

УДК 539.375

DOI: 10.32326/1814-9146-2026-88-2-5-21

ВЫЧИСЛЕНИЕ T -НАПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ ОСНОВНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ОБРАЗЦОВ МЕХАНИКИ РАЗРУШЕНИЯ

© 2026 г.

Перова О.С., Лавит И.М.

Тульский государственный университет, Тула, Российская Федерация

o.s.perova@yandex.ru, igorlavit@yandex.ru

Поступила в редакцию 22.09.2025

Усовершенствованные критерии продвижения трещины, разработанные в последние десятилетия, включают в себя несингулярные составляющие тензора напряжений. Численные методы для их вычисления немногочисленны и сложны. Предлагаемый метод не требует изменений основы вычислительного процесса – метода конечных элементов. Суть его та же, что и у известного расширенного метода конечных элементов (extended finite element method). Он состоит в добавлении к обычным координатным функциям метода конечных элементов (функциям формы) координатных функций, явно моделирующих сингулярность поля напряжений в кончике трещины. В предложенном методе, в отличие от расширенного метода конечных элементов, эти функции одинаковы для всех элементов, что обеспечивает межэлементную непрерывность поля перемещений. Коэффициенты интенсивности напряжений включаются в число варьируемых параметров, поэтому они находятся при решении разрешающей системы линейных алгебраических уравнений без каких-либо дополнительных вычислительных процедур. Вычисление несингулярных компонент тензора напряжений (для некогезионной трещины это T -напряжение) также не требует привлечения специальных методов, например, метода разделения напряжений. Таким образом, представленный метод является по существу объединением классического метода конечных элементов и классического метода Ритца – Галеркина. Проблемы при его применении возникают, если на граничном контуре заданы главные граничные условия, которым не удовлетворяют координатные функции, моделирующие сингулярность. Однако решение находится, если удовлетворять этим условиям только в узлах конечно-элементной сетки, лежащих на граничном контуре (точках коллокации). При этом реакции связей рассматриваются как активные силы и включаются в число искомым неизвестных задачи. Применение метода проиллюстрировано примерами решения задач для компактного образца на растяжение и трехточечного изгибного образца. Результаты расчетов сопоставляются с результатами других исследователей.

Ключевые слова: разрушение, трещина, компактный образец, трехточечный изгибный образец, T -напряжение.

Введение

В последние десятилетия критерии роста трещины, использующие коэффициенты интенсивности напряжений, дополняются за счет учета несингулярных составляющих тензора напряжений в окрестности кончика трещины [1, 2]. Так, например, в статьях [3, 4] исследовалось влияние этих составляющих на устойчивость траектории трещины, а в [5, 6] – их влияние на форму пластической области вокруг кончика трещины. В [7] показано, что их учет необходим для нахождения траекторий усталостных трещин. В [8] предложен новый критерий, определяющий направление роста трещин в условиях сжатия. Этот критерий включает в себя упомянутые составляющие тензора напряжений. Их влияние на траекторию трещины исследовано в [9]. Проблеме уточнения разложений в ряды этих составляющих посвящены статьи [10, 11].

Для вычисления несингулярных составляющих напряжений, так же, как и для вычисления коэффициентов интенсивности напряжений, используются различные численные методы [2, 12]. Наиболее универсальным, простым и надежным является, по-видимому, метод конечных элементов. Функции формы обычных конечных элементов – это многочлены невысокого порядка. Поэтому точность аппроксимации такими элементами полей напряжений в окрестности кончика трещины невысока. Несмотря на это, они с успехом применяются для решения задач линейной механики разрушения. Дело в том, что коэффициент интенсивности напряжений K_I [13] (этой величины обычно достаточно для анализа условий начала роста трещины) можно найти, вычислив J -интеграл [13]. Так как J -интеграл не зависит от положения контура интегрирования [13], естественно выбрать этот контур на большом расстоянии от кончика трещины. Следовательно, можно не заботиться о высокой точности определения напряжений около кончика трещины.

Но для решения задачи определения несингулярных составляющих напряжений в кончике трещины необходимо весьма точно рассчитывать напряжения в этой зоне. Поэтому нужно модифицировать метод конечных элементов, чтобы правильно моделировать асимптотику поля напряжений. Это было сделано Барсоумом [14, 15]. Конечный элемент Барсоума получается из четырехугольного изопараметрического элемента второго порядка [16] сдвигом трех узлов одной его стороны в кончик трещины. Примыкающие к ним узлы сдвигаются к кончику трещины на $1/4$ длины стороны. Элементы Барсоума точно моделируют асимптотику напряжений и оказываются совместными с обычными изопараметрическими элементами второго порядка.

Возможны и другие подходы к моделированию сингулярности, которые сочетаются с методом конечных элементов. Так, Хилтон и Сих [17] предложили метод, суть которого в том, что кончик трещины рассматривается как центр круга малого радиуса. Внутри круга справедливо асимптотическое решение, а внешность круга разбивается на конечные элементы. Получаются две задачи: внутренняя и внешняя. На граничной окружности их решения должны совпадать, и этому требованию можно удовлетворить с той или иной точностью. Аналогичный метод предложен в статьях [18, 19]. Метод Хилтона и Сиха был усовершенствован в [20].

Однако вычисление несингулярных составляющих тензора напряжений в кончике трещины оказывается при использовании упомянутых методов непростой задачей. Необходимо из полученного сингулярного решения вычлест асимптотическое решение, то есть численно раскрыть неопределенность $\infty - \infty$. Метод решения этой задачи предложен в статьях [21, 22]. Другой метод предложен Кфури в [23].

Можно подойти к решению проблемы уточнения напряженного состояния в окрестности кончика трещины по-другому. К обычным функциям формы элемента добавляются функции, моделирующие сингулярность поля напряжений в кончике трещины. Такой метод, получивший название «расширенный метод конечных элементов», был предложен в [24, 25]. Обзор результатов его применения можно найти в статье [26]. В этом методе функции формы, отвечающие за сингулярность, добавляются в элементы, примыкающие к кончику трещины (обогащенные элементы). Очевидным недостатком метода являются разрывы поля перемещений на границах между обогащенными и обычными конечными элементами. Эти разрывы вносят непредказуемую погрешность в решение задачи.

Предлагаемый метод близок к расширенному методу конечных элементов. Его основное отличие в том, что функции, моделирующие сингулярность, добавляются во все конечные элементы. Эти функции одни и те же. Тем самым обеспечивается межэлементная непрерывность поля перемещений. При этом конечные элементы могут быть любыми. Этот метод можно рассматривать как комбинацию классического метода конечных элементов и классического метода Ритца – Галеркина [27]. Координатные функции включают в себя как функции с компактными носителями – конечными элементами, так и функции, имеющие единое аналитическое выражение во всей области.

