

УДК 534.131.2

DOI: 10.32326/1814-9146-2026-88-2-22-33

## ПРОСТРАНСТВЕННАЯ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНАЯ МОДЕЛЬ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

© 2026 г.

Куракин В.В., Григорьев В.Г.

*Московский авиационный институт (национальный  
исследовательский университет), Москва, Российская Федерация*

curackin.vlad@yandex.ru

*Поступила в редакцию 05.10.2025*

Выполнено моделирование собственных колебаний сжимаемой среды со свободной поверхностью в жесткой полости методом конечных элементов. Предложена полная математическая постановка задачи Штурма – Лиувилля на основе смешанного вариационного принципа, в том числе предложены выражения для слагаемых лагранжиана механической системы, учитывающих сжимаемость среды. Введен шестигранный восьмиузловой конечный элемент объема жидкости и четырехугольный четырехузловой конечный элемент свободной поверхности жидкости. Подробно изложен процесс интегрирования слагаемых, учитывающих сжимаемость среды, по введенной топологии конечного элемента объема жидкости с использованием квадратуры Гаусса – Лежандра. Получены выражения для матрицы масс и матрицы жесткости, соответствующие этим слагаемым. Кратко описан процесс получения выражений для остальных интегралов с использованием квадратуры Гаусса – Лежандра, формирующих самостоятельную задачу, не учитывающую сжимаемость среды. Приведено описание численного алгоритма нахождения частот и форм собственных колебаний. Приведены результаты численного эксперимента, реализованного на языке программирования C++ в среде Microsoft Visual Studio Community для исходных данных, подготовленных в среде табличного препроцессора Excel с использованием языка программирования Visual Basic for Application. Проведен краткий анализ графика зависимости первых трех собственных частот колебаний от скорости звука в среде. Показана непротиворечивость полученных результатов путем выполнения предельных переходов при стремлении скорости звука в среде к нулю и бесконечности. Выполнен краткий анализ третьей формы колебаний путем сравнения вертикального смещения свободной поверхности и избыточного давления на этой поверхности. Сделаны выводы о дальнейших перспективах использования реализованных алгоритмов в практических задачах.

*Ключевые слова:* сжимаемая жидкость, пространственная постановка, частотно-модальная задача, метод конечных элементов, смешанный вариационный принцип.

### **Введение**

Задачи статического деформирования, устойчивости и собственных колебаний конструкций, содержащих жидкость, в ряде случаев не требуют проведения решения

в пространственной постановке в силу наличия у рассматриваемой механической системы осевой симметрии [1–3]. Однако среди задач моделирования осесимметричных конструкций исключениями могут быть те задачи, в которых граничные условия не обладают осевой симметрией [4, 5]. В тяжелом машиностроении распространено применение полостей произвольной формы, содержащих жидкость [6], что также приводит к необходимости проведения решения именно в пространственной постановке.

В настоящей статье описан способ учета сжимаемости жидкой фазы в пространственной полости при проведении частотно-модального анализа методом конечных элементов. Сжимаемость характеризуется величиной избыточного давления, как и в ряде других статей по теме [7–10]. В отличие от статьи [11], в [12, 13] значительное внимание уделено явлению волнообразования на свободной поверхности.

Условия связи степеней свободы конечно-элементной модели сформулированы с использованием смешанного вариационного принципа и применяются в задачах механики сплошных сред, решаемых методом конечных элементов [14–17]. Соответствующие слагаемые функционала Лагранжа получены из интегралов движения жидкости [18, 19] аналогично тому, как это изложено в [20]. Численные алгоритмы реализованы на основании статьи [21].

### Постановка задачи

На рис. 1 изображена полость формы в виде прямоугольного параллелепипеда, частично заполненная жидкостью, и прямоугольная система координат. Введены обозначения геометрических многообразий:  $Q$  – объем жидкости,  $\Sigma$  – свободная поверхность жидкости. Боковые стенки и дно полости жесткие, их поведение не рассматривается.

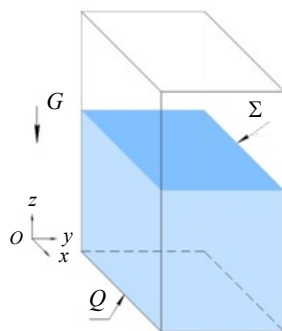


Рис. 1. Полость с жидкостью в декартовой системе координат

Введены обозначения степеней свободы, относительно которых проводится решение:  $\varphi$  – потенциал смещений точек объема жидкости,  $p$  – приращение давления в объеме жидкости в возмущенном движении,  $\delta$  – нормальное смещение точек свободной поверхности жидкости.

