## УДК 539.3

# ВИБРАЦИОННЫЙ ИЗГИБ ТОЛСТОЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ КОНСОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ-ПОЛОСЫ РАСПРЕДЕЛЕННОЙ ПОПЕРЕЧНОЙ НАГРУЗКОЙ

# П.Ф. Недорезов

### Саратов

Модифицированным методом сплайн-коллокации численно исследованы установившиеся колебания толстой вязкоупругой консольной пластинкиполосы под действием распределенной поперечной нагрузки вибрационного типа. Расчеты показали, что первая критическая частота и соответствующая ей форма изогнутой поверхности с высокой точностью могут быть определены по классической теории Кирхгофа. При более высоких частотах в толстых пластинках появляются новые эффекты, которые не могут быть описаны в рамках теории Кирхгофа.

Рассматриваются установившиеся колебания бесконечной в направлении *у* пластинки конечной ширины *a* и толщины *h* под действием распределенной по плоскости z = -h/2 поперечной нагрузки интенсивности q(x, t):

$$q(x,t) = q_0(x)\cos\omega t. \tag{1}$$

Предполагается, что край x = 0 жестко защемлен, а край x = a свободен от закрепления и нагрузки. Тогда  $v = \tau_{xy} = \tau_{yz} = 0$ , а остальные компоненты напряженнодеформированного состояния (НДС) не зависят от *y*.

Зависимости между ненулевыми компонентами напряжений и малых деформаций (механические свойства материала считаются не зависящими от температуры) определяются соотношениями линейного закона вязкоупругости:

$$\sigma_{x} = \frac{1}{(1+\nu)(1-2\nu)} \int_{-\infty}^{t} K(t-\tau)((1-\nu)\varepsilon_{x} + \nu\varepsilon_{z}) d\tau, \quad (x \Leftrightarrow z, u \Leftrightarrow w, \nu = \text{const}),$$

$$\tau_{xz} = \frac{1}{2(1+\nu)} \int_{-\infty}^{t} K(t-\tau) \left(\frac{\partial u(x,z,\tau)}{\partial z} + \frac{\partial w(x,z,\tau)}{\partial x}\right) d\tau, \quad \sigma_{y} = \nu(\sigma_{x} + \sigma_{z}).$$
(2)

Все характеристики НДС пластинки, соответствующие нагрузке (1), представляются в виде

$$V(x, z, t) = V^{(1)}(x, z) \cos \omega t + V^{(2)}(x, z) \sin \omega t.$$

Для составляющих  $u^{(k)}(x,z)$  и  $w^{(k)}(x,z)$  (k = 1,2) проекций вектора смещения в работе [1] получена система уравнений, которая преобразуется к виду

$$\frac{\partial^2 u_k}{\partial \varsigma^2} + 2h_0^2 \frac{1-\nu}{1-2\nu} \frac{\partial^2 u_k}{\partial \xi^2} + \frac{h_0}{1-2\nu} \frac{\partial^2 w_k}{\partial \xi \partial \varsigma} - (-1)^k 2\sum_{n=1}^2 \delta_{k+n-1} u_n = 0,$$
(3)

$$\frac{\partial^2 w_k}{\partial \varsigma^2} + h_0^2 \frac{1 - 2\nu}{2(1 - \nu)} \frac{\partial^2 w_k}{\partial \xi^2} + \frac{h_0}{2(1 - \nu)} \frac{\partial^2 u_k}{\partial \xi \partial \varsigma} - (-1)^k \frac{1 - 2\nu}{1 - \nu} \sum_{n=1}^2 \delta_{k+n-1} w_n = 0 \quad (k = 1, 2).$$