Основные соотношения метода и некоторые его применения опубликованы в [28, 29]. Но вычисление несингулярных напряжений в кончике трещины этим методом ранее не рассматривалось. Ниже метод излагается в необходимой полноте. Он, так же, как и расширенный метод конечных элементов, применим, в принципе, к несимметричным задачам и даже к задачам роста криволинейной трещины без необходимости перестраивать сетку конечных элементов. Однако рассмотрение общего случая неоправданно усложнит изложение. Поэтому в настоящей статье приведено решение предложенным методом задачи о трещине нормального разрыва, что позволило представить суть метода компактно и без потери общности. Наиболее важным приложением метода являются задачи для основных экспериментальных образцов механики разрушения: трехточечного изгибного образца (SENB) и компактного образца на растяжение (CT), так как именно на этих образцах проходит проверка согласования теории с экспериментом. Решения этих задач подробно излагаются ниже.

1. Постановка задачи

Рассматривается плоская деформация линейно упругого тела [30]. Поперечное сечение тела S , ограниченное контуром L , изображено на рис. 1. Сечение ослаблено прямолинейной трещиной длиной a . К контуру сечения приложена распределенная нагрузка p . Кромки трещины предполагаются ненагруженными. Сечение и нагрузка симметричны относительно оси абсцисс. Таким образом, исследуемая трещина относится к типу трещин нормального разрыва [13]. Так как ось абсцисс является осью симметрии задачи, ниже рассматривается только верхняя часть поперечного сечения $y \geq 0$.

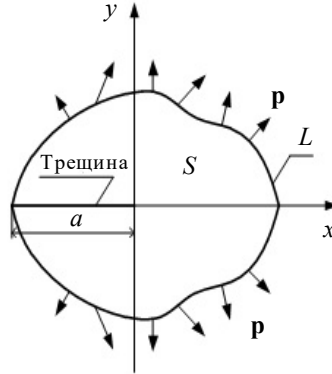


Рис. 1. Поперечное сечение тела

Математическая модель основана на известных соотношениях теории упругости, записываемых как [30]:

$$\begin{aligned} \partial_m \sigma_{km} &= 0, \quad \varepsilon_{km} = \frac{\partial_k u_m + \partial_m u_k}{2}, \\ \sigma_{km} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [\nu \varepsilon_{ii} \delta_{km} + (1-2\nu) \varepsilon_{km}], \quad i, k, m = 1, 2; \quad \partial_k = \frac{\partial}{\partial x_k}, \end{aligned} \quad (1)$$

где $u_k(x_m)$ – поле перемещений, ε_{km} – тензор деформаций, σ_{km} – тензор напряжений, E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона, δ_{km} – символ Кронекера. Далее будем также использовать обозначения:

$$x = x_1, \quad y = x_2, \quad u = u_1, \quad v = u_2. \quad (2)$$

Решение уравнения равновесия (первое уравнение системы (1)) должно удовлетворять граничным условиям. Граничные условия могут быть либо главными (кинематическими), либо естественными (статическими) [27].

Пусть r, θ – полярные координаты точки:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta. \quad (3)$$

В окрестности кончика трещины ($r \rightarrow 0$) напряжения представляются в виде:

$$\sigma_{km} = \sigma_{km}^{(0)} + \sigma_{km}^{(1)} + O(\sqrt{r}), \quad (4)$$

где $\sigma_{km}^{(0)}$ – сингулярные составляющие тензора напряжений; $\sigma_{km}^{(1)}$ – несингулярные составляющие, отличные от нуля в кончике трещины. Напряжения $\sigma_{km}^{(0)}$ и соответствующие им деформации и перемещения записываются в виде [13]:

$$\begin{aligned} \sigma_{km}^{(0)} &= K_I \sigma_{km}^*, \quad u_k^{(0)} = K_I u_k^*, \quad \varepsilon_{km}^{(0)} = K_I \varepsilon_{km}^*. \\ \sigma_{11}^* &= \sigma_{xx}^* = \frac{\cos(\theta/2)}{\sqrt{2\pi r}} \left[1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right], \\ \sigma_{12}^* &= \sigma_{xy}^* = \frac{\cos(\theta/2) \sin(\theta/2) \cos(3\theta/2)}{\sqrt{2\pi r}}, \\ \sigma_{22}^* &= \sigma_{yy}^* = \frac{\cos(\theta/2)}{\sqrt{2\pi r}} \left[1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11}^* &= \frac{1+\nu}{E}[(1-\nu)\sigma_{11}^* - \nu\sigma_{22}^*], & \varepsilon_{22}^* &= \frac{1+\nu}{E}[(1-\nu)\sigma_{22}^* - \nu\sigma_{11}^*], \\ \varepsilon_{12}^* &= \frac{1+\nu}{E}\sigma_{12}^*, & u_1^* = u^* &= \frac{1+\nu}{E}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}(\kappa - \cos\theta)\cos\frac{\theta}{2}, \\ u_2^* = v^* &= \frac{1+\nu}{E}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}(\kappa - \cos\theta)\sin\frac{\theta}{2},\end{aligned}\quad (5)$$

где для плоской деформации $\kappa = 3 - 4\nu$. Вследствие непрерывности напряжений $\sigma_{km}^{(1)}$

$$\sigma_{12}^{(1)} = \sigma_{22}^{(1)} = 0, \quad \sigma_{11}^{(1)} = T, \quad (6)$$

где величина T , называемая T -напряжением [1], определяется в процессе решения задачи. Для оценки несингулярных напряжений в кончике трещины П. Ливерс и Дж. Радон [31] предложили безразмерный параметр B , названный ими двухосевым отношением (параметр двухосности [1]):

$$B = T \frac{\sqrt{\pi a}}{K_I}. \quad (7)$$

Таким образом, целью решения задачи является определение K_I и B .

2. Метод решения задачи

Слабое решение задачи [27] получается из принципа виртуальных работ [30]:

$$\int_S \sigma_{km} \delta \varepsilon_{km} dS = \int_L p_k \delta u_k dL, \quad (8)$$

где δ – символ вариации. Уравнение (8) эквивалентно уравнению равновесия (1) и естественным граничным условиям. Решение уравнения (8) ищется в классе функций, удовлетворяющих главным граничным условиям. При этом вариации перемещений на участках граничного контура, где заданы главные граничные условия, равны нулю.

Для решения задачи применяется метод конечных элементов. В исследовании использовались изопараметрические конечные элементы первого порядка, которые в глобальных координатах x, y представляют собой произвольные выпуклые четырехугольники [16]. В локальных координатах ξ, η все элементы одинаковы (рис. 2).