Жидкость представлена сплошной средой, сжимаемость учитывается, вязкость не учитывается. Принимается, что движение жидкости подчиняется гипотезе сплошности, а смещения ее свободной поверхности малы по сравнению с габаритами полости. Как было отмечено при введении степеней свободы, движение жидкости потенциально. Механическая система находится в однородном гравитационном поле интенсивностью  $\bar{G}$ , ортогональном поверхности  $\Sigma$  в невозмущенном состоянии.

В настоящей статье применение вариационного принципа смешанного типа основано на выражении функционала Лагранжа:

$$L = T_Q + T_\Sigma + T_p - V_\Sigma - V_p, \quad (1)$$

где  $T_Q$  – кинетическая энергия объема жидкости,  $T_\Sigma$  и  $T_p$  – кинематические условия связи степени свободы  $\phi$  со степенями свободы  $\delta$  и  $p$  соответственно,  $V_\Sigma$  – потенциальная энергия волнообразования на свободной поверхности,  $V_p$  – потенциальная энергия сжатия объема жидкости.

Выражения для описанных слагаемых имеют вид:

$$T_Q = -\frac{1}{2} \int_Q \rho (\nabla \dot{\phi})^2 dQ, \quad (2)$$

$$T_\Sigma = \int_\Sigma \rho \phi \dot{\delta} d\Sigma, \quad (3)$$

$$T_p = \int_Q \frac{1}{c^2} \dot{p} \dot{\phi} dQ, \quad (4)$$

$$V_\Sigma = \frac{1}{2} \int_\Sigma \rho G \delta^2 d\Sigma, \quad (5)$$

$$V_p = \frac{1}{2} \int_Q \frac{1}{\rho c^2} p^2 dQ, \quad (6)$$

где  $\rho$  – плотность жидкости,  $c$  – скорость звука в жидкости.

Функционал Гамильтона исследуемой механической системы имеет вид:

$$\Psi = \int_0^t L dt. \quad (7)$$

Условие стационарности гамильтониана (7) задает замкнутую постановку задачи Штурма – Лиувилля относительно введенных степеней свободы. Система дифференциальных уравнений в частных производных, соответствующая такой задаче, имеет вид:

$$\begin{cases} \left( \Delta \phi(\bar{r}, t) - \frac{1}{\rho c^2} p(\bar{r}, t) \right) \Big|_{\bar{r} \in Q} = 0, \\ \left( \ddot{\phi}(\bar{r}, t) + \frac{1}{\rho} p(\bar{r}, t) \right) \Big|_{\bar{r} \in Q} = 0, \\ \left( \dot{\phi}(\bar{r}, t) + G \cdot \delta(\bar{r}, t) \right) \Big|_{\bar{r} \in \Sigma} = 0, \\ \left. \frac{\partial \phi(\bar{r}, t)}{\partial \bar{n}(\bar{r})} \right|_{\bar{r} \in \Sigma} = \delta(\bar{r}, t). \end{cases} \quad (8)$$

Далее приведены основные выкладки относительно интегрирования представленных слагаемых лагранжиана.

### Интеграл потенциальной энергии сжатия объема жидкости

Объем жидкости  $Q$  моделируется множеством шестигранных восьмиузловых конечных элементов, все дальнейшие рассуждения касаются одного конечного

элемента. Интегрирование проведено для общего случая геометрии (выпуклый шестигранник), применяется переход к нормализованным изопараметрическим координатам, как показано на рис. 2.

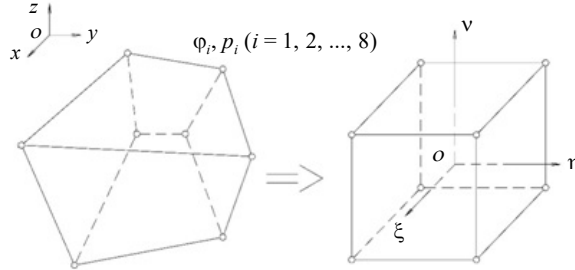


Рис. 2. Переход к нормализованным координатам конечного элемента объема жидкости

Каждому узлу элемента соответствует одна степень свободы  $\varphi$  и одна степень свободы  $p$ . Преобразование координат для этих степеней свободы может быть представлено таким образом (для пространственных координат – аналогично):

$$p = \sum_{i=1}^8 f_i p_i, \quad (9)$$

$$\varphi = \sum_{j=1}^8 f_j \varphi_j, \quad (10)$$

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \\ f_7 \\ f_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-\xi)(1-\eta)(1-\nu) \\ (1-\xi)(1+\eta)(1-\nu) \\ (1+\xi)(1+\eta)(1-\nu) \\ (1+\xi)(1-\eta)(1-\nu) \\ (1-\xi)(1-\eta)(1+\nu) \\ (1-\xi)(1+\eta)(1+\nu) \\ (1+\xi)(1+\eta)(1+\nu) \\ (1+\xi)(1-\eta)(1+\nu) \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Подынтегральное выражение при использовании такого подхода принимает вид:

$$p^2 = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \\ p_7 \\ p_8 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} f_1^2 & f_1 f_2 & \cdots & f_1 f_8 \\ f_1 f_2 & f_2^2 & \cdots & f_2 f_8 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_1 f_8 & f_2 f_8 & \cdots & f_8^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \\ p_7 \\ p_8 \end{pmatrix} = \bar{p}^T F \bar{p}. \quad (12)$$

