

УДК 539.31

DOI: 10.32326/1814-9146-2026-88-2-45-59

**НЕСТАЦИОНАРНАЯ ДИНАМИКА
АНИЗОТРОПНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК
ПО ГИПОТЕЗАМ ЧОУ***

© 2026 г.

**Никифоров А.В.¹, Сердюк Д.О.^{1,2},
Федотенков Г.В.^{1,2}**

¹*Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Российская Федерация*

²*Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Российская Федерация*

d.serduk55@gmail.com

Поступила в редакцию 02.03.2026

На основе обобщения гипотезы Т.С. Чоу для тонких пластин на оболочки построены новые фундаментальные решения для тонкой упругой анизотропной неограниченной цилиндрической оболочки постоянной толщины. Материал оболочки обладает симметрией относительно касательной плоскости к срединной поверхности в каждой ее точке. Фундаментальными решениями являются функции двух координат и времени нормального и тангенциальных перемещений в ответ на воздействие сосредоточенной единичной нагрузки, нормальной к срединной поверхности оболочки, математически описываемой дельта-функцией Дирака.

В постановку задачи входят уравнения движения для неограниченной тонкой анизотропной цилиндрической оболочки постоянной толщины, начальные условия и условия ограниченности решения на бесконечности. Решение поставленной задачи осуществляется с помощью интегральных преобразований Лапласа, Фурье и разложения искомым функций в экспоненциальные ряды Фурье. Для восстановления оригиналов по преобразованию Лапласа применяется теорема о вычетах, для обратного преобразования Фурье – численный метод интегрирования быстро осциллирующих функций. Контроль сходимости параметров численного интегрирования и рядов обеспечивается из условия выполнения критерия относительной погрешности с заданной точностью. Практическая реализация контроля сходимости параметров интегрирования осуществлена средствами языка программирования Python.

Верификация новых фундаментальных решений проведена путем сопоставления полученных результатов с результатами для тонкой неограниченной анизотропной цилиндрической оболочки Тимошенко постоянной толщины.

В ходе численных исследований проведена оценка вклада изгибных и сдвиговых составляющих в нормальное перемещение, также произведено

* Исследование выполнено за счет гранта РФФИ №25-29-01297, <https://rscf.ru/project/25-29-01297/>.

сравнение скорости вычислений новых фундаментальных решений с фундаментальными решениями для оболочки Тимошенко.

Ключевые слова: нестационарная динамика, анизотропный материал, фундаментальные решения, функции Грина, гипотезы Чоу, цилиндрическая оболочка.

Введение

Тонкостенные элементы, в частности оболочки, являются основной конструктивной частью в авиационной и космической промышленности. Ныне существующее производство обеспечивает возможность изготовления тонкостенных оболочечных конструкций с анизотропными свойствами. Для таких конструкций необходимо построение моделей и методик расчета напряженно-деформированного состояния при действии широкого спектра нагрузок в процессе эксплуатации летательного аппарата. Исследование волновых процессов в анизотропных тонкостенных элементах при действии нестационарного нагружения является сложной и важной задачей механики.

Исследования проблем нестационарной динамики оболочек приведены в отечественных научных статьях [1–4]. Статьи [1, 3] посвящены нестационарной динамике тонких упругих анизотропных цилиндрических оболочек, построенных на гипотезах Кирхгофа–Лява и Тимошенко. В статье [2] рассмотрено нестационарное динамическое осесимметричное нагружение трехслойной ортотропной оболочки, в [4] исследуется оболочка с упругим наполнителем при действии нестационарного давления.

Зарубежные статьи [5–19] также посвящены исследованиям динамического поведения тонкостенных конструкций. В них в основном используются численные методы решения задачи нестационарной динамики, однако присутствует и экспериментальная часть исследования [5, 6].

В настоящей статье представлены новые фундаментальные решения для тонкой упругой анизотропной неограниченной цилиндрической оболочки постоянной толщины, математическая модель которой основана на гипотезах Чоу для пластин [20].

1. Постановка задачи

В начальный момент времени на произвольную область боковой поверхности тонкой неограниченной анизотропной цилиндрической оболочки постоянной толщины воздействует нестационарное нормальное давление $p(\alpha, z, t)$ (рис. 1). Принимается, что в каждой точке оболочки касательная плоскость к срединной поверхности является плоскостью симметрии упругих свойств анизотропного материала оболочки. Материал оболочки характеризуется девятью независимыми упругими постоянными $c_{11}, c_{12}, c_{16}, c_{22}, c_{26}, c_{44}, c_{45}, c_{55}, c_{66}$.

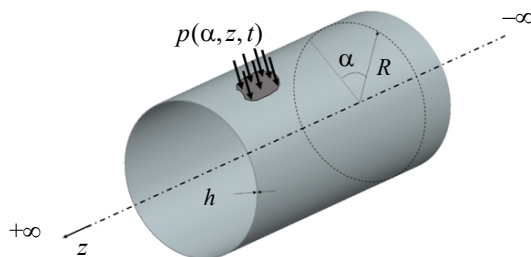


Рис. 1. Постановка задачи

Постановка задачи включает в себя уравнения движения тонкой упругой анизотропной оболочки [21] в цилиндрической системе координат, выраженные в перемещениях оболочки:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial t^2} &= K_{11}(u_\alpha) + K_{12}(u_z) + K_{13}(w_b) + K_{14}(w_s), \\
\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} &= K_{21}(u_\alpha) + K_{22}(u_z) + K_{23}(w_b) + K_{24}(w_s), \\
\frac{1}{R^2} \frac{\partial^4 w_b}{\partial t^2 \partial \alpha^2} + \frac{\partial^4 w_b}{\partial t^2 \partial z^2} &= K_{31}(u_\alpha) + K_{32}(u_z) + K_{33}(w_b) + K_{34}(w_s), \\
\frac{\partial^2 (w_b + w_s)}{\partial t^2} &= K_{41}(u_\alpha) + K_{42}(u_z) + K_{43}(w_b) + K_{44}(w_s) + \frac{1}{\rho h} p,
\end{aligned} \tag{1}$$

где K_{ij} – дифференциальные операторы:

$$\begin{aligned}
K_{11}(u_\alpha) &= \frac{1}{\rho h} \left[\frac{c_{11}}{R^2} \left(h + \frac{I}{R^2} \right) \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial \alpha^2} + \frac{2hc_{16}}{R} \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial \alpha \partial z} + hc_{66} \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial z^2} - \frac{hk^2 c_{55}}{R^2} u_\alpha \right], \\
K_{12}(u_z) &= \frac{1}{\rho h} \left[\frac{c_{16}}{R^2} \left(h + \frac{I}{R^2} \right) \frac{\partial^2 u_z}{\partial \alpha^2} + \frac{h}{R} (c_{12} + c_{66}) \frac{\partial^2 u_z}{\partial \alpha \partial z} + hc_{26} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right], \\
K_{13}(w_b) &= \frac{1}{\rho h} \left[\frac{c_{11}}{R^2} \left(h + \frac{I}{R^2} \right) \frac{\partial w_b}{\partial \alpha} + \frac{Ic_{11}}{R^4} \frac{\partial^3 w_b}{\partial \alpha^3} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{Ic_{12}}{R^2} \frac{\partial^3 w_b}{\partial \alpha \partial z^2} + \frac{2Ic_{16}}{R^3} \frac{\partial^3 w_b}{\partial \alpha^2 \partial z} + \frac{hc_{16}}{R} \frac{\partial w_b}{\partial z} \right],
\end{aligned} \tag{2}$$