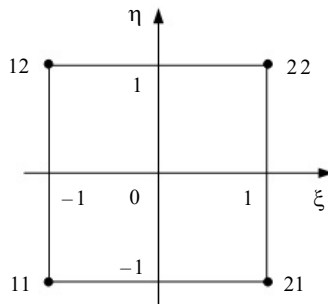


Рис. 2. Конечный элемент в локальных координатах – квадрат, узлы имеют двойную нумерацию

Рассмотрим интегрирование в уравнении (8) по одному элементу. Глобальные координаты точек элемента определяются формулами:

$$x = L_i(\xi)L_j(\eta)X_{ij}, \quad y = L_i(\xi)L_j(\eta)Y_{ij}, \quad (9)$$

$$i, j = 1, 2; \quad \xi, \eta \in [-1, 1],$$

где X_{ij}, Y_{ij} – известные глобальные координаты узла с номером ij ; $L_l(\zeta)$ – интерполяционные полиномы Лагранжа, которые имеют вид:

$$L_1(\zeta) = 0,5(1 - \zeta), \quad L_2(\zeta) = 0,5(1 + \zeta), \quad \zeta \in [-1, 1]. \quad (10)$$

Для перемещений точек элемента используются те же функции формы, что и для координат. Но для точного моделирования асимптотик перемещений и напряжений к ним добавляются составляющие, определенные равенствами (5). Таким образом, получаем:

$$u = L_i(\xi)L_j(\eta)U_{ij} + K_I u^*, \quad v = L_i(\xi)L_j(\eta)V_{ij} + K_I v^*. \quad (11)$$

Принципиальным отличием рассматриваемого метода от расширенного метода конечных элементов является то, что вторые слагаемые добавляются в выражения перемещений во все конечные элементы. За счет этого обеспечивается межэлементная непрерывность поля перемещений. Конечно, теперь величины U_{ij}, V_{ij} не являются узловыми перемещениями. Это просто неизвестные коэффициенты при координатных функциях. К ним добавляется еще и коэффициент K_I .

Приведенных соотношений достаточно, чтобы выполнить интегрирование уравнения (8) по элементу. Интеграл от левой части получается в виде:

$$\begin{aligned} & \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \{ [(1-\nu)c_{ijmn}^{(1)} + 0,5(1-2\nu)c_{ijmn}^{(2)}]U_{mn} + \\ & + (\nu c_{ijmn}^{(3)} + 0,5(1-2\nu)c_{mnij}^{(3)})V_{mn} \} \delta U_{ij} + [(\nu c_{mnij}^{(3)} + 0,5(1-2\nu)c_{ijmn}^{(3)})U_{mn} + \\ & + ((1-\nu)c_{ijmn}^{(2)} + 0,5(1-2\nu)c_{ijmn}^{(1)})V_{mn}] \delta V_{ij} \} + (d_{ij11}^{(1)} + d_{ij12}^{(2)})K_I \delta U_{ij} + \\ & + (d_{ij22}^{(2)} + d_{ij12}^{(1)})K_I \delta V_{ij} + \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)} [((1-\nu)e_{mn11}^{(1)} + \nu e_{mn22}^{(1)} + (1-2\nu)e_{mn12}^{(2)})U_{mn} + \\ & + ((1-\nu)e_{mn22}^{(2)} + \nu e_{mn11}^{(2)} + (1-2\nu)e_{mn12}^{(1)})V_{mn}] \delta K_I + gK_I \delta K_I, \quad (12) \end{aligned}$$

где обозначено:

$$\begin{aligned} c_{ijmn}^{(1)} &= \int_S \Phi_{ij} \Phi_{mn} dS, \quad c_{ijmn}^{(2)} = \int_S F_{ij} F_{mn} dS; \quad c_{ijmn}^{(3)} = \int_S \Phi_{ij} F_{mn} dS, \\ d_{ijmn}^{(1)} &= \int_S \Phi_{ij} \sigma_{mn}^* dS, \quad d_{ijmn}^{(2)} = \int_S F_{ij} \sigma_{mn}^* dS, \quad e_{ijmn}^{(1)} = \int_S \Phi_{ij} \varepsilon_{mn}^* dS, \\ e_{ijmn}^{(2)} &= \int_S F_{ij} \varepsilon_{mn}^* dS, \quad g = \int_S \sigma_{mn}^* \varepsilon_{mn}^* dS. \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь S – площадь одного элемента. Интегрирование и вычисление подынтегральных функций проводится в локальных координатах по формулам:

$$\int_S f dS = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f |J| d\xi d\eta, \quad J = \det \mathbf{J}, \quad \mathbf{J} = \begin{bmatrix} \partial_\xi x & \partial_\eta x \\ \partial_\xi y & \partial_\eta y \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \partial_x \xi & \partial_y \xi \\ \partial_x \eta & \partial_y \eta \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1}, \quad (14)$$

$$\Phi_{ij}(\xi, \eta) = 0,5[(-1)^i L_j(\eta) \partial_x \xi + (-1)^j L_i(\xi) \partial_x \eta],$$

$$F_{ij}(\xi, \eta) = 0,5[(-1)^i L_j(\eta) \partial_y \xi + (-1)^j L_i(\xi) \partial_y \eta],$$

где обозначено: $\partial_\alpha = \partial/\partial\alpha$. Суммирование вкладов всех конечных элементов и переход к глобальной нумерации переменных приводит левую часть уравнения (8) к виду:

$$\delta \mathbf{Z}^T \mathbf{A} \mathbf{Z}; \quad \mathbf{Z} = [z_m], \quad \mathbf{A} = [a_{km}], \quad k, m = 1, \dots, N+1, \quad N = 2M, \quad z_{N+1} = K_I, \quad (15)$$

где \mathbf{Z} – матрица-столбец искоемых неизвестных, \mathbf{A} – глобальная матрица жесткости, M – число узлов конечно-элементной сетки; индекс Т обозначает транспонирование. Матрица \mathbf{A} симметрична и положительно определена. Если бы не было последних строки и столбца, она была бы ленточной.

Найдем теперь вклад одного конечного элемента в правую часть уравнения (8). Очевидно, что ненулевой вклад дают только те элементы, стороны которых лежат на части граничного контура, где приложена нагрузка. Получаем:

$$\begin{aligned} \int_L p_k \delta u_k dL &= \chi_{ij}^{(1)} \delta U_{ij} + \chi_{ij}^{(2)} \delta V_{ij} + \psi \delta K_I, \\ \chi_{ij}^{(1)} &= \int_L p_1 L_i(\xi) L_j(\eta) dL, \quad \chi_{ij}^{(2)} = \int_L p_2 L_i(\xi) L_j(\eta) dL, \\ \psi &= \int_L (p_1 u^* + p_2 v^*) dL, \quad dL = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}. \end{aligned} \quad (16)$$

Интегрирование проводится вдоль какой-либо стороны элемента. Пусть, например, это сторона $\eta = 1$. Интегралы (16) записываются в виде:

$$\begin{aligned} \chi_{i1}^{(1)} &= 0, \quad \chi_{i1}^{(2)} = 0, \quad \chi_{i2}^{(1)} = \omega \int_{-1}^1 p_1 L_i(\xi) d\xi, \quad \chi_{i2}^{(2)} = \omega \int_{-1}^1 p_2 L_i(\xi) d\xi, \\ \psi &= \omega \int_{-1}^1 (p_1 u^* + p_2 v^*) d\xi, \quad \omega = 0,5 \sqrt{(X_{22} - X_{12})^2 + (Y_{22} - Y_{12})^2}. \end{aligned} \quad (17)$$

В результате суммирования по элементам и переходу к глобальной нумерации получается матрица-столбец свободных членов $\mathbf{Q} = [q_m]$, $m = 1, \dots, N+1$. Уравнение (8) принимает вид:

$$\delta \mathbf{Z}^T \mathbf{A} \mathbf{Z} = \delta \mathbf{Z}^T \mathbf{Q}. \quad (18)$$