Здесь  $\xi = x/a, \zeta = z/h$  – безразмерные переменные,  $u_k(\xi, \zeta) = u^{(k)}(x, z)/h$  и  $w_k(\xi, \zeta) = w^{(k)}(x, z)/h$  (k = 1, 2) – безразмерные составляющие проекций вектора смещения,

$$d_{j} = \frac{(1+\nu)E_{j}}{E_{1}^{2} + E_{2}^{2}}, \quad \delta_{j} = \rho \omega^{2} h^{2} d_{j} \quad (j = 1, 2),$$
$$E_{1} + iE_{2} = \int_{-\infty}^{t} K(s) \exp(i\omega s) ds, \quad E_{3} = -E_{1}, \quad d_{3} = -d_{1}, \quad \delta_{3} = -\delta_{1}.$$

В случае свободно опертых краев пластинки и нагрузке

$$q_0(x) = p_0 \sin \pi \xi, \quad p_0 = \text{const}, \tag{4}$$

рассмотренном в [1, 2], понижение размерности краевой задачи для системы (3) выполнялось методом разделения переменных. Полученная одномерная задача решалась численно методом дискретной ортогонализации. При более сложных, чем (4), законах изменения нагрузки или других способах закрепления переход от двумерных уравнений (3) к одномерным можно осуществить [3] классическим методом сплайн-коллокации [4].

В рассматриваемом случае классический вариант метода сплайн-коллокации неприменим, поэтому для понижения размерности задачи используется модифицированный метод сплайн-коллокации [5]. Согласно этому методу, будем искать функции  $u_k(\xi, \zeta)$  и  $w_k(\xi, \zeta)$  (k = 1, 2) в виде:

$$u_{k}(\xi,\varsigma) = \sum_{j=0}^{N} \varphi_{j}(\xi) U_{j+(k-1)(N+1)}(\varsigma) + \varphi_{N+1}(\xi) \widetilde{U}_{k}(\varsigma),$$

$$w_{k}(\xi,\varsigma) = \sum_{j=0}^{N} \varphi_{j}(\xi) W_{j+(k-1)(N+1)}(\varsigma) + \varphi_{N+1}(\xi) \widetilde{W}_{k}(\varsigma) \quad (k = 1, 2),$$
(5)

где  $\varphi_j(\xi)$  подобраны так, чтобы тождественно выполнялись условия жесткого закрепления края  $\xi = 0$ , и определяются формулами

$$\phi_0(\xi) = -4B_{3,-1}(\xi) + B_{3,0}(\xi), \quad \phi_1(\xi) = -B_{3,-1}(\xi) + B_{3,1}(\xi),$$
$$\phi_j(\xi) = B_{3,j}(\xi) \quad (j = \overline{2, N}).$$

Здесь через  $B_{3,p}(\xi)$  (p = -1, N + 1) обозначены кубические *B*-сплайны, построенные по системе узлов  $\xi = \xi_q = qh_x$   $(q = -3, N + 3; h_x = 1/N)$ , а функции  $\tilde{U}_k(\zeta)$  и  $\tilde{W}_k(\zeta)$  (k = 1, 2) удовлетворяют уравнениям

171

$$\frac{d\widetilde{U}_{k}}{\partial\varsigma} = \sum_{j=0}^{N} a_{j} \frac{dU_{j+(k-1)(N+1)}}{d\varsigma} + \sum_{j=0}^{N} b_{j}W_{j+(k-1)(N+1)} + b_{N+1}\widetilde{W}_{k}(\varsigma),$$

$$\frac{d\widetilde{W}_{k}}{d\varsigma} = \sum_{j=0}^{N} c_{j}U_{j+(k-1)(N+1)} + \sum_{j=0}^{N} a_{j} \frac{dW_{j+(k-1)(N+1)}}{d\varsigma} + c_{N+1}\widetilde{U}_{k}(\varsigma) \quad (k = 1, 2);$$
(6)

 $a_{j}, b_{j}$  и  $c_{j}$  ( $j = \overline{0, N}$ ) – известные постоянные, выражающиеся через значения функций  $\Phi_{p}(\xi)$  ( $p = \overline{0, N+1}$ ) и их производных в точке  $\xi = 1$ .