$$K_{14}(w_s) = \frac{1}{\rho h} \left[\frac{1}{R^2} \left[c_{11} \left(h + \frac{I}{R^2} \right) + hk^2 c_{55} \right] \frac{\partial w_s}{\partial \alpha} + \frac{h}{R} (c_{16} + k^2 c_{45}) \frac{\partial w_s}{\partial z} \right],$$

$$K_{21}(u_\alpha) = \frac{1}{\rho h} \left[\frac{c_{16}}{R^2} \left(h + \frac{I}{R^2} \right) \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial \alpha^2} + \frac{h}{R} (c_{66} + c_{12}) \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial \alpha \partial z} + hc_{26} \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial z^2} \right] = K_{12}(u_\alpha),$$

$$K_{22}(u_z) = \frac{1}{\rho h} \left[\frac{c_{66}}{R^2} \left(h + \frac{I}{R^2} \right) \frac{\partial^2 u_z}{\partial \alpha^2} + \frac{2hc_{26}}{R} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \alpha \partial z} + hc_{22} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right],$$

$$\begin{aligned}
K_{23}(w_b) &= \frac{1}{\rho h} \left[\frac{c_{16}}{R^2} \left(h + \frac{I}{R^2} \right) \frac{\partial w_b}{\partial \alpha} + \frac{Ic_{16}}{R^4} \frac{\partial^3 w_b}{\partial \alpha^3} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{Ic_{26}}{R^2} \frac{\partial^3 w_b}{\partial \alpha \partial z^2} + \frac{2Ic_{66}}{R^3} \frac{\partial^3 w_b}{\partial \alpha^2 \partial z} + \frac{hc_{12}}{R} \frac{\partial w_b}{\partial z} \right],
\end{aligned} \tag{3}$$

$$K_{24}(w_s) = \frac{1}{\rho h} \left[\frac{c_{16}}{R^2} \left(h + \frac{I}{R^2} \right) \frac{\partial w_s}{\partial \alpha} + \frac{hc_{12}}{R} \frac{\partial w_s}{\partial z} \right],$$

$$K_{31}(u_\alpha) = \frac{1}{\rho I} \left[\frac{Ic_{11}}{R^4} \frac{\partial^3 u_\alpha}{\partial \alpha^3} + \frac{2Ic_{16}}{R^3} \frac{\partial^3 u_\alpha}{\partial \alpha^2 \partial z} + \frac{Ic_{12}}{R^2} \frac{\partial^3 u_\alpha}{\partial \alpha \partial z^2} - \frac{hk^2 c_{55}}{R^2} \frac{\partial u_\alpha}{\partial \alpha} - \frac{hk^2 c_{45}}{R} \frac{\partial u_\alpha}{\partial z} \right],$$

$$K_{32}(u_z) = \frac{1}{\rho I} \left[\frac{Ic_{16}}{R^4} \frac{\partial^3 u_z}{\partial \alpha^3} + \frac{2Ic_{66}}{R^3} \frac{\partial^3 u_z}{\partial \alpha^2 \partial z} + \frac{Ic_{26}}{R^2} \frac{\partial^3 u_z}{\partial \alpha \partial z^2} \right],$$

$$K_{33}(w_b) = \frac{1}{\rho I} \left[\frac{Ic_{11}}{R^4} \frac{\partial^4 w_b}{\partial \alpha^4} + \frac{2I}{R^2} (c_{12} + 2c_{66}) \frac{\partial^4 w_b}{\partial \alpha^2 \partial z^2} + \frac{4Ic_{16}}{R^3} \frac{\partial^4 w_b}{\partial \alpha^3 \partial z} + \frac{4Ic_{26}}{R} \frac{\partial^4 w_b}{\partial \alpha \partial z^3} + Ic_{22} \frac{\partial^4 w_b}{\partial z^4} + \frac{Ic_{11}}{R^4} \frac{\partial^2 w_b}{\partial \alpha^2} + \frac{Ic_{12}}{R^2} \frac{\partial^2 w_b}{\partial z^2} + \frac{2Ic_{16}}{R^3} \frac{\partial^2 w_b}{\partial \alpha \partial z} \right], \quad (4)$$

$$K_{34}(w_s) = \frac{1}{\rho I} \left[\frac{1}{R^2} \left(\frac{Ic_{11}}{R^2} + hk^2 c_{55} \right) \frac{\partial^2 w_s}{\partial \alpha^2} + \frac{2Ic_{16}}{R^3} \frac{\partial^2 w_s}{\partial \alpha \partial z} + \left(\frac{Ic_{12}}{R^2} + hk^2 c_{44} \right) \frac{\partial^2 w_s}{\partial z^2} + \frac{2hk^2 c_{45}}{R} \frac{\partial^2 w_s}{\partial \alpha \partial z} \right],$$

$$K_{41}(u_\alpha) = -K_{14}(u_\alpha), \quad K_{42}(u_z) = -K_{24}(u_z),$$

$$K_{43}(w_b) = -\frac{1}{\rho I} \left[\frac{c_{11}}{R^2} \left(h + \frac{I}{R^2} \right) w_b + \frac{Ic_{11}}{R^4} \frac{\partial^2 w_b}{\partial \alpha^2} + \frac{Ic_{12}}{R^2} \frac{\partial^2 w_b}{\partial z^2} + \frac{2Ic_{16}}{R^3} \frac{\partial^2 w_b}{\partial \alpha \partial z} \right], \quad (5)$$

$$K_{44}(w_s) = \frac{1}{\rho I} \left[\frac{2hk^2 c_{45}}{R} \frac{\partial^2 w_s}{\partial \alpha \partial z} + \frac{hk^2 c_{55}}{R^2} \frac{\partial^2 w_s}{\partial \alpha^2} + hk^2 c_{44} \frac{\partial^2 w_s}{\partial z^2} - \frac{c_{11}}{R^2} \left(h + \frac{I}{R^2} \right) w_s \right].$$

Уравнения движения дополняют начальные условия и условия ограниченности решения на бесконечности:

$$w_b|_{t=0} = w_s|_{t=0} = u_\alpha|_{t=0} = u_z|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial w_b}{\partial t}|_{t=0} = \frac{\partial w_s}{\partial t}|_{t=0} = \frac{\partial u_\alpha}{\partial t}|_{t=0} = \frac{\partial u_z}{\partial t}|_{t=0} = 0, \quad (6)$$

$$\lim_{|\alpha| \rightarrow \infty} w_b = 0, \quad \lim_{|z| \rightarrow \infty} w_s = 0, \quad \lim_{|\alpha| \rightarrow \infty} u_\alpha = 0, \quad \lim_{|z| \rightarrow \infty} u_z = 0.$$

В соотношениях (1)–(6): $w_b = w_b(\alpha, z, t)$, $w_s = w_s(\alpha, z, t)$ – компоненты нормального перемещения, вызванного изгибом пластины и сдвигом пластины соответственно; $u_\alpha = u_\alpha(\alpha, z, t)$, $u_z = u_z(\alpha, z, t)$ – тангенциальные перемещения; t – время; $p = p(\alpha, z, t)$ – давление; $k^2 = 5/6$ – коэффициент сдвига; h – толщина оболочки; R – радиус оболочки; $I = h^3/12$ – момент инерции поперечного сечения, отнесенный к толщине оболочки; c_{ij} – компоненты тензора упругих постоянных; ρ – плотность материала.

