УДК 539.4 DOI: 10.32326/1814-9146-2026-88-2-34-44

ЦЕЛЫЕ РАЦИОНАЛЬНЫЕ ГЕМИТРОПНЫЕ КУБИЧЕСКИЕ ПОЛУИНВАРИАНТЫ СИСТЕМЫ ДВУХ АСИММЕТРИЧНЫХ ТЕНЗОРОВ ВТОРОГО РАНГА

Мурашкин Е.В., Радаев Ю.Н

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Российская Федерация

evmurashkin@gmail.com, radayev@ipmnet.ru

Поступила в редакцию 13.10.2025

Построены абсолютные инварианты и полуинварианты для системы, состоящей из одного тензора и одного псевдотензора второго ранга в трехмерном пространстве. Приводятся определения индивидуальных и совместных инвариантов и полуинвариантов. Обсуждаются понятия полного неприводимого набора инвариантов и полуинвариантов. Представлены несколько систем индивидуальных инвариантов и формулы Ньютона, связывающие их между собой. Обсуждаются понятия полных, неполных и неприводимых наборов инвариантов. Отмечается важность теоремы Гамильтона – Келли для минимизации наборов инвариантов с помощью целых рациональных сизигий. Обсуждается понятие псевдотензора. Вводится понятие псевдоскалярной единицы и скалярной функции, вычисляющей алгебраический вес псевдотензора. Предлагается алгоритм построения полного набора инвариантов заданного целого порядка и его последующая ренумерация. Получен полный неприводимый набор индивидуальных и совместных 9 квадратичных и 28 кубических целых рациональных алгебраических инвариантов и полуинвариантов для системы из одного тензора и одного псевдотензора второго ранга. Вычислены целые алгебраические веса полученных псевдоинвариантов. Отдельно выделены полуинварианты, чувствительные к зеркальным отражениям и инверсиям трехмерного объемлющего евклидова прстранства, таких полуинваринатов оказывается всего 18, среди них 1 линейный, 3 квадратичных и 14 кубических. Указанный выше набор 37 полуинвариантов затем используется для построения кубической энергетической формы, характеризующейся 37 определяющими скалярами/псевдоскалярами (9 линейными и 28 квадратичными) и соответсвующей математической модели нелинейного гемитропного микрополярного упругого тела. Получены определяющие уравнения нелинейного гемитропного микрополярного тела, включающие в себя квадратичные поправки.

Ключевые слова: псевдотензор, микрополярный гемитропный континуум, полуинвариант, определяющий псевдоскаляр, нелинейный микрополярный континуум, кубическая энергетическая форма.

1. Вводные замечания

При построении определяющих соотношений в механике сплошной среды важную роль играет теория рациональных алгебраических инвариантов [1–7]. С помощью инвариантов и полуинвариантов удатся с относительно небольшими усилиями строить аппроксимации заданного порядка для энергетических потенциалов, описывающих силовые и моментные напряжения в микрополярной упругой среде [8–26], а также обосновывать необходимость включения тех или иных механических и термомеханических модулей. Такие модули могут оказаться псевдоскалярами с нечтным алгебраическим весом – это означает, что они меняют знак при зеркальных отражениях и инверсиях трхмерного пространства. Особенно это актуально при построении математических моделей гемитропных микрополярных упругих сред. В подобных случаях наиболее удобно использовать так называемое А-представление микрополярных энергетических форм [15, 16]. Оно представляет собой линейную оболочку целых рациональных алгебраических инвариантов (как индивидуальных, так и совместных) для несимметричного тензора деформаций и градиента поля микроповоротов, рассматриваемых относительно гемитропной (полуизотропной) группы преобразований.

Отправной точкой в теории алгебраических инвариантов служит понятие индивидуального инварианта (или псевдоинварианта) тензора (псевдотензора) [1]. При этом, если алгебраический вес g инварианта равен нулю, то инвариант назвывают абсолютным инвариантом, а при $g \neq 0$ – относительным или псевдоинвариантом, а в силу гемитропии – полуинвариантом. Следуя монографии [1], инварианты для аффинора A_k^s, могут быть заданы как следы его степеней:

$$\underset{1}{S} = A_{s\cdot}^{\cdot s}, \quad \underset{2}{S} = A_{s\cdot}^{\cdot k} A_{k\cdot}^{\cdot s}, \quad \underset{3}{S} = A_{s\cdot}^{\cdot k} A_{k\cdot}^{\cdot l} A_{l\cdot}^{\cdot s}, \ldots \tag{1}$$

С другой стороны, в механике континуума часто используются инварианты вида:

$$\underset{1}{I} = A_{s\cdot}^{\cdot s}, \quad \underset{2}{I} = A_{[s\cdot}^{\cdot k} A_{k]\cdot}^{\cdot s}, \quad \underset{3}{I} = A_{[s\cdot}^{\cdot k} A_{k\cdot}^{s\cdot} A_{l]\cdot}^{\cdot s}, \ldots \tag{2}$$

Квадратные скобки в записи (2) указывают на то, что по индексам внутри них производится альтернирование (иначе говоря, антисимметризация). Сами же инварианты из систем (1) и (2) подчиняются соотношениям, известным как формулы Ньютона [1]:

$$\underset{k}{S} - \underset{1}{I}\,\underset{k-1}{S} + \underset{2}{I}\,\underset{k-2}{S} - \ldots + (-1)^{k-1} \underset{k-1}{I}\,\underset{1}{S} + (-1)^k k \underset{k}{I} = 0.$$

Что касается совместных инвариантов для набора, включающего несколько тензоров или псевдотензоров, то они вычисляются как следы от внутренних совместных произведений входящих в этот набор объектов.

Заметим, что каждая из систем инвариантов (1) и (2) образует бесконечное множество и притом является полной. В то же время, благодаря теореме Гамильтона – Кэли [3], между инвариантами высоких степеней возникают сизигии. Так, в трехмерном пространстве любые инварианты степени выше третьей не могут быть независимыми: они допускают рациональное выражение через инварианты более низких степеней с помощью указанных сизигий. Отсюда следует понятие неприводимого инварианта системы – такого инварианта, который нельзя представить в виде целой рациональной функции от каких-либо других инвариантов из той же системы. Совокупность всех неприводимых инвариантов принято называть полной неприводимой системой инвариантов.