Необходимо учесть главные граничные условия. Потребуем, чтобы они выполнялись в точках коллокации. В рассматриваемом случае точки коллокации – это узлы конечно-элементной сетки, находящиеся на участках граничного контура, где заданы главные граничные условия. В соответствии с методом, изложенным в [16], эти граничные условия удовлетворяются после формирования разрешающей системы линейных алгебраических уравнений. Поэтому будем считать все вариации $\delta \mathbf{Z}$ произвольными, но зато добавим к известным активным силам \mathbf{Q} неизвестные силы реакции связей $\mathbf{R} = [r_m]$, $m = 1, \dots, N+1$. Величины r_m отличны от нуля только для тех m , для которых заданы узловые перемещения, которые и являются главными граничными условиями. Вариация работы реакции связи на таком перемещении будет в соответствии с равенствами (11) равна:

$$r_m (\delta z_m + \gamma_m \delta K_I), \quad (19)$$

где коэффициент γ_m представляет собой $u^*(r, \theta)$ или $v^*(r, \theta)$ в зависимости от того, по какой оси направлено заданное перемещение. Координаты r, θ здесь являются

полярными координатами узла, перемещение которого задано. Из выражения (19) следует, что

$$\delta \mathbf{Z}^T \mathbf{R} = \sum_{m=1}^N r_m \delta z_m + r_{N+1} \delta K_I, \quad r_{N+1} = \sum_{m=1}^N \gamma_m r_m. \quad (20)$$

Так как вариации $\delta \mathbf{Z}$ произвольны, получаем вариационное уравнение и эквивалентную ему систему линейных алгебраических уравнений в виде:

$$\delta \mathbf{Z}^T \mathbf{A} \mathbf{Z} = \delta \mathbf{Z}^T (\mathbf{Q} + \mathbf{R}) \Leftrightarrow \mathbf{A} \mathbf{Z} = \mathbf{Q} + \mathbf{R}. \quad (21)$$

Выделим из матрицы \mathbf{A} первые N строк и столбцов. Они образуют новую матрицу $\mathbf{A}' = [a'_{km}]$ порядка N . Отметим, что эта матрица является ленточной. Выделим также из матрицы \mathbf{Q} первые N элементов. Они образуют матрицу-столбец $\mathbf{Q}' = [q'_m]$ порядка N . Образует матрицу-столбец из первых N элементов последнего столбца матрицы \mathbf{A} : $\mathbf{S}' = [s'_m]$, $s'_m = -a_{m,N+1}$. Это позволяет разделить матрицу-столбец \mathbf{Z} на две составляющие, одна из которых определяется нагрузкой, а вторая – величиной K_I .

Число неизвестных в системе (21) превышает число уравнений. Но вместо того, чтобы дополнять систему (21) уравнениями связей (главных граничных условий), преобразуем матрицы \mathbf{A}' , \mathbf{Q}' , \mathbf{S}' методом, предложенным в [16]. Пусть задано перемещение c_j . В соответствии с равенством

$$z_j = c_j - \gamma_j z_{N+1} \quad (22)$$

перенесем известные величины в правые части:

$$q'_m := q'_m - a'_{mj} c_j, \quad s'_m := s'_m + a'_{mj} \gamma_j, \quad m = 1, \dots, N. \quad (23)$$

После выполнения этой процедуры для всех заданных перемещений обнуляются j -я строка и j -й столбец матрицы \mathbf{A}' за исключением диагонального элемента, а также задаются j -е элементы правых частей в соответствии с равенством (22):

$$\begin{aligned} a'_{jm} &:= 0, \quad a'_{mj} := 0, \quad m = 1, \dots, N, \\ a'_{jj} &:= 1, \quad q'_j := c_j, \quad s'_j := -\gamma_j. \end{aligned} \quad (24)$$

В результате этих преобразований матрица \mathbf{A}' по-прежнему остается симметричной и ленточной. Приходим к решению двух систем уравнений N -го порядка, отличающихся правой частью:

$$\mathbf{A}' \mathbf{Z}' = \mathbf{Q}', \quad \mathbf{A}' \mathbf{Z}'' = \mathbf{S}' \Rightarrow \mathbf{Z} = \mathbf{Z}' + K_I \mathbf{Z}''. \quad (25)$$

Равенства (25) относятся только к первым N элементам матрицы-столбца \mathbf{Z} . Таким образом, в результате решения систем уравнений (25) эти элементы оказались определены с точностью до константы $K_I = z_{N+1}$. Она находится из последнего уравнения системы (21). Предварительно нужно выразить реакции связей из уравнения (21):

$$r_m = -q_m + \sum_{n=1}^N a_{mn} z'_n + K_I \left(\sum_{n=1}^N a_{mn} z''_n + a_{m,N+1} \right). \quad (26)$$

Отметим, что величины r_m отличны от нуля только для тех m , для которых заданы главные граничные условия. С учетом равенства (20) последнее уравнение системы (21) принимает вид:

$$\sum_{m=1}^N a_{N+1,m} z'_m + K_I \left(\sum_{m=1}^N a_{N+1,m} z''_m + a_{N+1,N+1} \right) =$$

$$= q_{N+1} + \sum_{m=1}^N \gamma_m \left[-q_m + \sum_{n=1}^N a_{mn} z'_n + K_I \left(\sum_{n=1}^N a_{mn} z''_n + a_{m,N+1} \right) \right]. \quad (27)$$

Из этого уравнения определяется коэффициент интенсивности напряжений K_I .

Рассмотрим важный частный случай, когда составляющие перемещений (5) удовлетворяют нулевым главным граничным условиям, то есть когда все величины γ_j равны нулю (см. равенство (22)). При этом уравнение (27) существенно упрощается:

$$K_I = \frac{q_{N+1} - \sum_{m=1}^N a_{N+1,m} z'_m}{\sum_{m=1}^N a_{N+1,m} z''_m + a_{N+1,N+1}}. \quad (28)$$

Несингулярные составляющие тензора напряжений находятся по обычным соотношениям метода конечных элементов. В пределах некоторого конечного элемента производные от перемещений без учета сингулярных составляющих определяются выражениями:

$$\partial_x u = \Phi_{ij}(\xi, \eta) U_{ij}, \quad \partial_y u = F_{ij}(\xi, \eta) U_{ij}, \quad \partial_x v = \Phi_{ij}(\xi, \eta) V_{ij}, \quad \partial_y v = F_{ij}(\xi, \eta) V_{ij}. \quad (29)$$

Далее по формулам (1) находятся несингулярные составляющие деформаций и напряжений. Пусть кончик трещины совпадает с каким-либо узлом конечно-элементной сетки. Этот узел входит в два конечных элемента. Обозначим их через «+» и «-». Пусть $\sigma_{xx}^{(+)}$ представляет собой несингулярное напряжение в кончике трещины для одного элемента, а $\sigma_{xx}^{(-)}$ – для другого. В качестве T -напряжения выбирается средняя величина:

$$T = 0,5(\sigma_{xx}^{(+)} + \sigma_{xx}^{(-)}). \quad (30)$$

3. Компактный образец

Расчетная схема образца представлена на рис. 3. Она не моделирует детали приложения нагрузки к образцу. Поэтому реалистичных предсказаний от нее можно ожидать, в силу принципа Сен-Венана [30], только при сравнительно больших значениях длины трещины ($a/W \geq 0,5$). Но именно этот диапазон представляет практический интерес.