В основу соотношений (1)–(5) положены следующие аксиомы и гипотезы.

Аксиома 1. Нормальное к срединной поверхности в начальном состоянии прямолинейное материальное волокно остается прямолинейным в актуальном состоянии [22].

Аксиома 2. Нормальное к срединной поверхности волокно не растяжимо [22].

Аксиома 3. Напряжения $\bar{\sigma}^{i3}$ пропорциональны перерезывающему усилию [22].

Гипотеза 1. Связь угла поворота поперечных сечений Ψ за счет сдвига с изгибной составляющей нормальных перемещений [20] такова:

$$\Psi_i = -\frac{\partial w_b}{\partial \xi^i}, \quad i = 1, 2,$$

где ξ^i – главные координаты срединной поверхности оболочки.

Гипотеза 2. Полное нормальное перемещение оболочки w определяется как сумма нормального перемещения w_b , вызванного изгибом пластины, и нормального перемещения w_s , вызванного сдвигом пластины [20]:

$$w = w_b + w_s.$$

Основной целью настоящего исследования является построение новых фундаментальных решений, описывающих нестационарную динамику тонкой упругой неограниченной анизотропной цилиндрической оболочки постоянной толщины. Искомые фундаментальные решения универсальны и могут использоваться для исследования напряженно-деформированного состояния оболочечных конструкций при различных видах нестационарного нагружения и различных частных случаях анизотропии материала оболочки.

2. Фундаментальные решения

Искомые функции в (1)–(6) могут быть найдены с применением метода фундаментальных решений (функций Грина, функций влияния):

$$\begin{aligned} w_b(\alpha, z, t) &= \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} G_b(\alpha - \xi, z - \zeta, t - \tau) p(\xi, \zeta, \tau) d\xi d\zeta d\tau, \\ w_s(\alpha, z, t) &= \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} G_s(\alpha - \xi, z - \zeta, t - \tau) p(\xi, \zeta, \tau) d\xi d\zeta d\tau, \\ u_\alpha(\alpha, z, t) &= \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} U_\alpha(\alpha - \xi, z - \zeta, t - \tau) p(\xi, \zeta, \tau) d\xi d\zeta d\tau, \\ u_z(\alpha, z, t) &= \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} U_z(\alpha - \xi, z - \zeta, t - \tau) p(\xi, \zeta, \tau) d\xi d\zeta d\tau. \end{aligned}$$

Здесь G_b , G_s – фундаментальные решения компонент нормального перемещения, U_α , U_z – фундаментальные решения тангенциальных перемещений.

Постановка задачи о фундаментальных решениях, согласно (1), (6), имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U_\alpha}{\partial t^2} &= L_{11}(U_\alpha) + L_{12}(U_z) + L_{13}(G_b) + L_{14}(G_s), \\ \frac{\partial^2 U_z}{\partial t^2} &= L_{21}(U_\alpha) + L_{22}(U_z) + L_{23}(G_b) + L_{24}(G_s), \\ \frac{1}{R^2} \frac{\partial^4 G_b}{\partial t^2 \partial \alpha^2} + \frac{\partial^4 G_b}{\partial t^2 \partial z^2} &= L_{31}(U_\alpha) + L_{32}(U_z) + L_{33}(G_b) + L_{34}(G_s), \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} (G_b + G_s) &= L_{41}(U_\alpha) + L_{42}(U_z) + L_{43}(G_b) + L_{44}(G_s) + \frac{\delta(\alpha, z)\delta(t)}{\rho h}, \\ G_b|_{t=0} = G_s|_{t=0} = U_\alpha|_{t=0} = U_z|_{t=0} &= 0, \quad \frac{\partial G_b}{\partial t} \Big|_{t=0} = \frac{\partial G_s}{\partial t} \Big|_{t=0} = \frac{\partial U_\alpha}{\partial t} \Big|_{t=0} = \frac{\partial U_z}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \\ \lim_{|z| \rightarrow \infty} G_b &= 0, \quad \lim_{|z| \rightarrow \infty} G_s = 0, \quad \lim_{|z| \rightarrow \infty} U_\alpha = 0, \quad \lim_{|z| \rightarrow \infty} U_z = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь $\delta(*)$ – обобщенная функция Дирака, а операторы дифференцирования L_{ij} запи-

саны, как в (2)–(4), где вместо функций w_b , w_s , u_α и u_z следует записать G_b , G_s , U_α , U_z соответственно.

Для решения системы дифференциальных уравнений в частных производных в задаче (7), (8) используются разложения искомых функций в экспоненциальные ряды, а также прямые интегральные преобразования Фурье и Лапласа [23] (индексы L и F обозначают изображения функций по Лапласу (с параметром s) и Фурье (с параметром q) соответственно

$$\begin{aligned} U_\alpha(\alpha, z, t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} U_{\alpha n}(z, t) \exp(in\alpha), & U_z(\alpha, z, t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} U_{zn}(z, t) \exp(in\alpha), \\ G_b(\alpha, z, t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_{bn}(z, t) \exp(in\alpha), & G_s(\alpha, z, t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_{sn}(z, t) \exp(in\alpha), \\ \delta(\alpha, z)\delta(t) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(z)\delta(t) \exp(in\alpha), \\ f^{FL}(q, s) &= \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(z, t) \exp(-iqz - st) dz dt. \end{aligned} \quad (9)$$

Система дифференциальных уравнений в частных производных (7) сводится к системе линейных алгебраических уравнений для изображений искомых функций:

$$\mathbf{AG} = \mathbf{B}, \quad \mathbf{G} = (U_{\alpha n}^{LF}, U_{zn}^{LF}, G_{bn}^{LF}, G_{sn}^{LF})^T, \quad B = \left(0, 0, 0, \frac{1}{2\pi \rho h}\right)^T, \quad (10)$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} s^2 + a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & s^2 + a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & s^2 + a_{33} & a_{34} \\ -a_{14} & -a_{24} & s^2 + a_{43} & s^2 + a_{44} \end{pmatrix},$$

$$a_{11} = \frac{1}{\rho h} \left[hq^2 c_{66} + nq \frac{2hc_{16}}{R} + n^2 \frac{hc_{11}}{R^2} + \frac{hk^2 c_{55}}{R^2} + n^2 \frac{Ic_{11}}{R^4} \right],$$

$$a_{12} = \frac{1}{\rho h} \left[hq^2 c_{26} + nq \frac{hc_{12}}{R} + nq \frac{hc_{66}}{R} + n^2 \frac{hc_{16}}{R^2} + n^2 \frac{Ic_{16}}{R^4} \right],$$

$$a_{13} = -\frac{i}{\rho h} \left[-nq^2 \frac{Ic_{12}}{R^2} - n^2 q \frac{2Ic_{16}}{R^3} + q \frac{hc_{16}}{R} - n^3 \frac{Ic_{11}}{R^4} + n \frac{hc_{11}}{R^2} + n \frac{Ic_{11}}{R^4} \right],$$

