, интегрируемой на $-1 \leq x \leq 1$, с корневыми особенностями в краях области контакта при $x = \pm 1$.

5. Решение системы двумерных интегральных уравнений (23), (24)

Обратив формулу (27) с помощью обратного преобразования Лапласа [20], получим формулу нулевого члена метода последовательных приближений $\Psi_*(x, t)$ исходной системы двумерных интегральных уравнений (23), (24) в виде

$$\Psi_*(x, t) = \frac{1}{\pi^2} \frac{Ga^3}{c^2} (1-x)^{3/2} (1+x)^{3/2} \int_0^t (\dot{\varepsilon}(\tau) - 2\eta\alpha_0\nu_0(\tau)) F(x, t-\tau) d\tau \quad (34)$$

при $-1 \leq x \leq 1, t > 0$,

$$F(x,t) = \int_0^t f_+(x,t)f_-(x,t-\tau)d\tau, \quad \Phi(\alpha,\beta,\gamma,t) = t^{-3/2} \int_0^1 (\alpha\xi^2 + \beta)e^{-\gamma^2(\alpha\xi^2 + \beta)^2} d\xi, \quad (35)$$

$$f_{\pm}(x,t) = -\frac{C}{B}\Phi\left(A, 0, \frac{(1\pm x)a}{\sqrt{4ct}}, t\right) + \frac{C-B}{B}\Phi\left(A-B, B, \frac{(1\pm x)a}{\sqrt{4ct}}, t\right).$$

Приближенное решение $\psi_*(x,t)$, являющееся распределением контактного давления поровой жидкости, построено в классе гладких функций $\psi_*(x,t) = \omega_\psi(x,t) \times (1-x)^{3/2}(1+x)^{3/2}$, где $\omega_\psi(x,t)$ непрерывна по x при $-1 \leq x \leq 1, t > 0$.

Для определения нулевого приближения решения $\varphi_*(x,t)$ двумерной системы интегральных уравнений (23), (24) достаточно определить оригинал $\chi(x,t)$ трансформанты $\chi^L(x,p)$ решения интегрального уравнения (23)

$$\varphi_*(x,t) = \chi(x,t) - \psi_*(x,t) \text{ при } -1 \leq x \leq 1, t > 0, \quad (36)$$

где $\psi_*(x,t)$ дается формулой (34):

$$\chi(x,t) = \frac{2}{\pi} \frac{G}{a} \frac{2\eta-1}{\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}} \left[\varepsilon(t) + 2\pi \frac{C-B}{B} \sqrt{t}(Z_+(x,t) + Z_-(x,t)) + 4\pi \left(\frac{C-B}{B} \right)^2 t X_+(x,t) X_-(x,t) \int_0^t \dot{\varepsilon}(\tau) F(x,t-\tau) d\tau \right] \text{ при } -1 \leq x \leq 1, t > 0, \quad (37)$$

$$Z_{\pm}(x,t) = X_{\pm}(x,t) \int_0^t \varepsilon(\tau) \Phi(X_{\pm}^2(x,t-\tau), t-\tau) d\tau,$$

$$\Phi(\alpha,t) = \frac{2}{\pi\sqrt{t^3}} \int_0^1 \left[\alpha(1-\xi^2)^2 - \frac{1}{2} \right] e^{-\alpha(1-\xi^2)^2} d\xi, \quad (38)$$

$$X_{\pm}(x,t) = B \frac{(1\pm x)a}{\sqrt{4ct}}, \quad F(x,t) = \int_0^t \Phi(X_-^2(x,t-\tau), t-\tau) \Phi(X_+^2(x,\tau), \tau) d\tau.$$

Функция $\chi(x,t)$ определена в классе интегрируемых функций по координате x с корневой особенностью на краях основания индентора при $x = \pm 1$, то есть $\chi(x,t) = \omega_\chi(x,t)(1-x)^{-1/2}(1+x)^{-1/2}$, где $\omega_\chi(x,t)$ непрерывна по x и t при $-1 < x < 1, t > 0$. Формулы (37), (38) показывают, что $\chi(x,t)$ пропорциональна осадке индентора $\varepsilon(t)$.