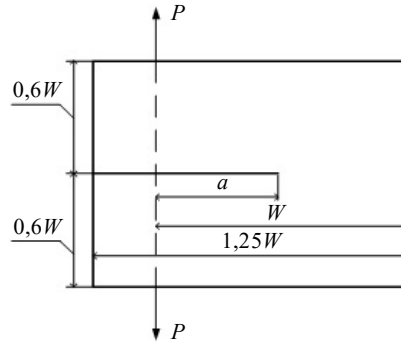


Рис. 3. Расчетная схема компактного образца (P – нагрузка, отнесенная к толщине образца)

Задача имеет ось симметрии. Расчетная схема, учитывающая симметрию задачи, изображена на рис. 4. Сформулируем граничные условия задачи. Участок контура AB не нагружен: $\sigma_{xx} = 0$, $\sigma_{xy} = 0$. Оба условия являются естественными. Участок

контура BC : $\sigma_{xy} = 0$, $\sigma_{yy} = P\delta(x - x_F)$, где $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака, а x_F – абсцисса точки приложения силы. Оба условия являются естественными. Участок контура CD : $\sigma_{xx} = 0$, $\sigma_{xy} = 0$. Оба условия являются естественными. Участок контура DE (условия симметрии): $v = 0$, $\sigma_{xy} = 0$. Первое условие является главным, а второе – естественным. Участок контура EA (линия трещины): $\sigma_{xy} = 0$, $\sigma_{yy} = 0$. Оба условия являются естественными. Чтобы исключить жесткие перемещения, дополнительно полагается равным нулю горизонтальное перемещение кончика трещины (главное условие). Получается, что координатные функции (5) удовлетворяют всем главным граничным условиям. Следовательно, для вычисления коэффициента интенсивности напряжений можно использовать упрощенное равенство (28).

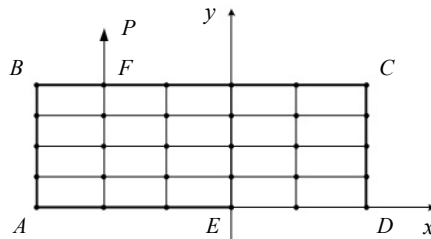


Рис. 4. Расчетная схема, учитывающая симметрию задачи, и конечно-элементная сетка (принципиальная схема)

Конечные элементы в глобальных координатах в рассматриваемом случае – это прямоугольники. Разбиение вдоль осей координат выбрано равномерным, так как неравномерность конечно-элементной сетки вносит непредсказуемую погрешность в решение задачи. Число элементов в горизонтальном направлении, на которое разбивается отрезок FC (см. рис. 4), равно n_1 , а в вертикальном – n_2 (на рис. 4 $n_1 = 4$, $n_2 = 4$). Для оценки сходимости решения выбраны варианты с квадратными элементами ($n_2 = 0,6n_1$) и длиной трещины $a = 0,5W$. В таблице 1 представлены результаты расчетов безразмерного коэффициента интенсивности напряжений $K_I^* = K_I\sqrt{W}/P$ и двухосевого отношения (7) в зависимости от числа конечных элементов n_1 .

Таблица 1

**Зависимость результатов расчетов
от числа конечных элементов вдоль координатных осей**

n_1	20	40	80	120	160	200
K_I^*	9,550	9,599	9,617	9,622	9,625	9,626
B	0,4685	0,5030	0,5249	0,5342	0,5396	0,5431

Как следует из таблицы 1, значения коэффициента интенсивности напряжений сходятся очень быстро: величины K_I^* при $n_1 = 20$ и при $n_1 = 200$ различаются менее, чем на один процент; при этом число неизвестных задачи увеличивается в сто раз. Сходимость величины B более медленная.

В таблице 2 приведены результаты расчетов этих же величин для различных значений отношения a/W . При этом полагалось $n_1 = 200$. В этой же таблице приведены для сравнения результаты других исследователей.

Таблица 2

Результаты расчетов для разных значений длины трещины

a/W	K_I^* (разработанный метод)	K_I^* из [32]	B (разработанный метод)	B из [31]
0,2	4,625	4,274	0,102	0,094
0,3	5,793	5,261	0,301	0,372
0,4	7,319	7,279	0,461	0,528
0,5	9,626	9,659	0,543	0,572
0,6	13,61	13,65	0,556	0,585
0,7	21,52	21,55	0,561	0,599

На рис. 5 приведены графики зависимостей $B(a/W)$, полученных разными авторами.

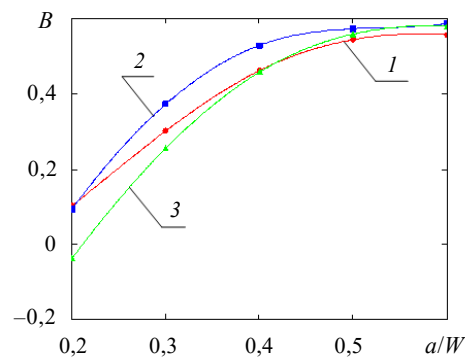


Рис. 5. Графики зависимостей двухосевого отношения от относительной длины трещины, 1 – разработанный метод, 2 – [31], 3 – [23]

Результаты расчетов с учетом того, что они сопоставляются с результатами не аналитического, а численного анализа, свидетельствуют о возможности метода давать достаточно точное решение.

4. Трехточечный изгибный образец

Расчетная схема образца представлена на рис. 6.

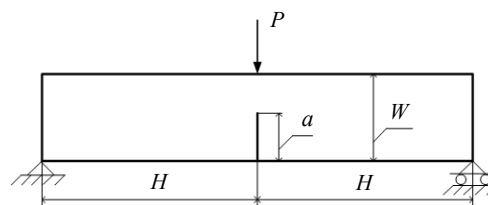


Рис. 6. Расчетная схема трехточечного изгибного образца (P – нагрузка, отнесенная к толщине образца)

Задача имеет ось симметрии. Расчетная схема, учитывающая симметрию задачи, изображена на рис. 7. Сформулируем граничные условия задачи. Участок контура AB не загружен: $\sigma_{xx} = 0$, $\sigma_{xy} = 0$. Оба условия являются естественными. Условие шарнирного опирания точки B : $u(-a, H) = 0$ – главное граничное условие. Участок контура BC : $\sigma_{xy} = 0$, $\sigma_{yy} = 0$. Участок контура CD : $\sigma_{xx} = -0,5P\delta(y)$, $\sigma_{xy} = 0$. Все эти условия являются естественными. Участок контура DE (условия симметрии): $v = 0$, $\sigma_{xy} = 0$. Первое условие является главным, а второе – естественным. Участок конту-

ра EA (линия трещины): $\sigma_{xy} = 0$, $\sigma_{yy} = 0$. Оба условия являются естественными. Получается, что координатные функции (5) удовлетворяют всем главным граничным условиям, кроме условия в точке B . Поэтому для вычисления коэффициента интенсивности напряжений нужно решать уравнение (27).