Уравнения (6) получаются из условий при  $\xi = 1$   $\sigma_x^{(k)} = 0$ ,  $\tau_{xz}^{(k)} = 0$  (k = 1, 2) после подстановки в них выражений (5).

Подставив (5) в (3) и требуя, чтобы полученные соотношения выполнялись в точках коллокации  $\xi = x_r (r = 0, N)$ , получим систему 4N + 4 обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно функций  $U_k(\varsigma), W_k(\varsigma)$   $(k = \overline{0, 2N + 1}), \tilde{U}_k(\varsigma)$  и  $\tilde{W}_k(\varsigma)$  (k = 1, 2). Эти уравнения вместе с (6) для определения всех неизвестных функций составляют полную систему уравнений, которая преобразуется в систему 8N + 12 дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{dY}{d\varsigma} = D\overline{Y}(\varsigma). \tag{7}$$

Здесь  $\overline{Y}(\varsigma) = \{U_0, ..., U_{2n+1}, W_0, ..., W_{2n+1}, U'_0, ...U'_{2n+1}, W'_0, ..., W'_{2n+1}, \widetilde{U}_1, \widetilde{U}_2, \widetilde{W}_1, \widetilde{W}_2\}$  – вектор неизвестных, D – известная матрица размерности (8N + 12)×(8N + 12).

Граничные условия для функции  $\overline{Y}(\varsigma)$  получаются после подстановки выражений (5) в условия для составляющих напряжений  $\sigma_z^{(k)}$  и  $\tau_{xz}^{(k)}$  при  $\varsigma = \pm 1/2$ , записанные в перемещениях:

$$- \operatorname{при} \varsigma = -1/2 \quad vh_0 \frac{\partial u_k}{\partial \xi} + (1 - v) \frac{\partial w_k}{\partial \varsigma} = (-1)^{k-1} d_k q_0(\xi), \quad \frac{\partial u_k}{\partial \varsigma} + \frac{\partial w_k}{\partial \xi} = 0; \\ - \operatorname{при} \varsigma = 1/2 \quad vh_0 \frac{\partial u_k}{\partial \xi} + (1 - v) \frac{\partial w_k}{\partial \varsigma} = 0, \quad \frac{\partial u_k}{\partial \varsigma} + \frac{\partial w_k}{\partial \xi} = 0 \quad (k = 1, 2).$$

Выполнение этих условий требуется в точках коллокации  $\xi = x_r (r = \overline{0, N})$ , а для  $\sigma_r^{(k)}$  дополнительно и при  $\xi = 1$ . Эти условия могут быть преобразованы к виду

$$H_1\overline{Y}(-1/2) = \overline{e}_1, \quad H_2\overline{Y}(1/2) = \overline{e}_2, \tag{8}$$

где

$$\begin{split} H_1 &= \{h_{i,j}\}, \quad H_2 = \{h_{i+4N+4,j}\}, \quad \overline{e}_1 = \{e_i\}, \quad \overline{e}_2 = \{e_{i+4N+4}\}\\ &(i = \overline{0, 4N+3}; \quad j = \overline{0, 8N+7}) \end{split}$$

- известные матрицы и векторы.

Краевая задача (7), (8) решается численно методом дискретной ортогонализации, который, как показывают решения многочисленных тестовых задач, обеспечивает получение практически точных результатов.