6. Численный анализ полученных решений

При расчетах полагалось, что осадка индентора в полуплоскость происходит по закону $\varepsilon(t) = a_0 t H(t_* - t) + a_0 t_* (H(t - t_*) - H(t - t_{**}))$ при $t \geq 0$, а скорость дренажа моделируется согласно закону $v_0(t) = v_0 (H(t - t_0) - H(t - t_{00}))$, где $H(t)$ – функция Хевисайда. На рис. 2 представлены графики контактного давления поровой жидкости $\psi(x,t)$ из (18), контактных напряжений упругого скелета $\chi(x,t)$ и контактных напряжений среды $\varphi(x,t)$ из (18), отнесенных к модулю сдвига G , рассчитанных в моменты времени $t_m = 0,25m$ с, $m = \overline{1,6}$. При расчетах положено $a_0 = 0,001$ м/с, $t_* = 1,0$ с, $t_{**} = 1,5$ с, $v_0 = 0,0001$ м/с, $t_0 = 0,5$ с, $t_{00} = 1,25$, $k_\phi = 10^{-5}$ м/с, $G = 115,38$ МПа, $\nu = 0,3$, $\alpha_0 = 1$, $a = 1$ м, $\rho_{ж} = 1000$ кг/м³. Разные цвета графиков напряжений соответствуют разным моментам времени (сплошные линии – без дренажа, штрихпунктирные линии – с дренажом), а величины заглубления индентора $\varepsilon(t)$ отмечены на

графике закона осадки цветными точками. Следует обратить внимание, что влияние дренажа будет заметно на графиках при $t > t_0$ согласно выбранному закону дренажа.

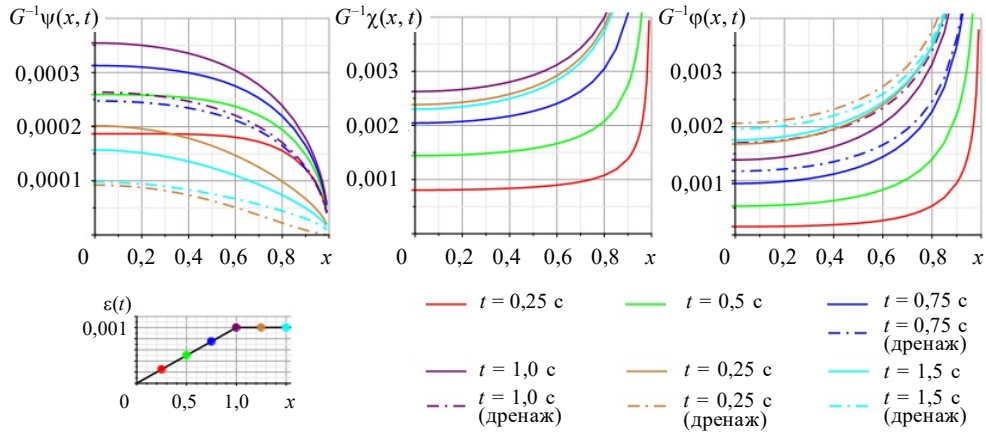


Рис. 2. Контактные давление поровой жидкости, напряжения упругого скелета и напряжения среды на основании индентора $0 \leq x \leq 1$

При расчете контактных напряжений упругого скелета $\chi(x, t)$ использовалась аппроксимация (33) с параметрами $B = 0,421, C = 0,498$ (погрешность 4,5%). При расчете контактного давления поровой жидкости $\psi(x, t)$ использовалась аппроксимация (29) с параметрами $A = 0,443, B = 1,098, C = 0,644$ (погрешность 2,5%).

На начальном этапе осадки индентора ($t < t_*$) в отсутствие дренажа контактное давление поровой жидкости $\psi(x, t)$ и контактные напряжения упругого скелета $\chi(x, t)$ растут с увеличением времени. После фиксации величины осадки ($t_* < t < t_{**}$) значения $\psi(x, t)$ и $\chi(x, t)$ снижаются. Значения $\psi(x, t)$ в отсутствие дренажа больше соответствующих по времени значений с учетом дренажа, а значения $\chi(x, t)$ от дренажа не зависят. Дренаж со временем повышает величину контактных напряжений $\phi(x, t)$.

Полученное решение поставленной задачи с возможностью дренирования поровой жидкости через основание индентора показывает, что давление поровой жидкости пропорционально величине осадки индентора $\epsilon(t)$ за минусом выражения $2\eta\alpha_0 \int_0^t v_0(\tau) d\tau$, что следует из формул (34), (18) и продемонстрировано на графиках $G^{-1}\psi(x, t)$ рис. 2, сопровождающих численный эксперимент.

На рис. 3 представлены графики изменения во времени действующей на индентор силы $P(t) = \int_{-a}^a \phi(x, t) dx, 0 \leq t \leq t_{**}$.