Применяя условия постоянства плотности и скорости звука по объему среды, можно перейти к выражению:

$$V_p = \frac{1}{2\rho c^2} \int_{-1}^1 d\xi \int_{-1}^1 d\eta \int_{-1}^1 p^2 |\det J| dv, \quad (13)$$

где  $\det J$  – якобиан преобразования координат.

Интеграл находится численно с использованием квадратуры Гаусса – Лежандра [16] с двумя точками по каждой нормализованной координате:

$$V_p = \frac{1}{2\rho c^2} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 H_i H_j H_k (p^2 |\det J|) \Big|_{(\xi, \eta, v) = a((-1)^{i-1}, (-1)^{j-1}, (-1)^{k-1})}, \quad (14)$$

где  $H_i, H_j, H_k$  – весовые коэффициенты,  $a$  – координата точки Гаусса.

Матрица Якоби может быть представлена в виде:

$$J = \begin{pmatrix} J_{1x} + J_{1xv}v + J_{1x\eta}\eta + J_{1xv\eta}v\eta & J_{1y} + J_{1yv}v + J_{1y\eta}\eta + J_{1yv\eta}v\eta & J_{1z} + J_{1zv}v + J_{1z\eta}\eta + J_{1zv\eta}v\eta \\ J_{2x} + J_{2xv}v + J_{2x\xi}\xi + J_{2xv\xi}v\xi & J_{2y} + J_{2yv}v + J_{2y\xi}\xi + J_{2yv\xi}v\xi & J_{2z} + J_{2zv}v + J_{2z\xi}\xi + J_{2zv\xi}v\xi \\ J_{3x} + J_{3x\eta}\eta + J_{3x\xi}\xi + J_{3x\eta\xi}\eta\xi & J_{3y} + J_{3y\eta}\eta + J_{3y\xi}\xi + J_{3y\eta\xi}\eta\xi & J_{3z} + J_{3z\eta}\eta + J_{3z\xi}\xi + J_{3z\eta\xi}\eta\xi \end{pmatrix}, \quad (15)$$

где введенные коэффициенты вычисляются так (аналогично для  $u$  и  $z$ ):

$$\begin{pmatrix} J_{1x} \\ J_{1xv} \\ J_{1x\eta} \\ J_{1xv\eta} \\ J_{2x} \\ J_{2xv} \\ J_{2x\xi} \\ J_{2xv\xi} \\ J_{3x} \\ J_{3x\eta} \\ J_{3x\xi} \\ J_{3x\eta\xi} \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Исходя из выражения для  $V_p$ , можно найти матрицу жесткости сжатия жидкости

$$V_p = \frac{1}{2} \bar{p}^T K_p \bar{p}, \quad (17)$$

где  $K_p$  – искомая матрица:

$$K_p = \frac{1}{\rho c^2} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 H_i H_j H_k (F |\det J|) \Big|_{(\xi, \eta, v) = a((-1)^{i-1}, (-1)^{j-1}, (-1)^{k-1})}. \quad (18)$$

### Интеграл условия связи потенциала смещений и приращения давления

Методика взятия интеграла  $T_p$  аналогична изложенной в предыдущем пункте, принципиальное отличие заключается лишь в размерности получающейся матрицы масс в силу вида подынтегрального выражения:

$$\dot{p}\dot{\phi} = \begin{pmatrix} \bar{p} \\ \bar{\phi} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \Theta & F \\ F & \Theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{p} \\ \bar{\phi} \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Выражение для интеграла связи координат запишется в виде:

$$T_p = \frac{1}{c^2} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 H_i H_j H_k (\dot{p}\dot{\phi} | \det J) \Big|_{(\xi, \eta, \nu) = a((-1)^{i-1}, (-1)^{j-1}, (-1)^{k-1})}. \quad (20)$$

Выражение для матрицы масс, соответствующей этому интегралу:

$$M_p = \frac{1}{c^2} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 H_i H_j H_k \left( \begin{pmatrix} \Theta_{8 \times 8} & F \\ F & \Theta_{8 \times 8} \end{pmatrix} \Big| \det J \right) \Big|_{(\xi, \eta, \nu) = a((-1)^{i-1}, (-1)^{j-1}, (-1)^{k-1})}, \quad (21)$$

где  $\Theta_{8 \times 8}$  – нулевая матрица,  $F$  – матрица из формулы (12).