$$a_{14} = -\frac{i}{\rho h} \left[q \frac{hk^2 c_{45}}{R^2} + q \frac{hc_{16}}{R} + n \frac{hk^2 c_{55}}{R^2} + n \frac{hc_{11}}{R^2} + n \frac{Ic_{11}}{R^4} \right],$$

$$a_{22} = \frac{1}{\rho h} \left[q^2 hc_{22} + nq \frac{2hc_{26}}{R} + n^2 \frac{hc_{66}}{R^2} + n^2 \frac{Ic_{66}}{R^4} \right],$$

$$a_{23} = -\frac{i}{\rho h} \left[-nq^2 \frac{Ic_{26}}{R^2} - n^2 q \frac{2Ic_{66}}{R^3} + q \frac{hc_{12}}{R} - n^3 \frac{Ic_{16}}{R^4} + n \frac{c_{16}}{R^2} \right],$$

$$a_{24} = -\frac{i}{\rho h} \left[q \frac{hc_{12}}{R} + n \frac{hc_{16}}{R^2} + n \frac{Ic_{16}}{R^4} \right],$$

$$\begin{aligned}
a_{31} &= \frac{iZ}{\rho I} \left[nq^2 \frac{Ic_{12}}{R^2} + q \frac{hk^2 c_{45}}{R} + n^2 q \frac{2Ic_{16}}{R^3} + n \frac{hk^2 c_{55}}{R^2} + n^3 \frac{Ic_{11}}{R^4} \right], \\
a_{32} &= \frac{iZ}{\rho I} \left[nq^2 \frac{Ic_{26}}{R^2} + n^2 q \frac{2Ic_{66}}{R^3} + n^3 \frac{Ic_{16}}{R^4} \right], \\
a_{33} &= -\frac{Z}{\rho I} \left[q^4 Ic_{22} + nq^3 \frac{4Ic_{26}}{R} + \frac{2n^2 q^2 I}{R^2} (c_{12} + 2c_{66}) + \right. \\
&\quad \left. + nq \frac{2Ic_{16}}{R^3} (2n^2 - 1) - q^2 \frac{Ic_{12}}{R^2} + (n^4 - n^2) \frac{Ic_{11}}{R^4} \right], \\
a_{34} &= \frac{Z}{\rho I} \left[q^2 hk^2 c_{44} + nq \frac{2hk^2 c_{45}}{R} + n^2 \frac{hk^2 c_{55}}{R^2} + q^2 \frac{Ic_{12}}{R^2} + nq \frac{2Ic_{16}}{R^3} + n^2 \frac{Ic_{11}}{R^4} \right], \\
a_{43} &= \frac{1}{\rho h} \left[-q^2 \frac{Ic_{12}}{R^2} - nq \frac{2Ic_{16}}{R^3} - n^2 \frac{Ic_{11}}{R^4} + \frac{hc_{11}}{R^2} + \frac{Ic_{11}}{R^4} \right], \\
a_{44} &= \frac{1}{\rho h} \left[q^2 hk^2 c_{44} + nq \frac{2hk^2 c_{45}}{R} + n^2 \frac{hk^2 c_{55}}{R^2} + \frac{hc_{11}}{R^2} + \frac{Ic_{11}}{R^4} \right].
\end{aligned}$$

Здесь $Z = -1/(n^2/R^2 + q^2)$.

Решение системы (10) приводит к результату:

$$\begin{aligned}
U_{an}^{LF}(q, s) &= \frac{D_1(q, s, n)}{M(q, s, n)}, & U_{zn}^{LF}(q, s) &= \frac{D_2(q, s, n)}{M(q, s, n)}, \\
G_{bn}^{LF}(q, s) &= \frac{D_3(q, s, n)}{M(q, s, n)}, & G_{sn}^{LF}(q, s) &= \frac{D_4(q, s, n)}{M(q, s, n)}.
\end{aligned} \tag{11}$$

В (11) $M(q, s, n)$ – детерминант матрицы \mathbf{A} ; $D_i(q, s, n)$ – детерминанты, полученные по правилу Крамера из матрицы \mathbf{A} путем замены i -го столбца на столбец \mathbf{B} .

Оригиналы функций (11) по Лапласу построены аналитически с помощью вычетов [23, 24]:

$$\begin{aligned}
f(t) &= \sum_k \operatorname{res}_{s_k} f^L(s) \exp(s_k t) = \sum_k \frac{1}{(l_k - 1)!} \lim_{s \rightarrow s_k} \frac{d^{l_k - 1}}{ds^{l_k - 1}} (s - s_k)^{l_k} f^L(s) \exp(s_k t), \\
f^L(s) &= \frac{D_i(s)}{M(s)},
\end{aligned}$$

с предварительной оценкой кратности l_k корней s знаменателей $M(q, s, n)$:

$$\begin{aligned}
U_{an}^F(q, t) &= -2S \sum_{y=1}^4 A_{2y-1 \ 1}(q) \operatorname{sh}(s_{2y-1}(q)t), \\
U_{zn}^F(q, t) &= -2S \sum_{y=1}^4 A_{2y-1 \ 2}(q) \operatorname{sh}(s_{2y-1}(q)t), \\
G_{bn}^F(q, t) &= -2S \sum_{y=1}^4 A_{2y-1 \ 3}(q) \operatorname{sh}(s_{2y-1}(q)t),
\end{aligned} \tag{12}$$

$$G_{sn}^F(q, t) = -2S \sum_{y=1}^4 A_{2y-1, 4}(q) \operatorname{sh}(s_{2y-1}(q)t).$$

В формулах (12)

$$S = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\rho h}, \quad A_{\Psi 1} = \frac{D_1(q, s_\Psi, n)}{P_\Psi}, \quad A_{\Psi 2} = \frac{D_2(q, s_\Psi, n)}{P_\Psi},$$

$$A_{\Psi 3} = \frac{D_3(q, s_\Psi, n)}{P_\Psi}, \quad A_{\Psi 4} = \frac{D_4(q, s_\Psi, n)}{P_\Psi}, \quad \Psi = 1, 3, 5, 7;$$

$$P_1 = 2s_1(s_1^2 - s_3^2)(s_1^2 - s_5^2)(s_1^2 - s_7^2), \quad P_3 = 2s_3(s_3^2 - s_1^2)(s_3^2 - s_5^2)(s_3^2 - s_7^2),$$

$$P_5 = 2s_5(s_5^2 - s_1^2)(s_5^2 - s_3^2)(s_5^2 - s_7^2), \quad P_7 = 2s_7(s_7^2 - s_1^2)(s_7^2 - s_3^2)(s_7^2 - s_5^2).$$

Оригиналы функций(12) по Фурье построены с использованием интеграла обращения [23, 24]

$$f(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f^F(q, t) \exp(iqz) dq$$

и метода интегрирования быстро осциллирующих функций [25, 26]:

$$\begin{aligned} U_{\alpha n}(z, t) &= \frac{\Delta_1}{4\pi} \sum_{k=0}^{M_1-1} B(z) [\Phi_{11}(z) U_{\alpha n}^F(q_k, t) + \Phi_{21}(z) U_{\alpha n}^F(q_{k+1}, t)], \\ U_{zn}(z, t) &= \frac{\Delta_1}{4\pi} \sum_{k=0}^{M_2-1} B(z) [\Phi_{12}(z) U_{zn}^F(q_k, t) + \Phi_{22}(z) U_{zn}^F(q_{k+1}, t)], \\ G_{bn}(z, t) &= \frac{\Delta_1}{4\pi} \sum_{k=0}^{M_3-1} B(z) [\Phi_{13}(z) G_{bn}^F(q_k, t) + \Phi_{23}(z) G_{bn}^F(q_{k+1}, t)], \\ G_{sn}(z, t) &= \frac{\Delta_1}{4\pi} \sum_{k=0}^{M_4-1} B(z) [\Phi_{14}(z) G_{sn}^F(q_k, t) + \Phi_{24}(z) G_{sn}^F(q_{k+1}, t)]. \end{aligned} \quad (13)$$