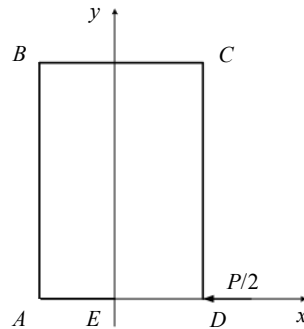


Рис. 7. Расчетная схема, учитывающая симметрию задачи

Конечные элементы в глобальных координатах – прямоугольники, как и в предыдущем случае. Конечно-элементная сетка ничем, в принципе, не отличается от приведенной на рис. 4. Число элементов в горизонтальном направлении равно n_1 , а в вертикальном – n_2 . Для оценки сходимости решения выбраны варианты, для которых $n_2 = n_1$, а также $H = 2W$, $a = 0,5W$. В таблице 3 представлены результаты расчетов безразмерного коэффициента интенсивности напряжений $K_I^{**} = K_I W^2 / (3HP \sqrt{\pi a})$ и двухосевого отношения (7) в зависимости от числа конечных элементов n_1 .

Таблица 3

**Зависимость результатов расчетов
от числа конечных элементов вдоль координатных осей**

n_1	20	40	80	120	160	200
K_I^{**}	1,380	1,398	1,403	1,404	1,405	1,405
B	-0,0071	0,0361	0,0632	0,0744	0,0809	0,0851

Как следует из таблицы 3, значения коэффициента интенсивности напряжений сходятся очень быстро, значения B сходятся гораздо медленней.

В таблице 4 приведены результаты расчетов этих же величин для различных значений отношения a/W . При этом полагалось $n_1 = n_2 = 200$, $H = 2W$. В этой же таблице приведены для сравнения результаты других исследователей.

Таблица 4

Результаты расчетов для разных значений длины трещины

a/W	K_I^{**} (разработанный метод)	K_I^{**} из [32]	B (разработанный метод)	B из [33]
0,2	0,977	0,988	-0,247	-0,236
0,3	1,039	1,045	-0,143	-0,123
0,4	1,172	1,179	-0,033	-0,003
0,5	1,405	1,416	0,085	0,124
0,6	1,818	1,831	0,214	0,262
0,7	2,621	2,630	0,365	0,435

На рис. 8 приведены графики зависимостей $B(a/W)$, полученных разными авторами. Результаты расчетов согласуются со сделанным выше выводом о том, что разработанный метод дает приемлемую точность расчетов.

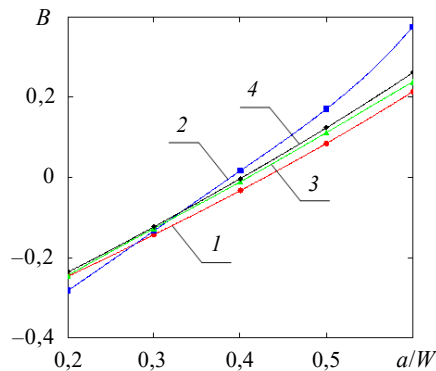


Рис. 8. Графики зависимостей двухосевого отношения от относительной длины трещины: 1 – разработанный метод, 2 – [31], 3 – [23], 4 – [33]

Заключение

Предложен численный метод решения плоских задач механики разрушения, позволяющий определить не только коэффициенты интенсивности напряжений, но и несингулярные компоненты тензора напряжений в кончике трещины. Метод представляет собой разновидность метода конечных элементов и сохраняет универсальность этого метода. Он применим не только к задачам для трещин нормального разрыва, но и к несимметричным задачам для прямолинейных трещин, а также к задачам для криволинейных трещин.

В настоящей статье этот метод подробно описан и показано решение им задач определения коэффициентов интенсивности напряжений и T -напряжений для основных экспериментальных образцов механики разрушения. Это, безусловно, важные задачи, так как экспериментальная проверка усовершенствованных критериев разрушения, которые, как правило, включают в себя T -напряжения, осуществляется именно на этих образцах. Несмотря на то, что подобные критерии разрабатываются с 1966 года (первой публикацией на эту тему была, по-видимому, статья [3]), рассмотренные здесь задачи были предметом очень немногих исследований. Очевидное объяснение этого – сложность задач. Поэтому разработанный метод достаточно простой и, как показывают приведенные выше результаты расчетов, вполне надежный, может найти себе практическое применение.

Список литературы

1. Матвиенко Ю.Г. *Модели и критерии механики разрушения*. М.: Физматлит, 2006. 328 с.
2. Gupta M., Alderliesten R.C., Benedictus R. A review of T -stress and its effects in fracture mechanics. *Engineering Fracture Mechanics*. 2015. Vol. 134. P. 218–241. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2014.10.013.
3. Cotterell B. Notes on paths and stability of cracks. *International Journal of Fracture Mechanics*. 1966. Vol. 2. P. 526–533.
4. Melin S. The influence of the T -stress on the directional stability of cracks. *International Journal of Fracture*. 2002. Vol. 114. P. 259–265.
5. Larsson S.G., Carlsson A.J. Influence of non-singular stress terms and specimen geometry on small-scale yielding at crack tips in elastic-plastic materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 1973. Vol. 21. P. 263–277.
6. Матвиенко Ю.Г., Починков Р.А. Влияние несингулярных компонентов T -напряжений

на зоны пластической деформации у вершины трещины нормального отрыва. *Деформация и разрушение материалов*. 2012. №3. С. 6–14.

7. Shlyannikov V.N. T -stress for crack paths in test specimens subject to mixed mode loading. *Engineering Fracture Mechanics*. 2013. Vol. 108. P. 3–18.

8. Liu H. Wing-crack initiation angle: A new maximum tangential stress criterion by considering T -stress. *Engineering Fracture Mechanics*. 2018. Vol. 199. P. 380–391. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2018.06.010.

9. Кургузов В.Д. Влияние T -напряжений на излом и ветвление траектории трещины. *Прикладная механика и техническая физика*. 2025. Т. 1 (389). С. 135–152. DOI: 10.15372/PMTF202415491.

10. Степанова Л.В. Экспериментальное и конечно-элементное определение коэффициентов многопараметрического асимптотического разложения М. Уильямса у вершины трещины в линейно-упругом изотропном материале. Часть I. *Вестник ПНИПУ. Механика*. 2020. №4. С. 237–249. DOI: 10.15593/perm.mech/2020.4.20.

11. Степанова Л.В. Экспериментальное и конечно-элементное определение коэффициентов многопараметрического асимптотического разложения М. Уильямса у вершины трещины в линейно-упругом изотропном материале. Часть II. *Вестник ПНИПУ. Механика*. 2021. №1. С. 72–85. DOI: 10.15593/perm.mech/2021.1.08.

12. Тырымов А.А. Численное моделирование T -напряжений и коэффициента биаксиальности напряжений для образца с центральной трещиной при смешанных граничных условиях. *Вычислительная механика сплошных сред*. 2020. Т. 13. № 4. С. 393–401. DOI: 10.7242/1999-6691/2020.13.4.30.

13. Райс Дж. Математические методы в механике разрушения. В кн. *Разрушение*. Т. 2. М.: Мир, 1975. С. 204–235.