### Интегралы несжимаемой среды

Выражение лагранжиана, включающее в себя только оставшиеся слагаемые, может формировать самостоятельную задачу (полностью аналогичную рассматриваемой, но не учитывающей сжимаемость жидкости):

$$L = T_Q + T_\Sigma - V_\Sigma. \quad (22)$$

Кинетическая энергия объема жидкости интегрируется по той же топологии конечного элемента, какая была представлена в предыдущих пунктах:

$$T_Q = -\frac{\rho}{2} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 H_i H_j H_k ((\nabla \dot{\phi})^2 | \det J) \Big|_{(\xi, \eta, \nu) = a((-1)^{i-1}, (-1)^{j-1}, (-1)^{k-1})}. \quad (23)$$

Частная производная по времени от градиента потенциала смещения может быть представлена в виде:

$$\nabla \dot{\phi} = J^{-1} \begin{pmatrix} J_{1\phi} + J_{1\phi\nu}\nu + J_{1\phi\eta}\eta + J_{1\phi\nu\eta}\nu\eta \\ J_{2\phi} + J_{2\phi\nu}\nu + J_{2\phi\xi}\xi + J_{2\phi\nu\xi}\nu\xi \\ J_{3\phi} + J_{3\phi\eta}\eta + J_{3\phi\xi}\xi + J_{3\phi\eta\xi}\eta\xi \end{pmatrix}, \quad (24)$$

где все введенные коэффициенты представляются аналогично формуле (15).

Выражения связи координат и потенциальной энергии волнообразования интегрируются по поверхности  $\Sigma$ , представленной совокупностью четырехугольных четырехузловых конечных элементов. Переход к нормализованным изопараметрическим координатам для такого элемента представлен на рис. 3.

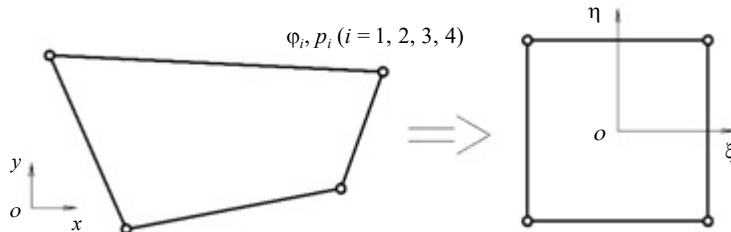


Рис. 3. Переход к нормализованным координатам для конечного элемента свободной поверхности

Методика интегрирования по такой топологии аналогична представленной для восьмиузлового элемента, поэтому, опуская промежуточные выкладки, окончательные выражения запишем в виде:

$$V_{\Sigma} = \frac{\rho G}{2} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 H_i H_j (\delta^2 |\det J|) \Big|_{(\xi, \eta)=a((-1)^{i-1}, (-1)^{j-1})}, \quad (25)$$

$$T_{\Sigma} = \rho \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 H_i H_j (\dot{\phi} \dot{\delta} |\det J|) \Big|_{(\xi, \eta)=a((-1)^{i-1}, (-1)^{j-1})}. \quad (26)$$

### Алгоритм численного решения задачи

Для решения поставленной задачи методом конечных элементов следует составить глобальный вектор степеней свободы  $\bar{q}$  и глобальные матрицы масс  $M$  и жесткостей  $K$  путем ассемблирования локальных матриц, полученных в предыдущих пунктах. Постановка частотно-модальной задачи относительно собственной частоты колебаний  $\omega$  имеет известный вид:

$$(K - \omega^2 M) \bar{q} = \bar{0}. \quad (27)$$

Для нахождения собственных частот применяется метод последовательностей Штурма [21], для этого к матрице системы линейных алгебраических уравнений (26) применяется модифицированное разложение Холецкого. Собственные формы находятся методом обратной итерации [21].

### Численный эксперимент

Были проведены ряд решений для следующих исходных данных: плотность жидкости  $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$ ; габариты части полости, заполненной жидкостью,  $2a_x = 3 \text{ м}$ ,  $2a_y = 2 \text{ м}$ ,  $a_z = 1 \text{ м}$ ; интенсивность гравитационного поля  $G = 9,81 \text{ м/с}^2$ ; скорость звука в жидкости  $c$  варьировалась от  $0,0001c_0$  до  $0,01c_0$ , где  $c_0 = 1440 \text{ м/с}$ . Регулярная конечно-элементная сетка состояла из 16, 11 и 6 узлов по координатам  $Ox$ ,  $Oy$  и  $Oz$  соответственно.