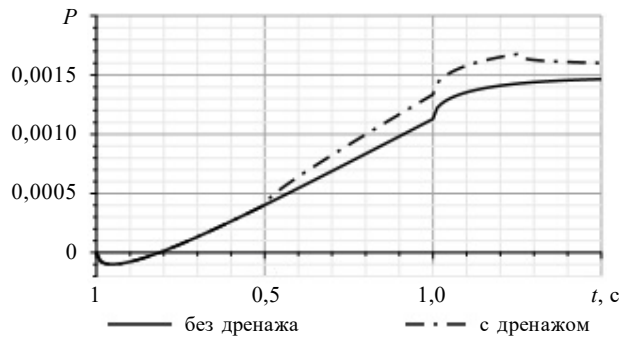


Рис. 3. Сила контактного воздействия $P(t)$ при $0 \leq t \leq 1,5$

Сплошная линия соответствует силе в отсутствие дренажа, штрихпунктирная линия соответствует силе с учетом дренажа.

Графики силы $P(t)$ подтверждают результаты, представленные на рис. 2 для контактных напряжений $G^{-1}\varphi(x, t)$, когда контактные напряжения увеличиваются в период работы дренажа. Это свидетельствует о консолидации жидконасыщенной поропругой среды и приводит к необходимости увеличения силы контактного воздействия $P(t)$, действующей на индентор, чтобы сохранить неизменной величину заглупления индентора.

Заклучение

Проведенные исследования подтверждают применимость теории консолидации Био для описания процесса дренирования жидконасыщенной поропругой среды.

Список литературы

1. Biot M.A. General theory of three dimensional consolidation. *Journal of Applied Physics*. 1941. Vol. 12. No 2. P. 155–164. DOI: 10.1063/1.1712886.
2. Biot M.A. Consolidation settlement under a rectangular load distribution. *Journal of Applied Physics*. 1941. Vol. 12. No 5. P. 426–430. DOI: 10.1063/1.1712921.
3. Biot M.A., Clingan F.M. Consolidation settlement of a soil with an impervious top surface. *Journal of Applied Physics*. 1941. Vol. 12. No 7. P. 578–581. DOI: 10.1063/1.1712940.
4. Agbezuge L.K., Deresiewicz H. On the indentation of a consolidating half-space. *Israel Journal of Technology*. 1974. Vol. 12. No 5-6. P. 322–338.
5. Deresiewicz H. On the indentation of a consolidating half-space II. Effect of Poisson's ratio. *Israel Journal of Technology*. 1977. Vol. 15. P. 89–97.
6. Agbezuge L.K., Deresiewicz H. The consolidation settlement of a circular footing. *Israel Journal of Technology*. 1975. Vol. 13. P. 264–269.
7. Глаговский Б.В., Нуллер Б.М. Контактные задачи теории консолидации. В кн.: *Механика контактных взаимодействий*. М.: Физматлит, 2001. С. 566–582.
8. Selvadurai A.P.S. The analytical method in geomechanics. *Applied Mechanics Reviews*. 2007. Vol. 60. No 3. P. 87–106. DOI: 10.1115/1.2730845.
9. Schanz M. Poroelastodynamics: Linear models, analytical solutions, and numerical methods. *Applied Mechanics Reviews*. 2009. Vol. 62. No 3. Article No 030803. DOI:10.1115/1.3090831.
10. Cheng A.H.D. *Poroelasticity (Theory and Applications of Transport in Porous Media*, 27). Cham: Springer International Publishing, 2016. 903 p.
11. Argatov I., Mishuris G. *Indentation Testing of Biological Materials*. Cham: Springer International Publishing, 2018. 376 p.
12. Selvadurai A.P.S., Samea P. On the indentation of a poroelastic halfspace. *International Journal of Engineering Science*. 2020. Vol. 149. Article No 103246. DOI: 10.1016/j.ijengsci.2020.103246.
13. Mohammad Hadi Esteki, Ali Akbar Alemrajabi, Chloe M. Hall, Graham K. Sheridan, Mojtaba Azadi, Emad Moeendarbary. A new framework for characterization of poroelastic materials using indentation. *Acta Biomaterialia*. 2020. Vol. 102. P.138–148.
14. Ming Wang, Shaobao Liu, Zhimin Xu, Kai Qu, Moxiao Li, Xin Chen, Qing Xue, Guy M. Genin, Tian Jian Lu, Feng Xu. Characterizing poroelasticity of biological tissues by spherical indentation: An improved theory for large relaxation. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2020. Vol. 138. Article No 103920.
15. Zelentsov V.B., Lapina P.A. Pore-fluid filtration by squeezing a fluid-saturated poroelastic medium. In: *Mechanics of Heterogeneous Materials*. Springer, 2023. Vol. 195. P. 483–499.
16. Ming Liu, Xin Wen. Force relaxation response in the poroelastic axisymmetric Boussinesq problem for an indenter of arbitrary profiles I: Permeable and impermeable surface

drainage conditions. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2024. Vol. 184. Article number 105532.