Настоящее исследование ставит своей целью планомерное применение методов алгебраической теории инвариантов, а именно – использование полученных на их основе результатов для вывода определяющих соотношений, связывающих силовые и моментные напряжения в моделях микрополярных упругих сред. В рамках исследования построен полный неприводимый набор, включающий в себя как индивидуальные, так и совместные целые рациональные алгебраические инварианты и полуинварианты третьей степени (кубические) для системы, состоящей из одного тензора второго ранга и одного псевдотензора второго ранга. Далее этот набор полуинвариантов применяется для трех целей: построения кубической формы энергии для гемитропного тела, нахождения квадратичных добавок в определяющих уравнениях и обоснования того, что для описания среды требуется 37 гемитропных определяющих модулей.

По своей терминологии, системе обозначений, методам и опорным результатам изложение опирается на более ранние публикации [18, 19, 24–26].

2. Краткие предварительные сведения по псевдотензорной алгебре и теории целых рациональных алгебраических инвариантов

Сначала изложим базовые понятия, которые потребуются из современной геометрии и тензорного исчисления [1, 25–29]. В дальнейшем, если из контекста это не ясно, вес псевдотензора будем указывать сверху от его корневого символа в квадратных скобках, а ранг – снизу, в круглых скобках. Например, так: $\underset{(n)}{\overset{[g]}{\mathbf{T}}}$. При этом у абсолютных тензоров (алгебраический вес – ноль) и у некоторых стандартных псевдотензоров вес в обозначениях специально отмечать не станем. Ранг тоже во многих случаях будем опускать – когда он очевиден по смыслу, чтобы не усложнять запись тензорных уравнений.

Введем скалярную функцию $\mathrm{w.g.t}$ от псевдотензора и припишем этой функции значение веса псевдотензора. Например, имеем

$$\mathrm{w.g.t}(\overset{[g]}{1}) = g,$$

где $\overset{[g]}{1}$ – псевдоскалярная единица веса g.

Псевдотензор $\underset{(n)}{\overset{[g]}{\mathbf{T}}}$, имеющий алгебраический вес g и ранг n, можно привести к абсолютному тензору того же ранга, используя степени псевдоскалярной единицы. Соответствующее преобразование выглядит так:

$$\underset{(n)}{\mathbf{T}} = \overset{[-g]}{1} \cdot \underset{(n)}{\overset{[g]}{\mathbf{T}}}.$$

В рамках настоящей статьи важную роль играет теория целых рациональных алгебраических инвариантов, подробное изложение которой можно найти в публикациях [1–6].

3. Полуинвариантные следы как целый рациональный базис инвариантов относительно гемитропной группы

Рассмотрим систему, состоящую из одного тензора и одного псевдотензора веса g (оба – второго ранга). Каждый из них допускает разложение на симметричную и антисимметричную части, то есть запись в виде $\mathbf{A}+\mathbf{V}$, $\overset{[g]}{\mathbf{B}}+\overset{[g]}{\mathbf{W}}$. При этом справедливы формулы:

$$\mathbf{A}=\mathbf{A}^{\mathrm{T}}, \quad \mathbf{V}=-\mathbf{V}^{\mathrm{T}}, \quad \overset{[g]}{\mathbf{B}}=\overset{[g]}{\mathbf{B}}{}^{\mathrm{T}}, \quad \overset{[g]}{\mathbf{W}}=-\overset{[g]}{\mathbf{W}}{}^{\mathrm{T}}.$$

Следует отметить, что в моделях гемитропных микрополярных тел [11, 17–19, 24–26] псевдотензору изгиба-кручения могут быть приписаны алгебраические веса: $g=-1, 0, +1$.

Опираясь на результаты, полученные в [2, 4, 5, 25, 26], можно построить систему инвариантов для набора, включающего два симметричных $\mathbf{A}$, $\overset{[g]}{\mathbf{B}}$ и два антисимметричных $\mathbf{V}$, $\overset{[g]}{\mathbf{W}}$ объекта второго ранга (тензоров или псевдотензоров). В трехмерном пространстве полный набор всех совместных и индивидуальных гемитропных инвариантов такой системы насчитывает 86 неприводимых составляющих [2, 25, 26]. Порядок их следования принят в соответствии с таблицей 2 из [2]:

$1)\ \mathrm{tr}[\mathbf{A}],\quad 2)\ \mathrm{tr}[\mathbf{A}^2],\quad 3)\ \mathrm{tr}[\mathbf{A}^3],\quad 4)\ \mathrm{tr}[\overset{[g]}{\mathbf{B}}],$

$5)\ \mathrm{tr}[\overset{[g]}{\mathbf{B}}{}^2],\quad 6)\ \mathrm{tr}[\overset{[g]}{\mathbf{B}}{}^3],\quad 7)\ \mathrm{tr}[\mathbf{V}^2],\quad 8)\ \mathrm{tr}[\overset{[g]}{\mathbf{W}}{}^2],$

$9)\ \mathrm{tr}[\mathbf{A}\overset{[g]}{\mathbf{B}}],\quad 10)\ \mathrm{tr}[\mathbf{A}^2\overset{[g]}{\mathbf{B}}],\quad 11)\ \mathrm{tr}[\overset{[g]}{\mathbf{B}}{}^2\mathbf{A}],\quad 12)\ \mathrm{tr}[\mathbf{A}^2\overset{[g]}{\mathbf{B}}{}^2],$

$13)\ \mathrm{tr}[\mathbf{V}^2\mathbf{A}],\quad 14)\ \mathrm{tr}[\mathbf{V}^2\mathbf{A}^2],\quad 15)\ \mathrm{tr}[\mathbf{V}^2\mathbf{A}\mathbf{V}\mathbf{A}^2],\quad 16)\ \mathrm{tr}[\mathbf{V}^2\overset{[g]}{\mathbf{B}}],$

$17)\ \mathrm{tr}[\mathbf{V}^2\overset{[g]}{\mathbf{B}}{}^2],\quad 18)\ \mathrm{tr}[\mathbf{V}^2\overset{[g]}{\mathbf{B}}\mathbf{V}\overset{[g]}{\mathbf{B}}{}^2],\quad 19)\ \mathrm{tr}[\overset{[g]}{\mathbf{W}}{}^2\mathbf{A}],\quad 20)\ \mathrm{tr}[\overset{[g]}{\mathbf{W}}{}^2\mathbf{A}^2],$

$21)\ \mathrm{tr}[\overset{[g]}{\mathbf{W}}{}^2\mathbf{A}\overset{[g]}{\mathbf{W}}\mathbf{A}^2],\quad 22)\ \mathrm{tr}[\overset{[g]}{\mathbf{W}}{}^2\overset{[g]}{\mathbf{B}}],\quad 23)\ \mathrm{tr}[\overset{[g]}{\mathbf{W}}{}^2\overset{[g]}{\mathbf{B}}{}^2],\quad 24)\ \mathrm{tr}[\overset{[g]}{\mathbf{W}}{}^2\overset{[g]}{\mathbf{B}}\overset{[g]}{\mathbf{W}}\overset{[g]}{\mathbf{B}}{}^2],$