На рис. 4 представлены графики зависимостей первых трех частот собственных колебаний для различных вариантов значения  $c$ . Штриховыми линиями показаны значения собственных частот для несжимаемой среды (то есть при бесконечно большом  $c$ ), соответствующие упрощенной постановке задачи.

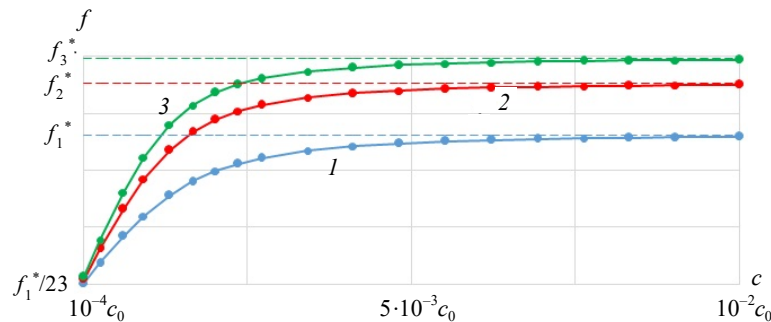


Рис. 4. Графики зависимостей первых трех частот собственных колебаний от скорости звука в среде (числами обозначены тоны колебаний)

Как можно заметить, значения собственных частот асимптотически сходятся к значениям для несжимаемой среды при увеличении  $c$ , сходимость монотонная. Такие результаты закономерны, так как при стремлении к бесконечности  $c$  слагаемые лагранжиана  $T_p$  и  $V_p$ , согласно формулам (4) и (6), стремятся к нулю и постановка становится эквивалентна упрощенной, не учитывающей сжимаемость жидкости. При стремлении  $c$  к нулю частоты собственных колебаний стремятся к нулю – это также ожидаемо, так как при бесконечно малой жесткости конструкции частоты собственных колебаний бесконечно малы.

Для варианта  $c = 0,01c_0$  на рис. 5 представлена третья форма собственных колебаний – графики зависимостей вертикального смещения свободной поверхности и избыточного давления на свободной поверхности соответственно от координат  $x$  и  $y$ . Как можно заметить, графики совпадают с точностью до постоянного множителя  $\rho G$ . Это согласуется с утверждением из [20], что при учете сжимаемости среды избыточное давление в каждой точке свободной поверхности равняется гидростатическому давлению при значении высоты, равном вертикальному смещению в этой точке.

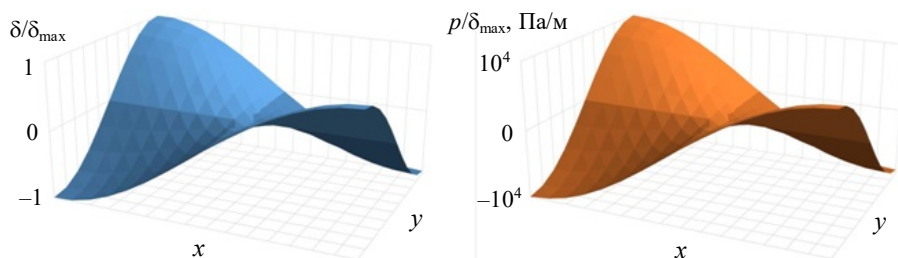


Рис. 5. Графики зависимостей от координат  $x$  и  $y$  вертикального смещения (слева) и избыточного давления (справа) на свободной поверхности

### Заключение

Предложенная математическая модель сжимаемой среды характеризуется лаконичной и в то же время строгой постановкой. Следствием этого являются непротиворечивые результаты проведенного численного эксперимента как для собственных частот при стремлении к нулю и бесконечности, так и для собственной формы на примере третьего тона колебаний. Представлены графики собственной формы третьей формы колебаний, так как первая и вторая соответствуют одной полуволне на свободной поверхности вдоль координаты  $x$  и  $y$  соответственно и могут быть найдены в двумерной постановке в отличие от третьей, соответствующей одной полуволне в каждом из двух направлений.

Использованный алгоритм может быть применен для прочностного анализа конструкций тяжелого машиностроения, требующих пространственной постановки.

### Список литературы

1. Elaikh T.H. Free vibration of axisymmetric thin oblate shells containing fluid. *Thi-Qar University Journal for Engineering Sciences*. 2010. Vol. 1. No 1. P. 63–81. <https://doi.org/10.31663/utjes.v1i1.127>.
2. Ayaz O., Noori A.R., Sivri B., Temel B. Static analysis of axisymmetric thin cylindrical shell using the complementary functions method. *Konya Journal of Engineering Sciences*. 2025. Vol. 13. No 2. P. 510–523. DOI: 10.36306/konjes.1606387.