В соотношениях (13)

$$B(z) = \exp\left(\frac{iz}{2}(q_{k+1} + q_k)\right), \quad \Phi_{il}(z) = \begin{cases} \frac{\sin m_l}{m_l} + \frac{m_l \cos m_l - \sin m_l}{m_l^2} i & \text{при } |m_l| > p, \\ \exp(-m_l i) & \text{при } |m_l| \leq p, \end{cases}$$

$$B(z) = \exp\left(\frac{iz}{2}(q_{k+1} + q_k)\right), \quad \Phi_{il}(z) = \begin{cases} \frac{\sin m_l}{m_l} + \frac{m_l \cos m_l - \sin m_l}{m_l^2} i & \text{при } |m_l| > p, \\ \exp(-m_l i) & \text{при } |m_l| \leq p, \end{cases}$$

$$m_l = \frac{\Delta_l}{2} z, \quad \Delta_l = \frac{2Q_l}{M_l}, \quad q_k = -Q_l + k\Delta_l, \quad q_{k+1} = -Q_l + (k+1)\Delta_l, \quad l = \overline{1, 4},$$

Q – границы интегрирования, M – число шагов разбиения интервала интегрирования.

Согласно [25], параметр p подбирается экспериментально. На основе численных расчетов [1, 3, 26] вариант $|m_l| \leq p$ используется при решении в непосредственной близости к началу координат, а на значительном удалении используется вариант $|m_l| > p$.

Подстановка (13) в (9) и замена бесконечных рядов конечными суммами приводит к искомому фундаментальным решениям для модели тонкой неограниченной

упругой анизотропной цилиндрической оболочки постоянной толщины, основанной на гипотезах Чоу для пластин:

$$\begin{aligned}
 U_\alpha(\alpha, z, t) &= \frac{\Delta_1}{4\pi} \sum_{n=-C_1}^{C_1} \sum_{k=0}^{M_1-1} \exp(in\alpha) B(z) [\Phi_{11}(z) U_{\alpha n}^F(q_k, t) + \Phi_{21}(z) U_{\alpha n}^F(q_{k+1}, t)], \\
 U_z(\alpha, z, t) &= \frac{\Delta_1}{4\pi} \sum_{n=-C_2}^{C_2} \sum_{k=0}^{M_2-1} \exp(in\alpha) B(z) [\Phi_{12}(z) U_{zn}^F(q_k, t) + \Phi_{22}(z) U_{zn}^F(q_{k+1}, t)], \\
 G_b(\alpha, z, t) &= \frac{\Delta_1}{4\pi} \sum_{n=-C_3}^{C_3} \sum_{k=0}^{M_3-1} \exp(in\alpha) B(z) [\Phi_{13}(z) G_{bn}^F(q_k, t) + \Phi_{23}(z) G_{bn}^F(q_{k+1}, t)], \\
 G_s(\alpha, z, t) &= \frac{\Delta_1}{4\pi} \sum_{n=-C_4}^{C_4} \sum_{k=0}^{M_4-1} \exp(in\alpha) B(z) [\Phi_{14}(z) G_{sn}^F(q_k, t) + \Phi_{24}(z) G_{sn}^F(q_{k+1}, t)].
 \end{aligned} \tag{14}$$

Контроль сходимости параметров численного интегрирования и рядов обеспечивается из условия выполнения критерия относительной погрешности с заданной точностью аналогично [1, 3, 26].

Эти фундаментальные решения позволяют исследовать процессы нестационарной динамики в тонких упругих анизотропных цилиндрических оболочках постоянной толщины, математические модели которых основаны на гипотезах Чоу для пластин.

3. Оценка достоверности результатов

С целью выяснения достоверности полученных новых фундаментальных решений проведено численное сравнение с фундаментальными решениями для тонкой неограниченной упругой анизотропной цилиндрической оболочки Тимошенко [3]. Исходные данные по геометрии и материалу оболочек приведены в таблице 1 и таблице 2.

Таблица 1

Геометрические параметры цилиндрической оболочки

Толщина стенки h , м	Радиус R , м
0,005	0,6

Таблица 2

Компоненты тензора упругих постоянных и плотность материала углепластика [26]

ρ , кг/м ³	c_{11} , ГПа	c_{12} , ГПа	c_{16} , ГПа	c_{22} , ГПа	c_{26} , ГПа	c_{36} , ГПа	c_{44} , ГПа	c_{45} , ГПа	c_{55} , ГПа	c_{66} , ГПа
1750	95,5	28,9	44,7	25,9	15,6	0,54	4,4	-1,78	6,45	32,7

На рис. 2–4 показано распределение функций $G = G_b + G_s$, U_α , U_z по координате z при угловой координате $\alpha = 0$ (сплошные линии) и $\alpha = \pi/8$ (штриховые линии) в момент времени 1 мс. Синим цветом изображены результаты согласно новым фундаментальным решениям для модели тонкой неограниченной упругой анизотропной цилиндрической оболочки, основанной на гипотезе Чоу (14), черным цветом – фундаментальные решения для тонкой неограниченной упругой анизотропной цилиндрической оболочки Тимошенко [3]. Контроль сходимости параметров интегрирования и формирование приведенных графиков осуществлены средствами языка программирования Python.

Из представленных на рис. 2–4 результатов видно, что полученные новые функции демонстрируют хорошую согласованность с фундаментальными решениями для

тонкой неограниченной упругой анизотропной цилиндрической оболочки Тимошенко, что подтверждает корректность примененных методов при построении решения.