$25)\ \mathrm{tr}[\mathbf{V}\overset{[g]}{\mathbf{W}}],\quad 26)\ \mathrm{tr}[\mathbf{V}\mathbf{A}\overset{[g]}{\mathbf{B}}],\quad 27)\ \mathrm{tr}[\mathbf{V}\mathbf{A}^2\overset{[g]}{\mathbf{B}}],\quad 28)\ \mathrm{tr}[\mathbf{V}\overset{[g]}{\mathbf{B}}{}^2\mathbf{A}],$

$29)\ \mathrm{tr}[\mathbf{V}\mathbf{A}^2\overset{[g]}{\mathbf{B}}{}^2],\quad 30)\ \mathrm{tr}[\mathbf{V}\mathbf{A}^2\overset{[g]}{\mathbf{B}}\mathbf{A}],\quad 31)\ \mathrm{tr}[\mathbf{V}\overset{[g]}{\mathbf{B}}{}^2\mathbf{A}\overset{[g]}{\mathbf{B}}],\quad 32)\ \mathrm{tr}[\mathbf{V}\mathbf{A}^2\overset{[g]}{\mathbf{B}}{}^2\mathbf{A}],$ (3)

$33)\ \mathrm{tr}[\mathbf{V}\overset{[g]}{\mathbf{B}}{}^2\mathbf{A}^2\overset{[g]}{\mathbf{B}}],\quad 34)\ \mathrm{tr}[\mathbf{V}^2\mathbf{A}\overset{[g]}{\mathbf{B}}],\quad 35)\ \mathrm{tr}[\mathbf{V}^2\mathbf{A}^2\overset{[g]}{\mathbf{B}}],\quad 36)\ \mathrm{tr}[\mathbf{V}^2\mathbf{A}^2\overset{[g]}{\mathbf{B}}{}^2\mathbf{A}],$

$37)\ \mathrm{tr}[\mathbf{V}^2\mathbf{A}\mathbf{V}\overset{[g]}{\mathbf{B}}],\quad 38)\ \mathrm{tr}[\mathbf{V}^2\mathbf{A}\mathbf{V}\overset{[g]}{\mathbf{B}}{}^2],\quad 39)\ \mathrm{tr}[\mathbf{V}^2\overset{[g]}{\mathbf{B}}\mathbf{V}\mathbf{A}^2],\quad 40)\ \mathrm{tr}[\overset{[g]}{\mathbf{W}}\mathbf{A}\overset{[g]}{\mathbf{B}}],$

$41)\ \mathrm{tr}[\overset{[g]}{\mathbf{W}}\mathbf{A}^2\overset{[g]}{\mathbf{B}}],\quad 42)\ \mathrm{tr}[\overset{[g]}{\mathbf{W}}\overset{[g]}{\mathbf{B}}{}^2\mathbf{A}],\quad 43)\ \mathrm{tr}[\overset{[g]}{\mathbf{W}}\mathbf{A}^2\overset{[g]}{\mathbf{B}}{}^2],\quad 44)\ \mathrm{tr}[\overset{[g]}{\mathbf{W}}\mathbf{A}^2\overset{[g]}{\mathbf{B}}\mathbf{A}],$

$45)\ \mathrm{tr}[\overset{[g]}{\mathbf{W}}\overset{[g]}{\mathbf{B}}{}^2\mathbf{A}\overset{[g]}{\mathbf{B}}],\quad 46)\ \mathrm{tr}[\overset{[g]}{\mathbf{W}}\mathbf{A}^2\overset{[g]}{\mathbf{B}}{}^2\mathbf{A}],\quad 47)\ \mathrm{tr}[\overset{[g]}{\mathbf{W}}\overset{[g]}{\mathbf{B}}{}^2\mathbf{A}^2\overset{[g]}{\mathbf{B}}],\quad 48)\ \mathrm{tr}[\overset{[g]}{\mathbf{W}}{}^2\mathbf{A}\overset{[g]}{\mathbf{B}}],$

$49)\ \mathrm{tr}[\overset{[g]}{\mathbf{W}}{}^2\mathbf{A}^2\overset{[g]}{\mathbf{B}}],\quad 50)\ \mathrm{tr}[\overset{[g]}{\mathbf{W}}{}^2\overset{[g]}{\mathbf{B}}{}^2\mathbf{A}],\quad 51)\ \mathrm{tr}[\overset{[g]}{\mathbf{W}}{}^2\mathbf{A}\overset{[g]}{\mathbf{W}}\overset{[g]}{\mathbf{B}}],\quad 52)\ \mathrm{tr}[\overset{[g]}{\mathbf{W}}{}^2\mathbf{A}\overset{[g]}{\mathbf{W}}\overset{[g]}{\mathbf{B}}{}^2],$

$53)\ \mathrm{tr}[\overset{[g]}{\mathbf{W}}{}^2\overset{[g]}{\mathbf{B}}\overset{[g]}{\mathbf{W}}\mathbf{A}^2],\quad 54)\ \mathrm{tr}[\mathbf{V}\overset{[g]}{\mathbf{W}}\mathbf{A}],\quad 55)\ \mathrm{tr}[\mathbf{V}\overset{[g]}{\mathbf{W}}\mathbf{A}^2],\quad 56)\ \mathrm{tr}[\mathbf{V}^2\overset{[g]}{\mathbf{W}}\mathbf{A}],$

$57)\ [\overset{[g]}{\mathbf{W}}{}^2\mathbf{V}\mathbf{A}],\quad 58)\ \mathrm{tr}[\mathbf{V}^2\overset{[g]}{\mathbf{W}}\mathbf{A}^2],\quad 59)\ \mathrm{tr}[\overset{[g]}{\mathbf{W}}{}^2\mathbf{V}\mathbf{A}^2],\quad 60)\ \mathrm{tr}[\mathbf{V}^2\mathbf{A}\overset{[g]}{\mathbf{W}}\overset{[g]}{\mathbf{A}}{}^2],$

$61)\ \mathrm{tr}[\overset{[g]}{\mathbf{W}}{}^2\mathbf{A}\mathbf{V}\mathbf{A}^2],\quad 62)\ \mathrm{tr}[\mathbf{V}\overset{[g]}{\mathbf{W}}\overset{[g]}{\mathbf{B}}],\quad 63)\ \mathrm{tr}[\mathbf{V}\overset{[g]}{\mathbf{W}}\overset{[g]}{\mathbf{B}}{}^2],\quad 64)\ \mathrm{tr}[\mathbf{V}^2\overset{[g]}{\mathbf{W}}\overset{[g]}{\mathbf{B}}],$