3. Кашфугдинов Б.Д., Щеглов Г.А. Валидация свободного программного обеспечения Code\_Aster применительно к задаче модального анализа цилиндрической оболочки с жидкостью. *Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана*. Электронный журнал. 2017. №06. С. 101–117. DOI: 10.7463/0617.0001170.
4. Amabili M., Paidoussis M.P., Lakis A.A. Vibrations of partially filled cylindrical tanks with ring-stiffeners and flexible bottom. *Journal of Sound and Vibration*. 1998. Vol. 213. Iss. 2. P. 259–299. DOI: 10.1006/jsvi.1997.1481.
5. Khudainazarov S., Mavlanov T., Sabirjanov T., Donayev B. Investigation of natural vibrations of thin-walled structures interacting with fluid. *E3S Web of Conferences*. 2023. Vol. 402. No 5. P. 07011-1–07011-12. <https://doi.org/10.1051/e3sconf/202340207011>.
6. Грачев С.В., Смагин Д.С., Савельев Р.С., Напреенко К.С., Зинина А.И. Концепция моделирования топливной системы с учетом требований сертификации. *Computational Nanotechnology*. 2020. Т. 7. №3. С. 45–51. DOI: 10.33693/2313-223X-2020-7-3-45-51.
7. Bochkarev S.A., Lekomtsev S.V., Senin A.N. Natural vibrations and stability of loaded cylindrical shells partially filled with fluid, taking into account gravitational effects. *Thin-Walled Structures*. 2021. Vol. 164. P. 107867-1–107867-6. DOI: 10.1016/j.tws.2021.107867.
8. Bochkarev S.A., Lekomtsev S.V. Analysis of natural vibration of truncated conical shells partially filled with fluid. *International Journal of Mechanical System Dynamics*. 2024. Vol. 4. No 2. P. 142–152. DOI: 10.1002/msd2.12105.
9. Бочкарев С.А., Лекомцев С.В., Сенин А.Н. Численное моделирование собственных колебаний частично заполненных жидкостью коаксиальных оболочек с учетом эффектов на свободной поверхности. *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*. 2022. №1. С. 23–35. DOI: 10.15593/perm.mech/2022.1.03.
10. Лекомцев С.В., Матвеев В.П. Собственные колебания композитных эллиптических цилиндрических оболочек с жидкостью. *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика*. 2024. Т. 24. Вып. 1. С. 71–85. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-1-71-85>.
11. Bochkarev S.A., Lekomtsev S.V., Matveenko V.P. Natural vibrations of truncated conical shells containing fluid. *Mechanics of Solids*. 2022. Vol. 57. Iss. 8. P. 1971–1986. DOI: 10.3103/S0025654422080064.
12. Bochkarev S.A., Kamenskikh A.O., Lekomtsev S.V. Experimental investigation of natural and harmonic vibrations of plates interacting with air and fluid. *Ocean Engineering*. 2020. Vol. 206. P. 107341-1–107341-12. DOI: 10.1016/j.oceaneng.2020.107341.
13. Iurlov M.A., Kamenskikh A.O., Lekomtsev S.V., Matveenko V.P. Passive suppression of resonance vibrations of a plate and parallel plates assembly, interacting with a fluid. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*. 2022. Vol. 22. No 9. P. 2250101-1 – 2250101-21. DOI: 10.1142/S0219455422501012.
14. Клочков Ю.В., Николаев А.П., Вахнина О.В., Клочков М.Ю., Дюкина Н.С. Расчет оболочек на основе смешанного варианта МКЭ с тензорно-векторной аппроксимацией искомых величин. *Проблемы прочности и пластичности*. 2024. Т. 86. №1. С. 26–35. DOI: <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2024-86-1-26-35>.
15. Клочков М.Ю., Николаев А.П., Клочков Ю.В., Вахнина О.В., Дюкина Н.С. Упруго-пластическое деформирование тонкостенных конструкций в двумерной постановке на основе смешанного МКЭ. *Проблемы прочности и пластичности*. 2025. Т. 87. №1. С. 113–121. DOI: 10.32326/1814-9146-2025-87-1-113-121.
16. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Nithiarasu P. *The Finite Element Method for Fluid Dynamics*. Butterworth-Heinemann, Elsevier, 2014. 544 p.
17. Коннор Дж., Бреббия К. *Метод конечных элементов в механике жидкости*. Л.: Судостроение, 1979. 264 с.
18. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Теоретическая физика. В 10 т. Т. VI. Гидродинамика*. М.: Физматлит, 2001. 736 с.
19. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. *Теоретическая гидромеханика. Ч. I. М.*: Государственное издательство физико-математической литературы, 1963. 585 с.