После определения значений функции  $\overline{Y}(\varsigma)$  для фиксированных  $\varsigma = \varsigma_m$  составляющие проекций вектора смещения вдоль прямых  $\varsigma = \varsigma_m$  вычисляются по форму-

лам (5), а для составляющих напряжений имеют место соотношения

$$\sigma_x^{(k)} = \frac{1}{(1+\nu)(1-2\nu)} \sum_{j=0}^N \sum_{p=0,1}^{N} (-1)^p E_{k+p} [(1-\nu)h_0 \varphi'_j(\xi) Y_{j+p(N+1)}(\zeta) + \nu \psi_j(\zeta) Y_{j+(p+6)(N+1)}(\zeta)];$$

$$\tau_{xz}^{(k)} = \frac{1}{2(1+\nu)} \sum_{j=0}^{N} \sum_{p=0,1} (-1)^{p} E_{k+p} [\phi_{j}(\xi) Y_{j+(p+4)(N+1)}(\zeta) + h_{0} \psi_{j}'(\zeta) Y_{j+(p+2)(N+1)}(\zeta)]$$

$$(x \Leftrightarrow z; \quad v \Leftrightarrow 1-v, \quad k=1,2).$$

По изложенной методике были исследованы колебания пластинок с относительной толщиной  $h_0 = 0,025\div0,25$  под действием нагрузки (1) при  $q_0(\xi) = p_0 =$ = const. При расчетах принято: a = 1,0 м,  $p_0 = 1,0$  Па, v = 0,4,  $E_1 = 2,7\cdot10^9$  Н/м<sup>2</sup>,  $E_2/E_1 = \text{tg } \delta = 0,015$ ,  $\rho = 1250$  кг/м<sup>3</sup> (материал ЭД-6 МА), N = 50, M = 40. Некоторые результаты численных расчетов приведены в таблице, где указаны значения первых трех критических частот  $\omega_k$  и соответствующие им локальные максимумы по  $\xi$ амплитуды  $\tilde{W}$  прогиба точек срединной плоскости. В этой же таблице помещены помеченные звездочкой значения указанных величин, вычисленные по методике работы [6], когда в качестве исходных приняты уравнения, основанные на гипотезах Кирхгофа, с учетом инерции вращения. Для величин  $\tilde{W}$  и  $\tilde{W}^*$  в скобках указаны значения  $\xi$ , при которых эти величины получаются; погрешность  $\varepsilon_{\omega}$  определения критической частоты вычисляется по формуле  $\varepsilon_{\omega} = (\omega_k - \omega_k^*)/\omega_k$ .

$h_0$	$\omega_k, c^{-1}$	$\widetilde{W}(\xi,0)$	$\omega_k^{*}, c^{-1}$	${\widetilde{W}}^{*}(\xi,0)$	Погрешность $\varepsilon_{\omega}$ , %
	40,64	7,978-2 (1,000)	40,69	8,071-2 (1,000)	0,1
0,025	256	7,177-4 (0,480)	255	8,202-4 (0,475)	0,4
		1,132-5 (1,000)		1,139-3 (1,000)	
	712	6,461-5(0,280)	714	6,457-5 (0,290);	0,3
		5,589-5 (0,700)		5,590-5(0,680)	
		8,612-5(1,000)		8,518-5 (1,000)	
	162	2,942-4 (1,000)	163	3,094-4 (1,000)	0,61
0,100	966	3,540-6 (0,460)	1020	3,204-6 (0,475)	5,6
		4,782-6 (1,000)		4,450-6 (1,000)	
	2522	3,412-7 (0,280)	2856	2,522-7 (0,290)	13,3
		2,783-7 (0,680)		2,195-7 (0,690)	
		4,156-7 (1,000)		3,327-7 (1,000)	
	241	1,291-4 (1,000)	244	6,209-5 (1,000)	1,25
0,150	1357	7,986-7(0,460)	1530	6,333-7 (0,470)	12,7
		1,048-6 (1,000)		8,791-7 (1,000)	
	3349	8,981-8 (0,280)	4285	4,984-8 (0,290)	27,9
		7,444-8 (0,680)		4,326-8 (0,690)	
		1,020-7 (1,000)		6,574-8 (1,000)	
	390	8,653-7 (1,000)	407	8,067-6 (1,000)	4,36
0,250	1916	1,428-7 (0,460)	2549	8,187-8 (0,470)	33,0
		1,714-7 (1,000)		1,139-7 (1,000)	
	4329	2,043-8 (0,260)	7141	6,439-9 (0,290)	64,9
		1,669-8 (0,680)		5,612-9 (0,690)	
		2,044-8 (1,000)		8,520-9 (1,000)	