$65)\ \mathrm{tr}[\overset{[g]}{\mathbf{W}}{}^2\mathbf{V}\overset{[g]}{\mathbf{B}}],\quad 66)\ \mathrm{tr}[\mathbf{V}^2\overset{[g]}{\mathbf{W}}\overset{[g]}{\mathbf{B}}],\quad 67)\ \mathrm{tr}[\overset{[g]}{\mathbf{W}}{}^2\mathbf{V}\overset{[g]}{\mathbf{B}}{}^2],\quad 68)\ \mathrm{tr}[\mathbf{V}^2\overset{[g]}{\mathbf{B}}\overset{[g]}{\mathbf{W}}\overset{[g]}{\mathbf{B}}{}^2],$

$69)\ \mathrm{tr}[\overset{[g]}{\mathbf{W}}{}^2\overset{[g]}{\mathbf{B}}\mathbf{V}\overset{[g]}{\mathbf{B}}{}^2],\quad 70)\ \mathrm{tr}[\mathbf{V}\overset{[g]}{\mathbf{W}}\mathbf{A}\overset{[g]}{\mathbf{B}}],\quad 71)\ \mathrm{tr}[\mathbf{V}\overset{[g]}{\mathbf{W}}\overset{[g]}{\mathbf{B}}\mathbf{A}],\quad 72)\ \mathrm{tr}[\mathbf{V}\overset{[g]}{\mathbf{W}}\mathbf{A}^2\overset{[g]}{\mathbf{B}}],$

73) $\mathrm{tr}\,[\mathbf{V}\overset{[g]}{\mathbf{W}}\overset{[g]}{\mathbf{B}}{}^2\mathbf{A}]$, 74) $\mathrm{tr}\,[\overset{[g]}{\mathbf{W}}\mathbf{V}\mathbf{A}^2\overset{[g]}{\mathbf{B}}]$, 75) $\mathrm{tr}\,[\overset{[g]}{\mathbf{W}}\mathbf{V}\overset{[g]}{\mathbf{B}}{}^2\mathbf{A}]$, 76) $\mathrm{tr}\,[\mathbf{V}\overset{[g]}{\mathbf{W}}\mathbf{A}^2\overset{[g]}{\mathbf{B}}{}^2]$,

77) $\mathrm{tr}\,[\mathbf{V}\overset{[g]}{\mathbf{W}}\mathbf{A}^2\overset{[g]}{\mathbf{B}}\mathbf{A}]$, 78) $\mathrm{tr}\,[\mathbf{V}\overset{[g]}{\mathbf{W}}\overset{[g]}{\mathbf{B}}{}^2\mathbf{A}\overset{[g]}{\mathbf{B}}]$, 79) $\mathrm{tr}\,[\mathbf{V}^2\overset{[g]}{\mathbf{W}}\mathbf{A}\overset{[g]}{\mathbf{B}}]$, 80) $\mathrm{tr}\,[\overset{[g]}{\mathbf{W}}{}^2\mathbf{V}\mathbf{A}\overset{[g]}{\mathbf{B}}]$,

81) $\mathrm{tr}\,[\mathbf{V}^2\mathbf{A}\overset{[g]}{\mathbf{W}}\overset{[g]}{\mathbf{B}}]$, 82) $\mathrm{tr}\,[\overset{[g]}{\mathbf{W}}{}^2\mathbf{A}\mathbf{V}\overset{[g]}{\mathbf{B}}]$, 83) $\mathrm{tr}\,[\mathbf{V}^2\overset{[g]}{\mathbf{B}}\overset{[g]}{\mathbf{W}}\mathbf{A}^2]$, 84) $\mathrm{tr}\,[\mathbf{V}^2\mathbf{A}\overset{[g]}{\mathbf{W}}\overset{[g]}{\mathbf{B}}{}^2]$,

85) $\mathrm{tr}\,[\overset{[g]}{\mathbf{W}}{}^2\overset{[g]}{\mathbf{B}}\mathbf{V}\mathbf{A}]$, 86) $\mathrm{tr}\,[\overset{[g]}{\mathbf{W}}{}^2\mathbf{A}\mathbf{V}\overset{[g]}{\mathbf{B}}{}^2]$.

Здесь и далее будем опускать операцию внутреннего произведения тензоров, то есть запись $\mathbf{A}\cdot\overset{[g]}{\mathbf{B}}$ сокращается до $\mathbf{A}\,\overset{[g]}{\mathbf{B}}$. Каждый из инвариантных следов снабжается индивидуальным уникальным номером 1) −86).

Отметим, что в записи инвариантов и полуинвариантов (3) отсутствуют скобки под знаком следа. Кроме того, в силу ассоциативности внутреннего произведения полуинварианты (3) можно вычислить различными способами. Например, для псевдоинварианта 81) имеем:

$$\mathrm{tr}\,[\mathbf{V}^2\mathbf{A}\overset{[g]}{\mathbf{W}}\overset{[g]}{\mathbf{B}}] = \mathrm{tr}\,[\mathbf{V}^2(\mathbf{A}\overset{[g]}{\mathbf{W}})\overset{[g]}{\mathbf{B}}] = \mathrm{tr}\,[\mathbf{V}(\mathbf{V}\mathbf{A})(\overset{[g]}{\mathbf{W}}\overset{[g]}{\mathbf{B}})].$$

В наборе из 86 псевдоинвариантов (3) только следующие 40 обладают чувствительностью к зеркальным отражениям:

4, 6, 9, 10, 16, 18, 21, 22, 25, 26, 27, 30, 31, 33, 34, 35, 37, 39, 42, 43,
46, 48, 49, 52, 54, 55, 56, 58, 60, 63, 65, 66, 69, 73, 75, 76, 80, 82, 84, 85.

В дальнейшем будем рассматривать только те гемитропные инварианты из набора (3), чья степень не превышает третью. Всего их оказалось двадцать. Чтобы удобнее было с ними работать, введем нумерацию, опираясь на следующие правила (в порядке убывания важности):

1) инварианты располагаются по возрастанию алгебраической степени;

2) при одинаковой степени – по увеличению числа различных сомножителей во внутреннем произведении;

3) если и это не различает их – в алфавитном порядке.