17. Zhiqing Zhang, Ernian Pan, Jiangcun Zhou, Chih-Ping Lin, Shuangbiao Liu, Qian Wang. Indentation over a transversely isotropic, poroelastic, and layered half-space. *Applied Mathematical Modelling*. 2024. Vol. 127. P. 588–606. DOI:10.1016/j.apm.2023.12.027.

18. Brychkov Yu.A., Prudnikov A.P. *Integral Transforms of Generalized Functions*. New York: CRC Press, 1989. 344 p.

19. Поручиков В.Б. *Методы динамической теории упругости*. М.: Наука, 1986. 328 с.

20. Бейтмен Г., Эрдейи А. *Таблицы интегральных преобразований*. В 2 т. Т. 1. *Преобразования Фурье, Лапласа, Меллина*. М.: Наука, 1970. 328 с.

21. Зеленцов В.Б. Об одном методе решения нестационарных динамических контактных задач теории упругости об ударе. *Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Серия: Естественные науки*. 2010. Т. 6 (160). С. 35–40.

22. Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А. *Неклассические смешанные задачи теории упругости*. М.: Наука, 1974. 456 с.

References

1. Biot M.A. General theory of three dimensional consolidation. *J. Appl. Phys.* 1941. Vol. 12. No 2. P. 155–164. DOI: 10.1063/1.1712886.

2. Biot M.A. Consolidation settlement under a rectangular load distribution. *J. Appl. Phys.* 1941. Vol. 12. No 5. P. 426–430. DOI: 10.1063/1.1712921.

3. Biot M.A., Clingan F.M. Consolidation settlement of a soil with an Impervious top surface. *J. Appl. Phys.* 1941. Vol. 12. No 7. P. 578–581. DOI: 10.1063/1.1712940.

4. Agbezuge L.K., Deresiewicz H. On the indentation of a consolidating half-space. *Israel Journal of Technology*. 1974. Vol. 12. No 5-6. P. 322–338.

5. Deresiewicz H. On the indentation of a consolidating half-space II. Effect of Poisson's ratio. *Israel Journal of Technology*. 1977. Vol. 15. P. 89–97.

6. Agbezuge L.K., Deresiewicz H. The consolidation settlement of a circular footing. *Israel Journal of Technology* 1975. Vol. 13. P. 264–269.

7. Glagovskiy V.B., Nuller B.M. Kontaktnye zadachi teorii konsolidatsii [Contact problems of consolidation theory]. V kn.: *Mekhanika kontaknykh vzaimodeystviy* [In: *Mechanics of Contact Interactions*]. Moscow. Fizmatlit Publ. 2001. P. 566–582 (In Russian).

8. Selvadurai A.P.S. The analytical method in geomechanics. *Appl. Mech. Rev.* 2007. Vol. 60. No 3. P. 87–106. DOI: 10.1115/1.2730845.

9. Schanz M. Poroelastodynamics: Linear models, analytical solutions, and numerical methods. *Appl. Mech. Rev.* 2009. Vol. 62. No 3. Article No 030803. DOI:10.1115/1.3090831.

10. Cheng A.H.D. *Poroelasticity (Theory and Applications of Transport in Porous Media*, 27). Cham. Springer International Publishing. 2016. 903 p.

11. Argatov I., Mishuris G. *Indentation Testing of Biological Materials*. Cham. Springer International Publishing. 2018. 376 p.

12. Selvadurai A.P.S., Samea P. On the indentation of a poroelastic halfspace. *Int. J. Eng. Sci.* 2020. Vol. 149. Article No 103246. DOI: 10.1016/j.ijengsci.2020.103246.

13. Mohammad Hadi Esteki, Ali Akbar Alemrajabi, Chloe M. Hall, Graham K. Sheridan, Mojtaba Azadi, Emad Moeendarbary. A new framework for characterization of poroelastic materials using indentation. *Acta Biomater.* 2020. Vol. 102. P.138–148.