Данные таблицы свидетельствуют о том, что теория Кирхгофа достаточно точно определяет первую критическую частоту и соответствующие ей максимальные значения амплитуды прогиба для всего диапазона рассмотренных значений  $h_0$ . Однако с увеличением номера критической частоты и относительной толщины  $h_0$  погрешность классической теории быстро возрастает.



Форму деформированной срединной плоскости пластинки для  $h_0 = 0,100$  при значениях  $\omega_k$  ( $k = \overline{1,3}$ ) иллюстрируют графики, показанные на рис. 1. На этом рисунке сплошными линиями изображены графики функций  $W_i^{(1)}(\xi) =$  $= k_i w_1(\xi,0)$ , где кривая I соответствует значениям  $\omega = \omega_1$ ,  $k_1 = 10^4$ ; кривая  $2 - \omega = \omega_2$ ,  $k_2 = 10^6$ ; кривая  $3 - \omega = \omega_3$ ,  $k_3 =$  $= 10^7$ ; аналогичные графики для  $W_i^{(2)}(\xi) = 0,3k_i w_2(\xi,0)$  ( $i = \overline{1,3}$ ) при тех

же значениях  $\omega$  и  $k_i$  показаны пунктиром. Для других значений  $h_0$  графики получаются качественно подобными.

Вид колебаний пластинки зависит от значений толщины  $h_0$  и частоты  $\omega$ . При  $\omega = \omega_1$  и  $h_0 \le 0,250$  колебания будут чисто изгибными [3]: сечения  $\xi = \text{const}$  при деформации остаются плоскими, а составляющие тангенциального смещения u и нормального напряжения  $\sigma_x$  линейно меняются по толщине (слабая нелинейность составляющей  $\sigma_x^{(2)}$  наблюдается при  $h_0 \ge 0,125$  только в сечении  $\xi = 0,1$ ). При  $h_0 < 0,125$  величины  $w_1, w_2 \approx \text{const}$ , а при  $h_0 \ge 0,125$  и  $\xi \le 0,3$  незначительно меняются по толщине, оставаясь практически постоянными при  $\xi > 0,3$ ; напряжения  $\sigma_z$ .

Иная картина колебаний получается при  $\omega = \omega_2$ . В тонких пластинках  $(h_0 < 0,075)$  колебания в любой момент времени *t* будут чисто изгибными при практически постоянных  $w_1$  и  $w_2$ . В пластинках средней толщины  $(0,075 \le h_0 \le 0,125)$  становятся заметными изменения по толщине величин  $w_1$ ,  $w_2$  и слабая нелинейность (при  $\xi < 0,3$ ) составляющей  $\sigma_x^{(1)}$ . В толстых пластинках  $(h_0 \ge 0,150)$  картина колебаний еще более усложняется. В окрестности отдельных сечений закон изменения по  $\varsigma$  величин  $u_1$  и  $\sigma_x^{(1)}$  становится несимметричным относительно срединной плоскости, а  $w_1$  может сильно изменяться по толщине при постоянных или почти постоянных значениях  $w_2$ . При этом составляющие напряжений  $\sigma_x$  и  $\sigma_z$  становятся величинами одного порядка. Иллюстрацией сказанному могут служить приведенные на рис. 2 и рис. 3 графики изменения по  $\varsigma$  составляющих u, w,  $\sigma_x$  и  $\sigma_z$  в сечении  $\xi = -0,2$  при  $h_0=0,175$ ,  $\omega = \omega_2$ . На рис. 2 показаны графики величин  $10^{10}u_1$  – кривая I,  $10^7u_2$  – кривая  $2, 10^{10}w_1$  – кривая  $3 и 10^7w_2$  – кривая 4. Аналогично на рис. 3 пронумерованы графики величин  $\sigma_x^{(1)}$ ,  $\sigma_x^{(2)}$ ,  $\sigma_z^{(1)}$  и  $\sigma_z^{(2)}$ . Поэтому в толстых пластинках при второй критической частоте колебания можно идентифицировать как планарно-изгибные при  $t = t_i^{(2)}$  (сок  $\omega t_i^{(1)} = 1$ ) и изгибно-планарные при  $t = t_i^{(2)}$  (sin  $\omega t_i^{(2)} = 1$ ).