Здесь главным является первое правило, а каждое следующее применяется только тогда, когда предыдущее не дает однозначного ответа. В таком случае получим упорядоченный набор инвариантов не выше третьей степени:

$$\begin{array}{llll}
1)\ \mathrm{tr}[\mathbf{A}] & 2)\ \mathrm{tr}[\overset{[g]}{\mathbf{B}}] & 3)\ \mathrm{tr}[\mathbf{A}^2] & 4)\ \mathrm{tr}[\overset{[g]}{\mathbf{B}}{}^2] \\
5)\ \mathrm{tr}[\mathbf{V}^2] & 6)\ \mathrm{tr}[\overset{[g]}{\mathbf{W}}{}^2] & 7)\ \mathrm{tr}[\mathbf{A}\overset{[g]}{\mathbf{B}}] & 8)\ \mathrm{tr}[\mathbf{V}\overset{[g]}{\mathbf{W}}] \\
9)\ \mathrm{tr}[\mathbf{A}^3] & 10)\ \mathrm{tr}[\overset{[g]}{\mathbf{W}}{}^2] & 11)\ \mathrm{tr}[\mathbf{A}\overset{[g]}{\mathbf{B}}] & 12)\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{V}\overset{[g]}{\mathbf{W}}] \\
13)\ \mathrm{tr}[\mathbf{V}^2\mathbf{A}] & 14)\ \mathrm{tr}[\mathbf{V}^2\overset{[g]}{\mathbf{B}}] & 15)\ \mathrm{tr}[\overset{[g]}{\mathbf{W}}{}^2\mathbf{A}] & 16)\ \mathrm{tr}[\overset{[g]}{\mathbf{W}}{}^2\overset{[g]}{\mathbf{B}}] \\
17)\ \mathrm{tr}[\mathbf{V}\mathbf{A}\overset{[g]}{\mathbf{B}}] & 18)\ \mathrm{tr}[\mathbf{V}\mathbf{A}\overset{[g]}{\mathbf{B}}] & 19)\ \mathrm{tr}[\mathbf{V}\mathbf{A}\overset{[g]}{\mathbf{B}}] & 20)\ \mathrm{tr}[\mathbf{V}\overset{[g]}{\mathbf{W}}\overset{[g]}{\mathbf{B}}].
\end{array} \qquad (4)$$

Обратим внимание на то, как сгруппированы элементы в списке (4): первая степень представлена двумя инвариантами (1 и 2), вторая – шестью (с 3 по 8), третья – двенадцатью (с 9 по 20).

Алгебраические веса инвариантов и полуинвариантов (4) будут равны:

$$\mathrm{w.g.t}(1) = \mathrm{w.g.t}(3) = \mathrm{w.g.t}(5) = \mathrm{w.g.t}(9) = \mathrm{w.g.t}(13) = 0,$$

$$\mathrm{w.g.t}(2) = \mathrm{w.g.t}(7) = \mathrm{w.g.t}(8) = \mathrm{w.g.t}(12) = \mathrm{w.g.t}(14) = \mathrm{w.g.t}(17) = \mathrm{w.g.t}(19) = g,$$

$$\mathrm{w.g.t}(4)=\mathrm{w.g.t}(6)=\mathrm{w.g.t}(11)=\mathrm{w.g.t}(15)=\mathrm{w.g.t}(18)=\mathrm{w.g.t}(20)=2g, \qquad (5)$$
$$\mathrm{w.g.t}(10)=\mathrm{w.g.t}(16)=3g.$$

Из (5) видно, что всего 9 полуинвариантов в (4) имеют алгебраические веса g и $3g$, то есть обладают чувствительностью к зеркальным отражениям трехмерного пространства.

Сначала выберем линейные инварианты из списка (4): 1), 2). Следует заметить, что полуинвариант 2) чувствителен к зеркальным преобразованиям.

Сформируем затем набор квадратичных инвариантов из приведенного списка элементов (4). В итоге получим:

$$1^2, \quad 1\cdot 2; \quad 2^2; \quad 3, \quad 4, \quad 5, \quad 6, \quad 7, \quad 8. \qquad (6)$$

Набор (6) состоит из 9 квадратичных гемитропных инвариантов, используемых для построения квадратичного потенциала силовых и моментных напряжений гемитропного микрополярного упругого тела [11, 17–19, 24–26]. Алгебраические веса в наборе (6) распределяются следующим образом:

$$\begin{gathered}\mathrm{w.g.t}(1^2)=\mathrm{w.g.t}(3)=\mathrm{w.g.t}(5)=0, \quad \mathrm{w.g.t}(1\cdot 2)=\mathrm{w.g.t}(7)=\mathrm{w.g.t}(8)=g,\\ \mathrm{w.g.t}(2^2)=\mathrm{w.g.t}(4)=\mathrm{w.g.t}(6)=2g.\end{gathered} \qquad (7)$$

Несложно заметить, что чувствительностью к зеркальным отражениям обладают лишь три полуинварианта: 1·2, 7, 9.

Выпишем далее неприводимую систему кубических инвариантов, представляющих собой совместные произведения инвариантов из списка (4) общей степени 3. Полный перечень из 28 кубических гемитропных инвариантов принимает вид:

$$\begin{gathered}1^3, 1^2\cdot 2, 1\cdot 2^2; \quad 2^3; \quad 1\cdot 3, 1\cdot 4, 1\cdot 5, 1\cdot 6, 1\cdot 7, 1\cdot 8;\\ 2\cdot 3, 2\cdot 4, 2\cdot 5, 2\cdot 6, 2\cdot 7, 2\cdot 8; \quad 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20.\end{gathered} \qquad (8)$$

Алгебраические веса инвариантов и полуинвариантов в наборе (8) будут равны:

$$\begin{gathered}\mathrm{w.g.t}(1^3)=\mathrm{w.g.t}(1\cdot 3)=\mathrm{w.g.t}(1\cdot 5)=\mathrm{w.g.t}(9)=\mathrm{w.g.t}(13)=0,\\ \mathrm{w.g.t}(1^2\cdot 2)=\mathrm{w.g.t}(1\cdot 7)=\mathrm{w.g.t}(1\cdot 8)=\mathrm{w.g.t}(2\cdot 3)=\mathrm{w.g.t}(2\cdot 5)=\\ =\mathrm{w.g.t}(12)=\mathrm{w.g.t}(14)=\mathrm{w.g.t}(17)=\mathrm{w.g.t}(19)=g,\\ \mathrm{w.g.t}(1\cdot 2^2)=\mathrm{w.g.t}(1\cdot 4)=\mathrm{w.g.t}(1\cdot 6)=\mathrm{w.g.t}(2\cdot 7)=\mathrm{w.g.t}(2\cdot 8)=\\ =\mathrm{w.g.t}(11)=\mathrm{w.g.t}(15)=\mathrm{w.g.t}(18)=\mathrm{w.g.t}(20)=2g,\\ \mathrm{w.g.t}(2^3)=\mathrm{w.g.t}(2\cdot 4)=\mathrm{w.g.t}(2\cdot 6)=\mathrm{w.g.t}(10)=\mathrm{w.g.t}(16)=3g.\end{gathered} \qquad (9)$$

Заметим, что инварианты (8) при учете (9), имеющие алгебраический вес g и $3g$, являются полуинвариантами, то есть проявляют чувствительность к зеркальным отражениям и инверсиям трехмерного пространства. Таких полуинвариантов всего 14.