14. Barsoum R.S. On the use of isoparametric finite elements in linear fracture mechanics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1976. Vol. 10. P. 25–37. <http://dx.doi.org/10.1002/nme.1620100103>.

15. Морозов Е.М., Никишков Г.П. *Метод конечных элементов в механике разрушения*. М.: Наука, 1980. 256 с.

16. Зенкевич О.К. *Метод конечных элементов в технике*. М.: Мир, 1975. 541 с.

17. Hilton P.D., Sih G.C. Applications of the finite element method to the calculations of stress intensity factors. In: *Mechanics of Fracture. Methods of Analysis and Solution of Crack Problem*. 1973. Vol. 1. P. 426–483.

18. Лавит И.М., Толоконников Л.А. О расчете коэффициентов интенсивности напряжений методом конечных элементов. *Прикладная механика*. 1983. № 9. С. 110–113.

19. Толоконников Л.А., Лавит И.М. О решении несимметричных задач линейной механики разрушения. *Известия Северо-Кавказского научного центра высшей школы. Естественные науки*. 1984. №2. С. 43–45.

20. Тартыгашева А.М., Шлянников В.Н., Туманов А.В. Формулировка метода конечных элементов с учетом сингулярности для плоской задачи смешанных форм разрушения. *Вестник ПНИПУ. Механика*. 2020. №4. С. 220–236. DOI: 10.15593/perm.mech/2020.4.19.

21. Ayatollahi M.R., Pavier M.J., Smith D.J. Determination of T -stress from finite element analysis for mode I and mixed mode I/II loading. *International Journal of Fracture*. 1998. Vol. 91. P. 283–298.

22. Yang B., Ravi-Chandar K. Evaluation of elastic T -stress by the stress difference method. *Engineering Fracture Mechanics*. 1999. Vol. 64. Iss. 5. P. 589–605. [https://doi.org/10.1016/S0013-7944\(99\)00082-X](https://doi.org/10.1016/S0013-7944(99)00082-X).

23. Kfoury A.P. Some evaluations of the elastic T -term using Eshelby's method. *International Journal of Fracture*. 1986. Vol. 30. P. 301–315.

24. Belytschko T., Black T. Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1999. Vol. 45. No 5. P. 601–620.

25. Moes N., Dolbow J., Belytschko T. A finite element method for crack growth without remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1999. Vol. 46. P. 131–150. DOI: 10.1002/(SICI)1097-0207(19990910)46:13.0.CO;2-J.

26. Sukumar N., Dolbow J.E., Moes N. Extended finite element method in computational

fracture mechanics: a retrospective examination. *International Journal of Fracture*. 2015. Vol. 196. P. 189–206.

27. Brenner S.C., Scott L.R. *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*. New York: Springer, 2008. 397 p.

28. Krukova N.V., Lavit I.M. The finite element method in linear fracture mechanics problems. *III European Conference on Computational Mechanics*. Dordrecht: Springer, 2006. 256 p.

29. Лавит И.М., Сибирцева Н.В. Конечно-элементный метод решения задач линейной механики разрушения. *Известия Тульского государственного университета. Серия Актуальные вопросы механики*. 2006. Вып. 2. С. 96–102.

30. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. *Теория упругости*. М.: Наука, 1975. 576 с.

31. Leever P.S., Radon J.C. Inherent stress biaxiality in various fracture specimen geometries. *International Journal of Fracture*. 1982. Vol. 19. P. 311–325.

32. *Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений*. В 2-х т. Т. 1. Под ред. Ю. Мураками. М.: Мир, 1990. 448 с.

33. Fett T. *T*-stresses in rectangular plates and circular disks. *Engineering Fracture Mechanics*. 1998. Vol. 60. Iss. 5-6. P. 631–652. [https://doi.org/10.1016/S0013-7944\(98\)00038-1](https://doi.org/10.1016/S0013-7944(98)00038-1).

References

1. Matvienko Yu.G. *Modeli i kriterii mekhaniki razrusheniya [Models and Criteria of Destruction Mechanics]*. Moscow. Fizmatlit Publ. 2006. 328 p. (In Russian).

2. Gupta M., Alderliesten R.C., Benedictus R. A review of *T*-stress and its effects in fracture mechanics. *Eng. Fract. Mech.* 2015. Vol. 134. P. 218–241. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2014.10.013.

3. Cotterell B. Notes on paths and stability of cracks. *Int. J. Fract.* 1966. Vol. 2. P. 526–533.

4. Melin S. The influence of the *T*-stress on the directional stability of cracks. *Int. J. Fract.* 2002. Vol. 114. P. 259–265.

5. Larsson S.G., Carlsson A.J. Influence of non-singular stress terms and specimen geometry on small-scale yielding at crack tips in elastic-plastic materials. *J. Mech. Phys. Solids*. 1973. Vol. 21. P. 263–277.

6. Matvienko Yu.G., Pochinkov R.A. Vliyanie nesingulyarnykh komponentov *T*-napryazheniy na zony plasticheskoy deformatsii u vershiny treshchiny normalnogo otryva [The effect of non-singular *T*-stress components on plastic deformation zones at the tip of a normal separation crack]. *Deformatsiya i razrushenie materialov [Deformation and Destruction of Materials]*. 2012. No 3. P. 6–14 (In Russian).

7. Shlyannikov V.N. *T*-stress for crack paths in test specimens subject to mixed mode loading. *Eng. Fract. Mech.* 2013. Vol. 108. P. 3–18.

8. Liu H. Wing-crack initiation angle: A new maximum tangential stress criterion by considering *T*-stress. *Eng. Fract. Mech.* 2018. Vol. 199. P. 380–391. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2018.06.010.

9. Kurguzov V.D. Vliyanie *T*-napryazheniy na izlom i vetvlenie traektorii treshchiny [Effect of *T*-stresses on kinking and branching of the crack trajectory]. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika [Journal of Applied Mechanics and Technical Physics]*. 2025. Vol. 1 (389). P. 135–152 (In Russian).

10. Stepanova L.V. Eksperimentalnoe i konechno-elementnoe opredelenie koeffitsientov mnogoparametricheskogo asimptoticheskogo razlozheniya M. Uilyamsa u vershiny treshchiny v lineyno-uprugom izotropnom materiale. Chast I [Experimental determination and finite element analysis of coefficients of the multi-parameter Williams series expansion in the vicinity of the crack tip in linear elastic. Part I]. *Vestnik PNIPU. Mekhanika [PNRPU Mechanics Bulletin]*. 2020. No 4. P. 237–249 (In Russian).

11. Stepanova L.V. Eksperimentalnoe i konechno-elementnoe opredelenie koeffitsientov mnogoparametricheskogo asimptoticheskogo razlozheniya M. Uilyamsa u vershiny treshchiny v lineyno-uprugom izotropnom materiale. Chast II [Experimental determination and finite element analysis of coefficients of the multi-parameter Williams series expansion in the vicinity of the crack tip in linear elastic. Part II]. *Vestnik PNIPU. Mekhanika [PNRPU Mechanics Bulletin]*. 2021. No 1. P. 72–85 (In Russian).