При дальнейшем увеличении частоты  $\omega$  чисто изгибная форма колебаний сохраняется вплоть до значения  $\omega = \omega_3$  только для очень тонких пластинок ( $h_0 \le 0,025$ ). Однако уже при  $h_0 = 0,05$  появляется заметная асимметрия изменения по толщине составляющих  $u_k$ , которая усиливается с ростом  $\omega$ . При  $h_0 \ge 0,075$  в некоторых сечениях для тангенциального перемещения u появляется значительная планарная

в направлении *х* составляющая, вызывающая в этих сечениях смещение со срединной поверхности точек, где  $u_k = 0$ . Это смещение может происходить как в сторону положительных, так и отрицательных значений  $\varsigma$ ; в некоторых сечениях  $u_k$  вообще не меняют знак.



В пластинках с толщиной  $h_0 \ge 0,100$  при некоторых значениях  $\omega$  в окрестности отдельных сечений возникает эффект "подтягивания", когда в этих сечениях точки  $\zeta = \pm 1/2$  перемещаются навстречу друг другу, или "разбухания" – смещение точек происходит в противоположных направлениях. С увеличением  $h_0$  диапазон значений ω и соответствующие зоны "подтягивания" и "разбухания" значительно увеличиваются. Например, при  $h_0 = 0,100$  "подтягивание" в моменты времени  $t = t_i^{(1)}$  в сечении  $\xi = 0,1$  наблюдается при частотах  $\omega = 1685 \div 1703$  с<sup>-1</sup>. При этом величины  $u_1$  в сечении  $\xi = 0.6$  и  $u_2$  в сечениях  $\xi = 0.7 \div 1.0$  не меняют знак. В пластинках с относительной толщиной  $h_0 = 0,150$  "подтягивание" в окрестности сечения  $\xi = 0,150$ в моменты  $t = t_i^{(1)}$  наблюдается при  $\omega = 2195 \div 2550 \text{ с}^{-1}$ , причем в моменты  $t = t_i^{(2)}$ при  $\omega = 2240 \div 2260 \text{ c}^{-1}$  происходит "разбухание" в окрестности сечений  $\xi = 0.6$ . При дальнейшем увеличении частоты (  $\omega = 2370 \div 2380 \text{ c}^{-1}$ ) зона "разбухания" при  $t = t_i^{(2)}$  расширяется до окрестности сечений  $\xi = 0,6$  и  $\xi = 0,7$ . В диапазоне частот  $\omega = 2390 \div 2420 \text{ c}^{-1}$  "разбухание" происходит около сечений  $\xi = 0,5, 0,6$  и 0,9, а для частот  $\omega = 2650 \div 2890 \text{ c}^{-1}$  – при  $\xi = 0,3 \div 0,9$ . При частотах  $\omega = 2650 \div 2890 \text{ c}^{-1}$ зона "разбухания" сокращается до окрестности сечения  $\xi = 0.5$ .

Графики, иллюстрирующие "подтягивание" и "разбухание", для  $h_0 = 0,150, \omega = 2500 \text{ c}^{-1}, \xi = 0,1$  приведены на рис. 4, где кривая *I* соответствует значениям  $10^9 w_1$ ,

кривая  $2 - 10^9 w_2$ , кривая  $3 - 10^9 u_1$  и кривая  $4 - 10^9 u_2$ . Приведенные данные объясняются сложным волновым характером колебательного процесса с существенным преобладанием планарной составляющей в направлении оси x.