4. Аппроксимация третьей степени энергетической формы и определяющие уравнения, включающие квадратичные поправки, гемитропного микрополярного упругого тела

Опираясь на результаты предыдущего раздела статьи, построим систему индивидуальных и совместных целых рациональных алгебраических инвариантов и полуинвариантов симметричных и антисимметричных частей тензора деформаций $\in$ и псевдотензора изгиба-кручения $\overset{[g]}{\boldsymbol{\kappa}}$. Для этого следует выполнить замену:

$$\begin{gathered}\mathbf{A} = \operatorname{sym} \in, \quad \mathbf{B} = \operatorname{sym} \overset{[g]}{\boldsymbol{\kappa}}, \\ \mathbf{V} = \operatorname{asym} \in, \quad \mathbf{W} = \operatorname{asym} \overset{[g]}{\boldsymbol{\kappa}}.\end{gathered} \tag{10}$$

Если принять подстановку (10) и опираться на ту систему нумерации инвариантов, которая была использована в статьях [18, 19, 24, 26], то систему квадратичных гемитропных инвариантов (6) можно выписать так, как это сделано в [24], а систему кубических гемитропных инвариантов (8) – в соответствии с [26]. Сами выражения инвариантных следов здесь не приводятся из-за их громоздкости.

A-представление для кубического приближения потенциала силовых и моментных напряжений в гемитропном микрополярном упругом теле записывается в компактной форме. Это представление отвечает системам квадратичных (6) и кубических (8) инвариантов и полуинвариантов:

$$Y = \sum_{a=1}^{9} {}^2\underset{a}{C}\, {}^2\underset{a}{\mathrm{I}} + \sum_{a=1}^{28} {}^3\underset{c}{C}\, {}^3\underset{c}{\mathfrak{I}}, \tag{11}$$

где введены новые обозначения для определяющих упругих модуле ${}^2\underset{a}{C}$ ($a = 1, ...,$ $\ldots, 9$) – определяющие модули квадратичного приближения; ${}^3\underset{a}{C}$ ($c = 1, \ldots, 28$) – определяющие модули, связанные с кубическими поправками; ${}^2\underset{a}{\mathrm{I}}$ ($a = 1, \ldots, 9$) – квадратичные инварианты и полуинварианты; ${}^3\underset{c}{\mathfrak{I}}$ ($c = 1, \ldots, 28$) – кубические инварианты и полуинварианты. Стоит отметить чувствительность некоторых определяющих модулей к зеркальным отражениям и инверсиям трехмерного пространства, что связано с возможностью присвоения нечетного алгебраического веса псевдотензору изгиба-кручения.

Определяющие механические модули ($9 + 28 = 37$) ${}^2\underset{a}{C}$ ($a = 1, \ldots, 9$) и ${}^3\underset{c}{C}$ ($c =$ $= 1, \ldots, 28$), присутствующие в потенциале силовых и моментных напряжений (11), являются неопределенными коэффициентами в линейной оболочке для неприводимых наборов квадратичных и кубических инвариантов системы двух асимметричных тензоров второго ранга в трехмерном пространстве.

Определяющие уравнения для силовых и моментных напряжений, соответствующие гемитропному упругому потенциалу (11), могут быть приняты в асимметричной псевдотензорной форме:

$$t^{s\cdot}_{\cdot k} = \frac{\partial Y}{\partial(\in^k_s)}, \quad \overset{[-g]}{\mu}{}^{s\cdot}_{\cdot k} = \frac{\partial Y}{\partial(\overset{[g]}{\kappa}{}^{\cdot k}_{s\cdot})}. \tag{12}$$

Подставив в уравнения (12) выражение для потенциала (11), получим:

$$t^s_k = \sum_{c=1}^{9} {}^2\underset{c}{C} \frac{\partial^2 \underset{c}{\mathrm{I}}}{\partial(\in^k_s)} + \sum_{a=1}^{28} {}^3\underset{a}{C} \frac{\partial^2 \underset{c}{\mathfrak{I}}}{\partial(\in^k_s)}, \quad \overset{[-g]}{\mu}{}^s_k = \sum_{c=1}^{9} {}^2\underset{c}{C} \frac{\partial^2 \underset{c}{\mathrm{I}}}{\partial(\overset{[g]}{\kappa}{}^k_s)} + \sum_{a=1}^{28} {}^3\underset{a}{C} \frac{\partial^2 \underset{c}{\mathfrak{I}}}{\partial(\overset{[g]}{\kappa}{}^k_s)}.$$

Заключение

С целью получения квадратичной аппроксимации определяющих уравнений для нелинейного гемитропного микрополярного упругого тела найдена полная неприводимая система инвариантных и полуинвариантных следов системы двух асимметричных тензоров/псевдотензоров второго ранга. Подводя итог настоящего исследования, заключаем:

1. Выделен полный неприводимый набор гемитропных алгебраических инвариантов и полуинвариантов (квадратичных и кубических) для двух симметричных и двух антисимметричных объектов второго ранга – тензоров и псевдотензоров; при этом включены как индивидуальные, так и совместные инварианты.

2. Выделены инварианты нечетного алгебраического веса, заведомо чувствительные к зеркальным отражениям трехмерного пространства.

3. Вычислены алгебраические веса полученных инвариантов и полуинвариантов.

4. Найденные инварианты и полуинварианты затем используются для построения кубической энергетической формы и последующего получения псевдотензорной формы определяющих уравнений, включающих в себя квадратичные поправки.

5. Обоснована необходимость введения как минимум 37 определяющих скаляров/псевдоскаляров в математическую модель гемитропного микрополярного упругого тела.

Список литературы

1. Гуревич Г.Б. *Основы теории алгебраических инвариантов*. М.–Л.: ГИТТЛ, 1948. 408 с.

2. Спенсер Э. *Теория инвариантов.* М.: Мир, 1974. 156 с.

3. Сушкевич А. К. *Основы высшей алгебры*. М.–Л.: ОНТИ, ГРТТЛ, 1937. 468 с.

4. Spencer A.J.M., Rivlin R.S. Isotropic integrity bases for vectors and second-order tensors: Part I. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. 1962. Vol. 9. P. 45–63. DOI: 10.1007/bf00253332.

5. Spencer A.J.M. Isotropic integrity bases for vectors and second-order tensors: Part II. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. 1965. Vol. 18. No 1. P. 51–82. DOI: 10.1007/bf00253982.