12. Tyrymov A.A. Chislennoe modelirovanie T -napryazheniy i koeffitsienta biaksialnosti napryazheniy dlya obraztza s tsestralnoy treshchinoy pri smeshannykh granichnykh usloviyakh [Numerical modeling of T -stresses and stress biaxiality factor for a centrally cracked specimen under mixed boundary conditions]. *Vychislitel'naya mekhanika sploshnykh sred* [Computational Continuous Mechanics]. 2020. Vol. 13. No 4. P. 393–401 (In Russian).
13. Rice J. Matematicheskie metody v mekhanike razrusheniya [Mathematical methods in fracture mechanics]. V kn. *Razrushenie* [In: Destruction]. Vol. 2. Moscow. Mir Publ. 1975. P. 204–235 (In Russian).
14. Barsoum R.S. On the use of isoparametric finite elements in linear fracture mechanics. *Int. J. Numer. Methods Eng.* 1976. Vol. 10. P. 25–37. <http://dx.doi.org/10.1002/nme.1620100103>.
15. Morozov E.M., Nikishkov G.P. *Metod konechnykh elementov v mekhanike razrusheniya* [The Finite Element Method in Fracture Mechanics]. Moscow. Nauka Publ. 1980. 256 p. (In Russian).
16. Zienkiewicz O.C. *The Finite Element Method in Engineering Science*. London. New York. McGraw-Hill. 1971. 521 p.
17. Hilton P.D., Sih G.C. Applications of the finite element method to the calculations of stress intensity factors. In: *Mechanics of Fracture. Methods of Analysis and Solution of Crack Problem*. 1973. Vol. 1. P. 426–483.
18. Lavit I.M., Tolokonnikov L.A. O raschete koeffitsientov intensivnosti napryazheniy metodom konechnykh elementov [On the calculation of stress intensity coefficients by the finite element method]. *Prikladnaya mekhanika* [International Applied Mechanics]. 1983. Vol. 9. P. 110–113 (In Russian).
19. Tolokonnikov L.A., Lavit I.M. O reshenii nesimmetrichnykh zadach lineynoy mekhaniki razrusheniya [On solving asymmetric problems of linear fracture mechanics]. *Izvestiya Severo-Kavkazskogo nauchnogo tsentra vysshey shkoly. Estestvennye nauki*. 1984. №2. P. 43–45 (In Russian).
20. Tartygasheva A.M., Shlyannikov V.N., Tumanov A.V. Formulirovka metoda konechnykh elementov s uchetom singulyarnosti dlya ploskoy zadachi smeshannykh form razrusheniya [Formulation of the finite element method taking into account the singularity for the planar problem of mixed forms of destruction]. *Vestnik PNIPU. Mekhanika* [PNRPU Mechanics Bulletin]. 2020. No 4. P. 220–236 (In Russian).
21. Ayatollahi M.R., Pavier M.J., Smith D.J. Determination of T -stress from finite element analysis for mode I and mixed mode I/II loading. *Int. J. Fract.* 1998. Vol. 91. P. 283–298.
22. Yang B., Ravi-Chandar K. Evaluation of elastic T -stress by the stress difference method. *Eng. Fract. Mech.* 1999. Vol. 64. Iss. 5. P. 589–605. [https://doi.org/10.1016/S0013-7944\(99\)00082-X](https://doi.org/10.1016/S0013-7944(99)00082-X).
23. Kfoury A.P. Some evaluations of the elastic T -term using Eshelby's method. *Int. J. Fract.* 1986. Vol. 30. P. 301–315.
24. Belytschko T., Black T. Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing. *Int. J. Numer. Meth. Eng.* 1999. Vol. 45. No 5. P. 601–620.
25. Moes N., Dolbow J., Belytschko T. A finite element method for crack growth without remeshing. *Int. J. Numer. Methods Eng.* 1999. Vol. 46. P. 131–150. DOI: 10.1002/(SICI)1097-0207(19990910)46:13.0.CO;2-J.
26. Sukumar N., Dolbow J.E., Moes N. Extended finite element method in computational fracture mechanics: a retrospective examination. *Int. J. Fract.* 2015. Vol. 196. P. 189–206.
27. Brenner S.C., Scott L.R. *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*. New York. Springer. 2008. 397 p.
28. Krukova N.V., Lavit I.M. The finite element method in linear fracture mechanics problems. *III European Conference on Computational Mechanics*. Dordrecht. Springer. 2006. 256 p.
29. Lavit I.M., Sibirtseva N.V. Konechno-elementnyy metod resheniya zadach lineynoy mekhaniki razrusheniya [Finite element method for solving problems of linear fracture mechanics]. *Izvestiya Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya Aktualnye voprosy mekhaniki*. 2006. Iss. 2. P. 96–102 (In Russian).
30. Timoshenko S.P., Goodier J.N. *Theory of Elasticity*. New York. Toronto. London. McGraw-Hill. 1951. 519 p.

31. Leever P.S., Radon J.C. Inherent stress biaxiality in various fracture specimen geometries. *Int. J. Fract.* 1982. Vol. 19. P. 311–325.
32. *Stress Intensity Factors Handbook*. In 2 Vols. Vol. 1. Ed. Y. Murakami. Oxford. New York. Toronto. Pergamon Press. 1987. 634 p.
33. Fett T. *T*-stresses in rectangular plates and circular disks. *Eng. Fract. Mech.* 1998. Vol. 60. Iss. 5-6. P. 631–652. [https://doi.org/10.1016/S0013-7944\(98\)00038-1](https://doi.org/10.1016/S0013-7944(98)00038-1).

CALCULATION OF *T*-STRESS FOR BASIC EXPERIMENTAL SAMPLES OF FRACTURE MECHANICS

Perova O.S., Lavit I.M.

Tula State University, Tula, Russian Federation

o.s.perova@yandex.ru, igorlavit@yandex.ru

Received by the Editor 2025/09/22

Improved crack promotion criteria developed in recent decades include non-singular components of the stress tensor. Numerical methods for calculating them are few and complex. The proposed method does not require changes to the basis of the computational process – the finite element method. Its essence is the same as that of the well-known extended finite element method. It consists in adding coordinate functions to the usual coordinate functions of the finite element method (shape functions) that explicitly model the stress field singularity at the crack tip. In the proposed method, unlike the extended finite element method, these functions are the same for all elements, which ensures the inter-element continuity of the displacement field. Stress intensity coefficients are included among the variable parameters. Therefore, they are found when solving a resolving system of linear algebraic equations without any additional computational procedures. Calculation of non-singular components of the stress tensor (for a non-cohesive crack, this is the *T*-stress) It also does not require the use of special methods, for example, the stress separation method. Thus, the presented method is essentially a combination of the classical finite element method and the classical Ritz–Galerkin method. Problems with its application arise if the main boundary conditions are set on the boundary contour, which are not satisfied by the coordinate functions modeling the singularity. However, the solution is found if these conditions are satisfied only at the nodes of the finite element grid lying on the boundary contour (collocation points). In this case, bond reactions are considered as active forces and are included among the desired unknowns of the task. The application of the method is illustrated by examples of solving problems for a compact tensile sample and a three-point bending sample. The results of the calculations are compared with the results of other researchers.

Keywords: fracture, crack, compact sample, three-point bending sample, *T*-stress.