14. Ming Wang, Shaobao Liu, Zhimin Xu, Kai Qu, Moxiao Li, Xin Chen, Qing Xue, Guy M. Genin, Tian Jian Lu, Feng Xu. Characterizing poroelasticity of biological tissues by spherical indentation: An improved theory for large relaxation. *J. Mech. Phys. Solids*. 2020. Vol. 138. Article No 103920.

15. Zelentsov V.B., Lapina P.A. Pore-fluid filtration by squeezing a fluid-saturated poroelastic medium. In: *Mechanics of Heterogeneous Materials*. Springer. 2023. Vol. 195. P. 483–499.

16. Ming Liu, Xin Wen. Force relaxation response in the poroelastic axisymmetric Boussinesq problem for an indenter of arbitrary profiles I: Permeable and impermeable surface drainage conditions. *J. Mech. Phys. Solids*. 2024. Vol. 184. Article number 105532.

17. Zhiqing Zhang, Ernian Pan, Jiangcun Zhou, Chih-Ping Lin, Shuangbiao Liu, Qian Wang. Indentation over a transversely isotropic, poroelastic, and layered half-space. *Appl. Math. Model.* 2024. Vol. 127. P. 588–606. DOI: 10.1016/j.apm.2023.12.027.
18. Brychkov Yu.A., Prudnikov A.P. *Integral Transforms of Generalized Functions*. New York. CRC Press. 1989. 344 p.
19. Poruchikov V.B. *Metody dinamicheskoy teorii uprugosti [Methods of Dynamic Theory of Elasticity]*. Moscow. Nauka Publ. 1986. 328 p. (In Russian).
20. Bateman G., Erdelyi A. *Tables of Integral Transforms*. In 2 Vols. Vol. 1. New York. Mc Graw-Hill Book Company. 1954. 391 p.
21. Zelentsov V.B. Ob odnom metode resheniya nestatsionarnykh dinamicheskikh kontaktnykh zadach teorii uprugosti ob udare [On a method of solving nonstationary dynamic contact problems of the elasticity theory on the impact]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Severo-Kavkazskiy region. Natural sciences [Bulletin of Higher Education Institutes North Caucasus Region. Natural Sciences]*. 2010. Vol. 6 (160). P. 35–40 (In Russian).
22. Vorovich I.I., Aleksandrov V.M., Babeshko V.A. *Neklassicheskie smeshannye zadachi teorii uprugosti [Non-Classical Mixed Problems of Elasticity Theory]*. Moscow. Nauka Publ. 1974. 456 p. (In Russian).

DRAINAGE OF EXCESS PORE LIQUID DURING THE SETTLEMENT OF THE INDENTER INTO THE LIQUID-SATURATED POROELASTIC HALF-PLANE*

Zelentsov V.B., Lapina P.A.

Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russian Federation

vbzelen@gmail.com, polina_azarova86@mail.ru

Received by the Editor 2025/12/08

The paper considers the contact problem of the settlement of a rigid indenter with a flat base in a liquid-saturated poroelastic Biot medium in the form of a half-plane. Liquid drainage is carried out through the base of the indenter. Using the Laplace and Fourier transformations, the solution of the contact problem is reduced to the solution of a system of two two-dimensional integral equations of the first kind. The unknowns in the integral equations are the contact stresses and contact pressure of the pore liquid. The resulting system of integral equations in turn is reduced to a system of two one-dimensional integral equations of the first kind with respect to the Laplace transforms of unknown functions of contact stresses and contact pressure of the pore liquid. After isolating the special parts of the kernels of integral equations in the left part of the system, including the singular parts, and transferring the regular integrals to the right part, the system of integral equations is reduced to a triangular form by the elimination method. The successive inversion of the special integral operators on the left-hand side reduces the triangular system of integral equations of the first kind to a system of integral equations of the second kind. To solve the latter system, a scheme of the method of successive approximations is organized, by means of which singular integral equations are determined to find the Laplace transform of its zero approximation. After inverting the found integral equations, the Laplace transforms of the zero approximation are determined, after which the zero terms of the solution of the problem – contact stresses and contact pressure of the pore liquid are obtained. The obtained solutions allow us to determine the degree of influence of the drainage under consideration on the pore pressure of the liquid.

Keywords: contact problem, liquid-saturated poroelastic medium, Biot medium, contact stresses, contact pressure, drainage, quasistatics, physical and mechanical properties.

* The research was supported by Russian Science Foundation (grant 22-19-00732-II).