6. Жилин П.А. *Рациональная механика сплошных сред*. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2012. 584 с.

7. Khaniki H.B., Ghayesh M.H., Chin R. et al. A review on the nonlinear dynamics of hyperelastic structures. *Nonlinear Dynamics*. 2022. Vol. 110. P. 963–994. DOI: 10.1007/s11071-022-07700-3.

8. Eremeyev V.A., Lebedev L.P., Altenbach H. *Foundations of Micropolar Mechanics*. Heidelberg: Springer, 2012. 203 p.

9. Soldatos K.P. New trends in couple-stress hyperelasticity. *Mathematics and Mechanics of Solids*. 2023. Vol. 30. Iss. 2. P. 174–201. DOI: 10.1177/10812865231177673.

10. Cosserat E., Cosserat F. *Théorie des corps déformables*. Paris: A. Hermann et fils, 1909. 226 p.

11. Dyszlewicz J. *Micropolar Theory of Elasticity*. Berlin: Springer, 1986. 386 p.

12. Günther W. Zur Statik und Kinematik des Cosseratschen Kontinuums. *Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft*. 1958. Vol. 10. P. 195–213.

13. Kessel S. Lineare Elastizitätstheorie des anisotropen Cosserat-Kontinuums. *Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft*. 1964. Vol. 16. P. 1–22.

14. Neuber H. Über Probleme der Spannungskonzentration im Cosserat-Körper. *Acta Mechanica*. 1966. Vol. 2. P. 48–69. DOI: 10.1007/bf01176729.

15. Neuber H. On the effect of stress concentration in Cosserat continua. *Mechanics of Generalized Continua*. Berlin–Heidelberg: Springer, 1968. P. 109–113.

16. Nowacki W. *Theory of Micropolar Elasticity*. Berlin: Springer, 1972. 483 p.

17. Nowacki W. *Theory of Asymmetric Elasticity*. Oxford–New York: Pergamon Press, 1986. 383 p.

18. Радаев Ю.Н. Правило множителей в ковариантных формулировках микрополярных теорий механики континуума. *Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. Физ.-мат. науки*. 2018. Т. 22. №3. С. 504–517. DOI: 10.14498/vsgtu1635.

19. Радаев Ю.Н., Мурашкин Е.В. Псевдотензорная формулировка механики гемитропных микрополярных сред. *Проблемы прочности и пластичности*. 2020. Т. 82. №4. С. 399–412. DOI: 10.32326/1814-9146-2020-82-4-399-412.

20. Altenbach J., Altenbach H., Eremeyev V.A. On generalized Cosserat-type theories of plates and shells: a short review and bibliography. *Archive of Applied Mechanics*. 2010. Vol. 80. P. 73–92. DOI: 10.1007/s00419-009-0365-3.

21. dell'Isola F., Igumnov L. *Dynamics, Strength of Materials and Durability in Multiscale Mechanics*. Cham: Springer, 2021. 404 p. DOI: 10.1007/978-3-030-53755-5.

22. Altenbach H., Eremeyev V.A., Igumnov L.A. *Multiscale Solid Mechanics. Strength, Durability, and Dynamics*. Cham: Springer, 2021. 500 p. DOI: 10.1007/978-3-030-54928-2.

23. Erofeev V., Antonov A., Leonteva A., Malkhanov A. Rayleigh waves in the Cosserat half-space (reduced model) and half-space of damaged material. *Sixty Shades of Generalized Continua*. Cham: Springer, 2023. P. 153–163. DOI: 10.1007/978-3-031-26186-2_12.

24. Мурашкин Е.В., Радаев Ю.Н. Тензор силовых напряжений Схоутена и аффинорные плотности положительного веса. *Проблемы прочности и пластичности*. 2022. Т. 84. №4. С. 545–558. DOI: 10.32326/1814-9146-2022-84-4-545-558.

25. Мурашкин Е.В., Радаев Ю.Н. О квадратичных поправках определяющих уравнений для гемитропного микрополярного упругого тела. *Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. Физ.-мат. науки*. 2025. Т. 29. №2. С. 274–293. DOI: 10.14498/vsgtu2144.

26. Murashkin E.V., Radaev Y.N. Cubic approximation of stress potential for a hemitropic micropolar elastic solid. *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2025. Vol. 46. No 5. P. 2391–2400. DOI: 10.1134/S1995080225606514.

27. Схоутен Я.А. *Тензорный анализ для физиков*. М.: Наука, 1965. 456 с.

28. Synge J.L., Schild A. *Tensor Calculus*. Toronto: University of Toronto Press, 1949. 324 p.

29. Розенфельд Б.А. *Многомерные пространства*. М.: Наука, 1966. 648 с.

References

1. Gurevich G.B. *Osnovy teorii algebraicheskikh invariantov* [*Foundations of the Theory of Algebraic Invariants*]. Moscow. Leningrad. Gosudarstvennoe izdatelstvo tekhniko-teoreticheskoy literatury. 1948. 408 p. (In Russian).

2. Spencer A.J.M. *Theory of Invariants*. New York. London. Academic Press. 1977. 158 p.

3. Sushkevich A. K. *Osnovy vysshey algebry* [*Fundamentals of Higher Algebra*]. Moscow. Leningrad. ONTI. GRTTL Publ. 1937. 468 p. (In Russian).

4. Spencer A.J.M., Rivlin R.S. Isotropic integrity bases for vectors and second-order tensors: Part I. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. 1962. Vol. 9. P. 45–63. DOI: 10.1007/bf00253332.

5. Spencer A.J.M. Isotropic integrity bases for vectors and second-order tensors: Part II. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. 1965. Vol. 18. No 1. P. 51–82. DOI: 10.1007/bf00253982.

6. Zhilin P.A. *Ratsionalnaya mekhanika sploshnykh sred* [*Rational Mechanics of Continua*]. Saint Petersburg. Politekhnic unstitute Publ. 2012. 584 p. (In Russian).

7. Khaniki H.B., Ghayesh M.H., Chin R. et al. A review on the nonlinear dynamics of hyperelastic structures. *Nonlinear Dyn.* 2022. Vol. 110. P. 963–994. DOI: 10.1007/s11071-022-07700-3.

8. Eremeyev V.A., Lebedev L.P., Altenbach H. *Foundations of Micropolar Mechanics*. Heidelberg. Springer. 2012. 203 p.

9. Soldatos K.P. New trends in couple-stress hyperelasticity. *Math. Mech. Solids*. 2023. Vol. 30. Iss. 2. P. 174–201. DOI: 10.1177/10812865231177673.