При  $\omega = \omega_3$ ,  $h_0 \ge 0.05$  в моменты времени  $t = t_i^{(1)}$  в колебаниях сохраняется достаточно большая планарная составляющая. Об этом свидетельствует рис. 5, на котором изображены графики изменения по толщине пластинки с  $h_0 = 0.05$ величин  $10^9 u_1(\xi;\varsigma)$  для значений  $\xi = 0.4$ 



Рис. 4



- кривая 1,  $\xi = 0,6$  - кривая 2 и  $\xi = 0,8$  кривая 3. При этом в моменты времени  $t = t_i^{(2)}$  по-прежнему сохраняется изгибная форма с близким к линейному законом изменения  $u_2$  и мало меняющимися по толщине значениями  $w_2$ .

В заключение следует отметить, что перечисленные выше эффекты (наличие большой планарной составляющей, "подтягивание" и "разбухание" в отдельных сечениях), которые не могут быть описаны в рамках классической теории, происходят при очень низких уровнях НДС по сравнению с соответствующими значениями при критических частотах.

#### Литература

1. *Недорезов, П.Ф.* Установившиеся поперечные колебания вязкоупругой пластинкиполосы / П.Ф. Недорезов // Теоретическая и прикладная механика: Научно-техн. сб. / Харьков: Основа, 2002. – Вып. 35. – С. 139–146.

2. *Недорезов*, *П.Ф.* О колебаниях толстой вязкоупругой пластинки-полосы, свободно опертой по краям / П.Ф. Недорезов // Нелинейная динамика механических и биологических систем: Межвуз. науч. сб. / Саратов: Изд-во СГТУ. – 2004. – Вып. 2. – С. 20–27.

3. *Недорезов, П.Ф.* Применение метода сплайн-коллокации в задачах о колебаниях толстой вязкоупругой пластинки-полосы / П.Ф. Недорезов // Известия Саратовского университета. Новая серия. 2006. Т. 6. Серия Математика. Механика. Информатика. Вып. 1/2. – С. 58–66.

4. *Григоренко, Я.М.* Решение задач теории пластин и оболочек с применением сплайнфункций: Обзор / Я.М. Григоренко, Н.Н. Крюков // Прикладная механика.– 1995. – **31**, №6. – С. 3–26.

5. *Недорезов, П.Ф.* Модифицированный метод сплайн-коллокации в задачах изгиба прямоугольных пластинок / П.Ф. Недорезов, Ю.В. Шевцова, О.М. Ромакина // Математическое моделирование и краевые задачи: Тр. 2-й Всерос. науч. конф. / Самарск. гос. техн. ун-т. – Самара, 2005. – Ч. 1.– С. 203–209.

6. *Недорезов, П.Ф.* Об учете поперечных сдвигов и инерции вращения при вибрационном изгибе вязкоупругой пластинки-полосы / П.Ф. Недорезов // Механика деформируемых сред: Межвуз. науч. сб. / Саратов: Изд-во СГУ. – 2002. – Вып. 14. – С. 144–151.

[05.02.2007]

### VIBRATORY BENDING OF THICK VISCOELASTIC CANTILEVER PLATE-STRIPE UNDER DISTRIBUED SHEARING LOAD

#### P.F. Nedorezov

The steady-state vibration of thick viscoelastic cantilever plate-stripe under distributed shearing vibratory load was explored numerically with modified spline collocation method. The computations indicated that the first critical frequency and its corresponding shape of the bent surface can be determined according to classical Kirchhoff's theory with high accuracy. At higher frequencies new effects, which can't be described in the context of Kirchhoff's theory, in thick plates appears.