20. Горшков А.Г., Морозов В.И., Пономарев А.Т., Шклярчук Ф.Н. *Аэрогидроупругость конструкций*. М.: Физматлит, 2000. 592 с.

21. Gupta K.K. Solution of eigenvalue problems by Sturm sequence method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1972. Vol. 4. P. 379–404. DOI: 10.1002/nme.1620040308.

#### References

1. Elaikh T.H. Free vibration of axisymmetric thin oblate shells containing fluid. *Thi-Qar University Journal for Engineering Sciences*. 2010. Vol. 1. No 1. P. 63–81. <https://doi.org/10.31663/utjes.v1i1.127>.

2. Ayaz O., Noori A.R., Sivri B., Temel B. Static analysis of axisymmetric thin cylindrical shell using the complementary functions method. *Konya Journal of Engineering Sciences*. 2025. Vol. 13. No 2. P. 510–523. DOI: 10.36306/konjes.1606387.

3. Kashfutdinov B.D., Shcheglov G.A. Validatsiya svobodnogo programmno obespecheniya Code\_Aster primenitelno k zadache modalnogo analiza tsilindricheskoy obolochki s zhidkostyu [Validation of the open source Code\_Aster software used in the modal analysis of the fluid-filled cylindrical shell]. *Nauka i obrazovanie. MGTU imeni N.E. Baumana. Elektronnyy zhurnal [Science and Education. Bauman Moscow State Technical University. Electronic Journal]*. 2017. No 06. P. 101–117 (In Russian).

4. Amabili M., Paidoussis M.P., Lakis A.A. Vibrations of partially filled cylindrical tanks with ring-stiffeners and flexible bottom. *J. Sound Vib*. 1998. Vol. 213. Iss. 2. P. 259–299. DOI: 10.1006/jsvi.1997.1481.

5. Khudainazarov S., Mavlanov T., Sabirjanov T., Donayev B. Investigation of natural vibrations of thin-walled structures interacting with fluid. *E3S Web of Conferences*. 2023. Vol. 402. No 5. P. 07011-1–07011-12. <https://doi.org/10.1051/e3sconf/202340207011>.

6. Grachev S.V., Smagin D.S., Savelev R.S., Napreenko K.S., Zinina A.I. Kontseptsiya modelirovaniya toplivnoy sistemy s uchetoм trebovaniy sertifikatsii [The concept of fuel system's mathematical modeling based on certification requirements]. *Computational Nanotechnology*. 2020. Vol. 7. No 3. P. 45–51 (In Russian).

7. Bochkarev S.A., Lekomtsev S.V., Senin A.N. Natural vibrations and stability of loaded cylindrical shells partially filled with fluid, taking into account gravitational effects. *Thin-Walled Struct*. 2021. Vol. 164. P. 107867-1–107867-6. DOI: 10.1016/j.tws.2021.107867.

8. Bochkarev S.A., Lekomtsev S.V. Analysis of natural vibration of truncated conical shells partially filled with fluid. *International Journal of Mechanical System Dynamics*. 2024. Vol. 4. No 2. P. 142–152. DOI: 10.1002/msd2.12105.

9. Bochkarev S.A., Lekomtsev S.V., Senin A.N. Chislennoe modelirovanie sobstvennykh kolebaniy chastichno zapolnennykh zhidkostyu koaksialnykh obolochek s uchetoм effektov na svobodnoy poverkhnosti [Numerical modeling of natural vibrations of coaxial shells partially filled with fluid, taking into account the effects on the free surface]. *Vestnik Permskogo natsionalnogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mekhanika [PNRPU Mechanics Bulletin]*. 2022. No 1. P. 23–35 (In Russian).

10. Lekomtsev S.V., Matveenko V.P. Sobstvennye kolebaniya kompozitnykh ellipticheskikh tsilindricheskikh obolochek s zhidkostyu [Natural vibration of composite elliptical cylindrical shells filled with fluid]. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya: Matematika. Mekhanika. Informatika [Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics]*. 2024. Vol. 24. Iss. 1. P. 71–85 (In Russian).

11. Bochkarev S.A., Lekomtsev S.V., Matveenko V.P. Natural vibrations of truncated conical shells containing fluid. *Mechanics of Solids*. 2022. Vol. 57. Iss. 8. P. 1971–1986. DOI: 10.3103/S0025654422080064.

12. Bochkarev S.A., Kamenskikh A.O., Lekomtsev S.V. Experimental investigation of natural and harmonic vibrations of plates interacting with air and fluid. *Ocean Engineering*. 2020. Vol. 206. P. 107341-1–107341-12. DOI: 10.1016/j.oceaneng.2020.107341.