10. Cosserat E., Cosserat F. *Théorie des corps déformables*. Paris. A. Hermann et fils. 1909. 226 p.

11. Dyszlewicz J. *Micropolar Theory of Elasticity.* Berlin. Springer. 1986. 386 p.

12. Günther W. Zur Statik und Kinematik des Cosseratschen Kontinuums. *Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft.* 1958. Vol. 10. P. 195–213.

13. Kessel S. Lineare Elastizitätstheorie des anisotropen Cosserat-Kontinuums. *Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft.* 1964. Vol. 16. P. 1–22.

14. Neuber H. Über Probleme der Spannungskonzentration im Cosserat-Körper. *Acta Mech.* 1966. Vol. 2. P. 48–69. DOI: 10.1007/bf01176729.

15. Neuber H. On the effect of stress concentration in Cosserat continua. *Mechanics of Generalized Continua.* Berlin. Heidelberg. Springer. 1968. P. 109–113.

16. Nowacki W. *Theory of Micropolar Elasticity.* Berlin. Springer. 1972. 483 p.

17. Nowacki W. *Theory of Asymmetric Elasticity*. Oxford. New York. Pergamon Press. 1986. 383 p.

18. Radaev Yu.N. Pravilo mnozhiteley v kovariantnykh formulirovkakh mikropolyarnykh teoriy mekhaniki kontinuuma [Multiplier rule in covariant formulations of micropolar theories of continuum mechanics]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya. Fiziko-matematicheskie nauki* [*Journal of Samara State Technical University. Ser. Physical and Mathematical Sciences*]. 2018. Vol. 22. No 3. P. 504–517 (In Russian).

19. Radaev Yu.N., Murashkin E.V. Psevdotenzornaya formulirovka mekhaniki gemitropnykh mikropolyarnykh sred [Pseudotensor formulation of the mechanics of hemitropic micropolar media]. *Problemy prochnosti i plastichnosti* [*Problems of Strength and Plasticity*]. 2020. Vol. 82. No 4. P. 399–412 (In Russian).

20. Altenbach J., Altenbach H., Eremeyev V.A. On generalized Cosserat-type theories of plates and shells: a short review and bibliography. *Arch. Appl. Mech.* 2010. Vol. 80. P. 73–92. DOI: 10.1007/s00419-009-0365-3.

21. dell'Isola F., Igumnov L. *Dynamics, Strength of Materials and Durability in Multiscale Mechanics*. Cham. Springer. 2021. 404 p. DOI: 10.1007/978-3-030-53755-5.

22. Altenbach H., Eremeyev V.A., Igumnov L.A. *Multiscale Solid Mechanics. Strength, Durability, and Dynamics*. Cham. Springer. 2021. 500 p. DOI: 10.1007/978-3-030-54928-2.

23. Erofeev V., Antonov A., Leonteva A., Malkhanov A. Rayleigh waves in the Cosserat half-space (reduced model) and half-space of damaged material. *Sixty Shades of Generalized Continua.* Cham. Springer. 2023. P. 153–163. DOI: 10.1007/978-3-031-26186-2_12.

24. Murashkin E.V., Radayev Yu.N. Tenzor silovykh napryazheniy Skhoutena i affinornye plotnosti polozhitelnogo vesa [Chouten's force stress tensor and affinor densities of positive weight]. *Problemy prochnosti i plastichnosti* [*Problems of Strength and Plasticity*]. 2022. Vol. 84. No 4. P. 545–558 (In Russian).

25. Murashkin E.V., Radayev Yu.N. O kvadratichnykh popravkakh opredelyayushchikh uravneniy dlya gemitropnogo mikropolyarnogo uprugogo tela [On quadratic corrections of constitutive equationsfor a hemitropic micropolar elastic solid]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya fiziko-matematicheskie nauki* [*Journal of Samara State Technical University. Ser. Physical and Mathematical Sciences*]. 2025. Vol. 29. No 2. P. 274–293 (In Russian).

26. Murashkin E.V., Radaev Y.N. Cubic approximation of stress potential for a hemitropic micropolar elastic solid. *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2025. Vol. 46. No 5. P. 2391–2400. DOI: 10.1134/S1995080225606514.

27. Chouten J.A. *Tensor Analysis for Physicists.* Oxford. Clarendon Press. 1951. 277 p.

28. Synge J.L., Schild A. *Tensor Calculus*. Toronto. University of Toronto Press. 1949. 324 p.

29. Rozenfeld B.A. *Mnogomernye prostranstva* [*Multidimensional Spaces*]. Moscow. Nauka. 1966. 648 p. (In Russian).

INTEGER RATIONAL HEMITROPIC CUBIC SEMIINVARIANTS FOR A SYSTEM OF TWO ASYMMETRIC SECOND RANK TENSORS

Murashkin E.V., Radayev Yu.N.

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia, Russian Federation

evmurashkin@gmail.com, radayev@ipmnet.ru

Received by the Editor 2025/10/13

The present study deals with absolute invariants and semi-invariants for a system comprising one second-rank tensor and one second-rank pseudotensor in three-dimensional space. Definitions are provided for individual and joint invariants as well as semi-invariants. The concepts of a complete irreducible set of invariants and semi-invariants are discussed. Several systems of individual invariants are presented, along with Newton's formulas that interrelate them. The notions of complete, incomplete, and irreducible sets of invariants are examined. The significance of the Cayley–Hamilton theorem for minimizing invariant sets via integral rational syzygies is emphasized. The concept of a pseudotensor is elucidated. The notions of a pseudoscalar unit and a scalar function that computes the algebraic weight of a pseudotensor are introduced. An algorithm is proposed for constructing a complete set of invariants of a prescribed integer order, followed by their renumbering. A complete irreducible set of individual and joint integral rational algebraic invariants and semi-invariants-comprising 9 quadratic and 28 cubic elements-is obtained for a system consisting of one tensor and one pseudotensor of second rank. The integral algebraic weights of the resulting pseudo-invariants are computed. Among these, the semi-invariants sensitive to mirror reflections and inversions of the three-dimensional ambient Euclidean space are singled out; there are 18 such semi-invariants in total: 1 linear, 3 quadratic, and 14 cubic. The specified set of 37 semi-invariants is subsequently employed to construct a cubic energetic form characterized by 37 constitutive scalars/pseudoscalars (9 linear and 28 quadratic) and the corresponding mathematical model of a nonlinear hemitropic micropolar elastic solid. The constitutive equations of the nonlinear hemitropic micropolar body, incorporating quadratic corrections, are derived.

Keywords: pseudotensor, micropolar hemitropic continuum, semi-invariant, constitutive pseudoscalar, nonlinear micropolar continuum, cubic energy form.