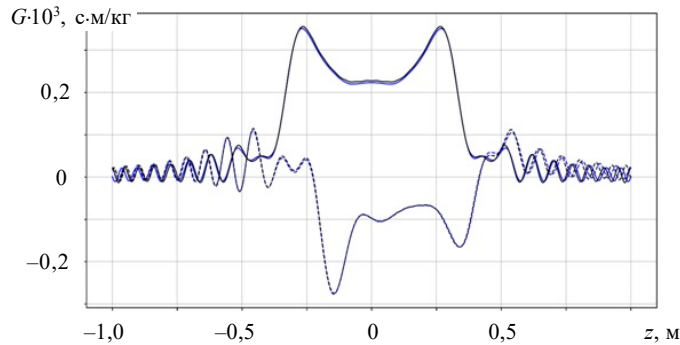


Рис. 2. Фундаментальные решения для нормальных перемещений

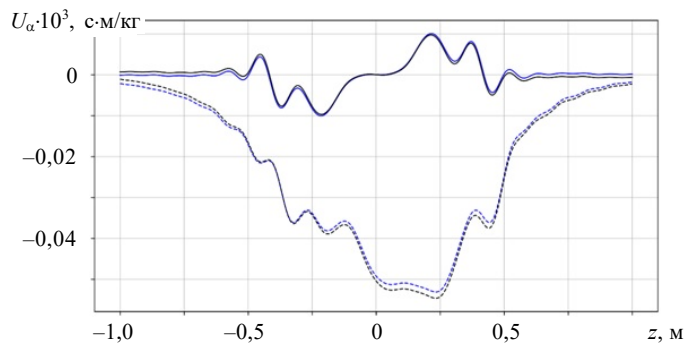


Рис. 3. Фундаментальные решения для тангенциальных перемещений по координате α

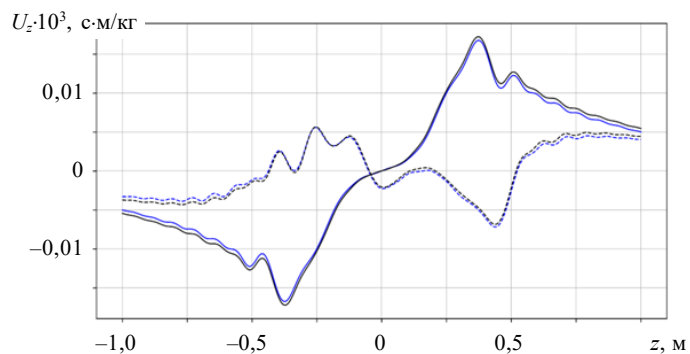


Рис. 4. Фундаментальные решения для тангенциальных перемещений по координате z

На рис. 5 представлено распределение функций G_b и G_s по координате z при угловой координате $\alpha = 0$ в момент времени 1 мс (сплошная линия – функция G_b , штриховая линия – функция G_s). Из рис. 5 видно, что вклад функции G_b (нормальное перемещение, вызванное изгибом оболочки) вносит существенно больший вклад в суммарное фундаментальное решение G , чем функция G_s (нормальное перемещение, вызванное сдвигом оболочки). Однако возможность эффективно оценивать вклад сдвиговых деформаций является преимуществом и особенностью рассмотренной теории оболочек по сравнению с теориями оболочек Тимошенко и Кирхгофа – Лява.

Не менее важным с точки зрения практической реализации является существенный выигрыш в вычислительной эффективности. Проведенный сравнительный анализ показал, что скорость машинного счета при построении графиков функций нормальных перемещений от изгиба G_b на 56%, а функций тангенциальных перемещений U_α , U_z на 36% больше по сравнению со скоростью построения графиков аналогичных функций влияния для тонкой упругой анизотропной цилиндрической оболочки Тимошенко, что является заметным преимуществом при решении инженерных задач, требующих многократных расчетов.

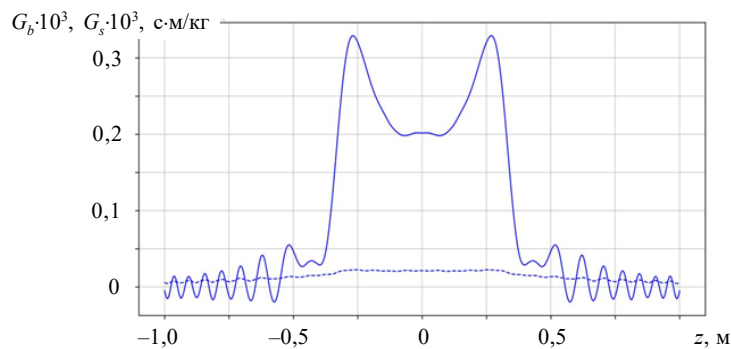


Рис. 5. Распределение функций G_b и G_s по координате z

Заключение

Получены и представлены новые фундаментальные решения (функции Грина, функции влияния) для тонкой неограниченной упругой анизотропной цилиндрической оболочки постоянной толщины, для которой применены гипотезы Чоу для пластин.

Фундаментальные решения были получены с использованием разложения искомого функции влияния в экспоненциальные ряды Фурье, прямых и обратных интегральных преобразований Лапласа и Фурье.

С целью проверки достоверности новых функций влияния было проведено сравнение с фундаментальными решениями для упругой анизотропной цилиндрической оболочки Тимошенко.

Преимуществами найденных новых фундаментальных решений для тонкой упругой анизотропной цилиндрической оболочки являются:

- 1) повышенная скорость вычислений полученных фундаментальных решений по сравнению со скоростью вычислений для аналогичных функций влияния для оболочки Тимошенко;
- 2) возможность оценивать вклад изгибных и сдвиговых составляющих в нормальные перемещения оболочки;
- 3) возможность исследовать напряженно-деформированное состояние тонких цилиндрических оболочек, материал которых может быть анизотропным, ортотропным, трансверсально-изотропным и изотропным, при действии совокупности нестационарных нагрузок.

Список литературы

1. Локтева Н.А., Сердюк Д.О., Скопинцев П.Д. Нестационарная динамика анизотропной оболочки Кирхгофа – Лява. *Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния*. 2020. №4 (46). Р. 101–106. DOI: 10.37972/chqpu.2020.46.4.006.