13. Iurlov M.A., Kamenskikh A.O., Lekomtsev S.V., Matveenko V.P. Passive suppression of resonance vibrations of a plate and parallel plates assembly, interacting with a fluid. *In-*

*ternational Journal of Structural Stability and Dynamics*. 2022. Vol. 22. No 9. P. 2250101-1 – 2250101-21. DOI: 10.1142/S0219455422501012.

14. Klochkov Yu.V., Nikolaev A.P., Vakhnina O.V., Klochkov M.Yu., Dyukina N.S. Raschet obolochek na osnove smeshannogo varianta MKE s tenzorno-vektornoy approksimatsiyey iskomykh velichin [Calculation of shells based on the mixed fem variant with tensor-vector approximation of the desired values]. *Problemy prochnosti i plastichnosti* [*Problems of Strength and Plasticity*]. 2024. Vol. 86. No 1. P. 26–35 (In Russian).

15. Klochkov M.Yu., Nikolaev A.P., Klochkov Yu.V., Vakhnina O.V., Dyukina N.S. Uprugoplasticheskoe deformirovanie tonkostennykh konstruksiy v dvumernoy postanovke na osnove smeshannogo MKE [Elastic-plastic deformation of thin-walled structures in two-dimensional statement based on mixed FEM]. *Problemy prochnosti i plastichnosti* [*Problems of Strength and Plasticity*]. 2025. Vol. 87. No 1. P. 113–121 (In Russian).

16. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Nithiarasu P. *The Finite Element Method for Fluid Dynamics*. Butterworth-Heinemann. Elsevier. 2014. 544 p.

17. Connor J.J., Brebbia C.A. *Finite Element Techniques for Fluid Flow*. London. Boston. Newnes-Butterworth. 1977. 317 p.

18. Landau L.D., Lifshits E.M. *Course of Theoretical Physics. Vol. 6. Fluid Mechanics*. Oxford. New York. Pergamon Press. 1987. 558 p.

19. Kochin N.E., Kibel I.A., Roze N.V. *Teoreticheskaya gidromekhanika. Chast I* [*Theoretical Hydromechanics. Part I*]. Moscow. Gosudarstvennoe izdatelstvo fiziko-matematicheskoy literatury. 1963. 585 p. (In Russian).

20. Gorshkov A.G., Morozov V.I., Ponomarev A.T., Shklyarchuk F.N. *Aerogidrouprugost konstruksiy* [*Aeroelasticity of Structures*]. Moscow. Fizmatlit Publ. 2000. 592 p. (In Russian).

21. Gupta K.K. Solution of eigenvalue problems by Sturm sequence method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1972. Vol. 4. P. 379–404. DOI: 10.1002/nme.1620040308.

### THREE-DIMENSIONAL FINITE ELEMENT MODEL OF A COMPRESSIBLE FLUID WITH A FREE SURFACE

**Kurakin V.V., Grigor'ev V.G.**

*Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russian Federation*

curackin.vlad@yandex.ru

*Received by the Editor 2025/10/05*

The finite element method is used to simulate natural oscillations of a compressible fluid with a free surface in a rigid cavity. A brief review of the literature on the topic is performed, and the relevance of the study is substantiated. A complete mathematical formulation of the Sturm – Liouville problem is proposed based on the mixed variational principle, including expressions for the terms of the Lagrangian of a mechanical system that take into account the compressibility of the fluid. A hexagonal eight-node finite element of the liquid volume and a quadrangular four-node finite element of the free surface of the liquid are injected. The process of integrating the terms that take into account the compressibility of the medium over the introduced topology of the finite element of the liquid volume using the Gauss – Legendre quadrature is described in detail. Expressions for the mass matrix and the stiffness matrix corresponding to these terms are obtained. The process of obtaining expressions for the remaining integrals using the Gauss – Legendre quadrature, which form an independent problem that does not take into account the compressibility of the fluid, is briefly described. A description of the numerical algorithm for finding the frequencies and forms of natural oscillations is given. The results of a numerical experiment implemented in the C++ programming language in the Microsoft Visual Studio

Community environment are presented for the initial data prepared in the Excel table preprocessor environment using the Visual Basic for Application programming language. A brief analysis of the graph of the dependence of the first three natural oscillation frequencies on the speed of sound in the fluid is performed. The consistency of the results obtained by performing limit transitions as the speed of sound in the liquid tends to zero and infinity is shown. A brief analysis of the third oscillation form is performed by comparing the vertical displacement of the free surface and the excess pressure on this surface. Conclusions are made about the further prospects for using the implemented algorithms in practical problems.

*Keywords:* compressible fluid, three-dimensional setting of the problem, eigenvalue problem, finite element method, mixed variation principle.