2. Сеницкий Ю.Э., Козьма И.Е. Нестационарная осесимметричная динамическая задача для трехслойной ортотропной цилиндрической оболочки. *Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки*. 2006. Вып. 43. С. 52–67. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu453>.
3. Сердюк Д.О. Фундаментальные решения нестационарной динамики анизотропной цилиндрической оболочки Тимошенко. *Труды МАИ*. 2024. № 139. С. 1–32.
4. Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В. Воздействие нестационарного давления на цилиндрическую оболочку с упругим наполнителем. *Ученые записки Казанского университета. Серия физико-математические науки*. 2016. Т. 158. Кн. 1. С. 141–151.
5. Amabili M., Balasubramanian P., Ferrari G. Experiments and simulations in travelling wave and non-stationary nonlinear vibrations of circular cylindrical shells. *ASME 2016 International Mechanical Engineering Congress and Exposition*. 2016. P. 1–10. DOI: 10.1115/IMECE2016-66315.
6. Brunneti M., Mitura A., Romeo F., Warminski J. Nonlinear dynamics of bistable composite cantilever shells: An experimental and modelling study. *Journal of Sound and Vibration*. 2022. Vol. 526. Article 116779. DOI: 10.1016/j.jsv.2022.116779.
7. Cong P.H., Duc N.D. Nonlinear dynamic analysis of porous eccentrically stiffened double curved shallow auxetic shells in thermal environments. *Thin-Walled Structures*. 2021. Vol. 163. Article No 107748. DOI: 10.1016/j.tws.2021.107748.
8. Cong P.H., Khanh N.D., Khoa N.D., Duc N.D. New approach to investigate nonlinear dynamic response of sandwich auxetic double curves shallow shells using TSDT. *Composite Structures*. 2018. Vol. 185. P. 455–465. DOI: 10.1016/j.compstruct.2017.11.047.
9. Dat N.D., Khoa N.D., Nguyen P.D., Duc N.D. An analytical solution for nonlinear dynamic response and vibration of FG-CNT reinforced nanocomposite elliptical cylindrical shells resting on elastic foundations. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2020. Vol. 100. No 1. Article No e201800238. DOI: 10.1002/zamm.201800238.
10. Duc N.D., Kim S-E., Manh D.T., Nguyen P.D. Effect of eccentrically oblique stiffeners and temperature on the nonlinear static and dynamic response of S-FGM cylindrical panels. *Thin-Walled Structures*. 2020. Vol. 146. Iss. 1. Article No 106438. DOI: 10.1016/j.tws.2019.106438.
11. Hoang V.N.V., Tien N.D., Ninh D.G., Thang V.T., Truong D.V. Nonlinear dynamics of functionally graded graphene nanoplatelet reinforced polymer doubly curved shallow shells resting on elastic foundation using a micromechanical model. *Journal of Sandwich Structures and Materials*. 2021. Vol. 23. Iss. 7. P. 3250–3279. DOI: 10.1177/1099636220926650.
12. Huang H., Han Q. Nonlinear dynamic buckling of functionally graded cylindrical shells subjected to time-dependent axial load. *Composite Structures*. 2010. Vol. 92. Iss. 2. P. 593–598. DOI: 10.1016/j.compstruct.2009.09.011.
13. Jing L., Yang F., Wang Z., Zhao L. A numerical simulation of metallic cylindrical sandwich shells subjected to air blast loading. *Latin American Journal of Solid and Structures*. 2013. Vol. 10. No 3. P. 631–645. DOI: 10.1590/S1679-78252013000300010.
14. Liu Y., Qin Z., Chu F. Nonlinear forced vibrations of rotating cylindrical shells under multi-harmonic excitations in thermal environment. *Nonlinear Dynamics*. 2022. Vol. 108. No 4. P. 2977–2991. DOI: 10.1007/s11071-022-07449-9.
15. Quan T.Q., Duc N.D. Nonlinear vibration and dynamic response of shear deformable imperfect functionally graded double-curved shallow shells resting on elastic foundations in thermal environments. *Journal of Thermal Stresses*. 2016. Vol. 39. No 4. P. 437–459. DOI: 10.1080/01495739.2016.1158601.
16. Wang T., Wang C., Yin Y., Zhang Y., Li L., Tan D. Analytical approach for nonlinear vibration response of the thin cylindrical shell with a straight crack. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*. 2021. P. 1–34.
17. Yao M., Niu Y., Hao Y. Nonlinear dynamic responses of rotating pretwisted cylindrical shells. *Nonlinear Dynamics*. 2019. Vol. 95. P. 151–174. DOI: 10.1007/s1107-018-4557-7.
18. Zhang L.W., Song Z.G., Qiao P., Liew K.M. Modeling of dynamic responses of CNT-reinforced composite cylindrical shells under impact loads. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2017. Vol. 313. P. 889–903. DOI: 10.1016/j.cma.2016.10.020.

19. Zhang W., Hao Y.X., Yang J. Nonlinear dynamics of FGM circular cylindrical shell with clamped-clamped edges. *Composite Structures*. 2012. Vol. 94. Iss. 3. P.1075–1086. DOI: 10.1016/j.compstruct.2011.11.004.
20. Chow T.S. On the propagation of flexural waves in an orthotropic laminated plate and its response to an impulsive load. *Journal of Composite Materials*. 1971. Vol. 5. Iss. 3. P. 306–319. DOI: 10.1177/002199837100500302.
21. Никифоров А.В., Сердюк Д.О., Федотенков Г.В. Уравнения динамики анизотропных цилиндрических оболочек по гипотезам Чоу. *Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред: Матер. XXXI Международного симпозиума имени А.Г. Горшкова*. 2025. Т. 2. С. 73–76.
22. Михайлова Е.Ю., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В. *Общая теория упругих оболочек*. М.: Изд-во МАИ, 2018. 112 с.
23. Горшков А.Г., Медведский А.Д., Рабинский Л.Н., Тарлаковский Д.В. *Волны в сплошных средах*. М.: Физматлит, 2005. 472 с.
24. Бэйтмен Г., Эрдейи А. *Таблица интегральных преобразований. Т. 1. Преобразования Фурье, Лапласа, Меллина*. М.: Наука, 1969. 334 с.
25. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. *Численные методы*. М.: БИНОМ, 2011. 636 с.
26. Сердюк А.О., Сердюк Д.О., Федотенков Г.В. Фундаментальное решение для анизотропной пластины на инерционном основании. *Проблемы прочности и пластичности*. 2022. Т. 84. №4. С. 523–535. DOI: 10.32326/1814-9146-2022-84-4-523-535.

References

1. Lokteva N.A., Serdyuk D.O., Skopintsev P.D. Nestatsionarnaya dinamika anizotropnoy obolochki Kirkhgofa – Lyava [Non-stationary dynamics of anisotropic Kirchhoff – Love type shell]. *Vestnik ChGPU im. I.Ya. Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya [Vestnik of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State]*. 2020. No 4 (46). P. 101–106 (In Russian).
2. Senitsky Yu.E., Kozma I.E. Nestatsionarnaya osesimmetrichnaya dinamicheskaya zadacha dlya trekhslonnoy ortotropnoy tsilindricheskoy obolochki [Non-stationary axisymmetric dynamic problem for a three-layer orthotropic cylindrical shell]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya: Fiziko-matematicheskie nauki [Journal of Samara State Technical University. Ser. Physical and Mathematical Sciences]*. 2006. Iss. 43. P. 52–67 (In Russian).
3. Serdyuk D.O. Fundamentalnye resheniya nestatsionarnoy dinamiki anizotropnoy obolochki Timoshenko [Fundamental solutions to the transient dynamics of an anisotropic cylindrical Timoshenko shell]. *Trudy Moskovskogo aviatsionnogo instituta [Trudy MAI]*. 2024. No 139. P. 1–32 (In Russian).
4. Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V. Vozdeystvie nestatsionarnogo davleniya na tsilindricheskuyu obolochku s uprugim zapolnitelem [Impact of non-stationary pressure on a cylindrical shell with elastic core]. *Uchenye zapiski Kazanskogo universiteta. Seriya fiziko-matematicheskie nauki [Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series]*. 2016. Vol. 158. Book 1. P. 141–151 (In Russian).
5. Amabili M., Balasubramanian P., Ferrari G. Experiments and simulations in travelling wave and non-stationary nonlinear vibrations of circular cylindrical shells. *ASME 2016 International Mechanical Engineering Congress and Exposition*. 2016. P. 1–10. DOI: 10.1115/IMECE2016-66315.
6. Brunetti M., Mitura A., Romeo F., Warminski J. Nonlinear dynamics of bistable composite cantilever shells: An experimental and modelling study. *Journal of Sound and Vibration*. 2022. Vol. 526. Article 116779. DOI: 10.1016/j.jsv.2022.116779.
7. Cong P.H., Duc N.D. Nonlinear dynamic analysis of porous eccentrically stiffened double curved shallow auxetic shells in thermal environments. *Thin-Walled Structures*. 2021. Vol. 163. Article No 107748. DOI: 10.1016/j.tws.2021.107748.
8. Cong P.H., Khanh N.D., Khoa N.D., Duc N.D. New approach to investigate nonlinear

dynamic response of sandwich auxetic double curves shallow shells using TSDT. *Compos. Struct.* 2018. Vol. 185. P. 455–465. DOI: 10.1016/j.compstruct.2017.11.047.

9. Dat N.D., Khoa N.D., Nguyen P.D., Duc N.D. An analytical solution for nonlinear dynamic response and vibration of FG-CNT reinforced nanocomposite elliptical cylindrical shells resting on elastic foundations. *J. Appl. Math. Mech.* 2020. Vol. 100. No 1. Article No e201800238. DOI: 10.1002/zamm.201800238.

10. Duc N.D., Kim S-E., Manh D.T., Nguyen P.D. Effect of eccentrically oblique stiffeners and temperature on the nonlinear static and dynamic response of S-FGM cylindrical panels. *Thin-Walled Structures*. 2020. Vol. 146. Iss. 1. Article No 106438. DOI: 10.1016/j.tws.2019.106438.

11. Hoang V.N.V., Tien N.D., Ninh D.G., Thang V.T., Truong D.V. Nonlinear dynamics of functionally graded graphene nanoplatelet reinforced polymer doubly curved shallow shells resting on elastic foundation using a micromechanical model. *J. Sandw. Struct. Mater.* 2021. Vol. 23. Iss. 7. P. 3250–3279. DOI: 10.1177/1099636220926650.

12. Huang H., Han Q. Nonlinear dynamic buckling of functionally graded cylindrical shells subjected to time-dependent axial load. *Compos. Struct.* 2010. Vol. 92. Iss. 2. P. 593–598. DOI: 10.1016/j.compstruct.2009.09.011.

13. Jing L., Yang F., Wang Z., Zhao L. A numerical simulation of metallic cylindrical sandwich shells subjected to air blast loading. *Latin American Journal of Solid and Structures*. 2013. Vol. 10. No 3. P. 631–645. DOI: 10.1590/S1679-78252013000300010.

14. Liu Y., Qin Z., Chu F. Nonlinear forced vibrations of rotating cylindrical shells under multi-harmonic excitations in thermal environment. *Nonlinear Dynamics*. 2022. Vol. 108. No 4. P. 2977–2991. DOI: 10.1007/s11071-022-07449-9.

15. Quan T.Q., Duc N.D. Nonlinear vibration and dynamic response of shear deformable imperfect functionally graded double-curved shallow shells resting on elastic foundations in thermal environments. *Journal of Thermal Stresses*. 2016. Vol. 39. No 4. P. 437–459. DOI: 10.1080/01495739.2016.1158601.

16. Wang T., Wang C., Yin Y., Zhang Y., Li L., Tan D. Analytical approach for nonlinear vibration response of the thin cylindrical shell with a straight crack. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*. 2021. P. 1–34. DOI: 10.21203/rs.3.rs-2076936/v1.

17. Yao M., Niu Y., Hao Y. Nonlinear dynamic responses of rotating pretwisted cylindrical shells. *Nonlinear Dynamics*. 2019. Vol. 95. P. 151–174. DOI: 10.1007/s11071-018-4557-7.

18. Zhang L.W., Song Z.G., Qiao P., Liew K.M. Modeling of dynamic responses of CNT-reinforced composite cylindrical shells under impact loads. *Comput. Methods. Appl. Mech. Eng.* 2017. Vol. 313. P. 889–903. DOI: 10.1016/j.cma.2016.10.020.

19. Zhang W., Hao Y.X., Yang J. Nonlinear dynamics of FGM circular cylindrical shell with clamped-clamped edges. *Compos. Struct.* 2012. Vol. 94. Iss. 3. P. 1075–1086. DOI: 10.1016/j.compstruct.2011.11.004.

20. Chow T.S. On the propagation of flexural waves in an orthotropic laminated plate and its response to an impulsive load. *J. Compos. Mater.* 1971. Vol. 5. Iss. 3. P. 306–319. DOI: 10.1177/002199837100500302.

21. Nikiforov A.V., Serdyuk D.O., Fedotenkov G.V. Uravneniya dinamiki anizotropnykh tsilindricheskikh obolochek po gipotezam Chou [Dynamics equations of anisotropic cylindrical shells based on Chow's hypotheses]. *Dinamicheskie i tekhnologicheskie problemy mekhaniki konstruksiy i sploshnykh sred: Materialy XXXI Mezhdunarodnogo simpoziuma imeni A.G. Gorshkova* [In: XXXI International Symposium “Dynamic and Technological Problems of a Mechanics of Constructions and Continuous Mediums” dedicated to A.G. Gorshkov]. 2025. Vol. 2. P. 73–76 (In Russian).

22. Mikhaylova E.Yu., Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V. *Obshchaya teoriya uprugikh obolochek* [General Theory of Elastic Shells]. Moscow. MAI Publ. 2018. 112 p. (In Russian).

23. Gorshkov A.G., Medvedskiy A.D., Rabinskiy L.N., Tarlakovskii D.V. *Volny v sploshnykh sredakh* [Waves in Continuous Media]. Moscow. Fizmatlit Publ. 2005. 472 p. (In Russian).

24. Bateman H., Erdélyi A. *Tables of Integral Transforms*. New York. Toronto. London. McGraw-Hill Book Company, Inc. 1954. 344 p.

25. Bakhvalov N.S., Zhidkov N.P., Kobelkov G.M. *Chislennyye metody* [Numerical Methods]. Moscow. BINOM Publ. 2011. 636 p. (In Russian).

26. Serdyuk A.O., Serdyuk D.O., Fedotenkov G.V. Fundamentalnoe reshenie dlya anizotropnoy plastiny na inertsiionnom osnovanii [A fundamental solution for an anisotropic plate on an inertial foundation]. *Problemy prochnosti i plastichnosti* [*Problems of Strength and Plasticity*]. 2022. Vol. 84. No 4. P. 523–535 (In Russian).

TRANSIENT DYNAMICS OF ANISOTROPIC CYLINDRICAL SHELLS VIA CHOW'S HYPOTHESES*

Nikiforov A.V.¹, Serdyuk D.O.^{1,2}, Fedotenkov G.V.^{1,2}

¹*Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russian Federation*

²*Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

d.serduk55@gmail.com

Received by the Editor 2026/03/02

By generalizing T.S. Chow's hypotheses for thin plates to shells, new fundamental solutions for a thin elastic anisotropic infinite cylindrical shell of constant thickness are constructed. The shell material possesses symmetry with respect to the tangent plane to its middle surface at each point. The fundamental solutions are functions of two coordinates and time for the normal and tangential displacements in response to the action of a concentrated unit load normal to the shell's middle surface, mathematically described by the Dirac delta function.

The problem formulation includes the equations of motion for an infinite thin anisotropic cylindrical shell of constant thickness, initial conditions, and conditions for the solution to be bounded at infinity. The solution of the stated problem is carried out using Laplace and Fourier integral transforms and the expansion of the sought functions into exponential Fourier series. For the inverse Laplace transform, the residue theorem is applied; for the inverse Fourier transform, a numerical method for integrating rapidly oscillating functions is used. The convergence control of the numerical integration parameters and series was ensured by fulfilling a relative error criterion with a given accuracy. The practical implementation of the convergence control for the integration parameters was carried out using the Python programming language. Verification of the obtained new fundamental solutions was conducted by comparing the results with those for a thin infinite anisotropic cylindrical Timoshenko shell of constant thickness. During the numerical studies, an assessment of the contribution of bending and shear components to the normal displacement was made, and a comparison of the computational speed of the new fundamental solutions with those for the Timoshenko shell was performed.

Keywords: non-stationary dynamics, anisotropic material, fundamental solutions, Green's functions, Chow's hypotheses, cylindrical shell.

* The research was carried out within the framework of the Russian Science Foundation, grant No 25-29-01297, <https://rscf.ru/project/25-29-01297/>.