

УДК 531/539.3

DOI: 10.32326/1814-9146-2026-88-1-5-19

**МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ  
МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ  
НА ОСНОВЕ ЧИСЛЕННО-ЦИФРОВОГО ПОДХОДА\***

© 2026 г. **Хамзин Д.Э., Беспалов И.А., Герасимов О.В.**

*Казанский (Приволжский) федеральный университет,  
Казань, Российская Федерация*

kde1260@gmail.com

*Поступила в редакцию 17.08.2025*

Рассматривается задача топологической оптимизации механических свойств материала на основе численно-цифрового подхода, предполагающего интеграцию методов численного моделирования и цифрового прототипирования. В центре внимания находится стандартная реализация метода SIMP (Solid Isotropic Material with Penalization), а также его улучшенная версия. Улучшение заключается в применении интерполирующих функций для аппроксимации плотности материала, что позволяет перейти от кусочно-постоянного к непрерывному распределению, которое обеспечивает сглаженное представление топологии конструкции. В качестве численного эксперимента исследуется задача трехточечного изгиба балки прямоугольного поперечного сечения. Расчеты проводятся для трех различных расчетных решеток, что дает возможность оценить влияние степени дискретизации на результаты и сравнить эффективность стандартного и улучшенного подходов. На каждой итерации фиксируется распределение плотностей, формирующее воксельную модель цифрового прототипа, которая может быть использована при аддитивном производстве. Эффективность алгоритма оценивается на основе функционала внутренней энергии деформации. Показано, что использование интерполирующих функций снижает значение функционала на 2–4% и обеспечивает более устойчивую сходимость по сравнению с классическим SIMP. Полученные результаты подтверждают практическую значимость метода, позволяющего формировать оптимизированные структуры с высокой жесткостью при сохранении заданного объема материала. Установлено, что улучшенный подход снижает вычислительные затраты и ускоряет процесс оптимизации за счет меньшего количества итераций, что особенно важно для задач высокой размерности. Предложенный метод может быть эффективно применен в машиностроении, медицинской инженерии и аддитивных технологиях.

*Ключевые слова:* топологическая оптимизация, SIMP, цифровой прототип, метод конечных элементов.

---

\* Выполнено за счет гранта РФ №25-21-00434.

## Введение

Развитие современных методов производства материалов позволяет получать конструкции с заданными механическими свойствами. Один из способов изготовления сложно структурных изделий – применение аддитивных технологий [1–3], преимуществом которых является возможность моделирования оптимального пространственного распределения материала с учетом воздействия нагрузок, близких к эксплуатационным [4–6]. В этом случае применяются методы численного моделирования, основанные на построении цифровых прототипов объектов. На практике построение цифровых прототипов для готовых изделий предполагает использование методов неразрушающего контроля и дает возможность оценивать прочностные показатели конструкции с учетом неоднородного распределения механических параметров среды. Интеграция методов численного моделирования и цифрового прототипирования позволяет проводить структурную оптимизацию распределения материала изделий согласно требуемым параметрам их изготовления и эксплуатации (например, вес, прочность, геометрия и т.п.), что оказывается актуальной задачей механики деформируемого твердого тела.

Одним из ключевых направлений в современном инженерном проектировании выступает топологическая оптимизация [7–13] изделий, позволяющая сохранить или значительно улучшить их прочностные свойства при минимизации массы. Этот эффект достигается за счет изменения внутренней структуры и геометрических показателей образцов согласно варьируемым параметрам численной модели и позволяет исследовать принципиально новые конфигурации материала, получение которых на основе классических подходов к инженерному проектированию оказывается трудоемким и дорогостоящим. Одним из методов топологической оптимизации является метод SIMP (Solid Isotropic Material with Penalization) [7, 8], основная идея которого заключается во введении функции плотности материала, определяющей распределение материала, и коэффициента пенализации промежуточных значений, обеспечивающего бинарные свойства результирующей среды. Таким образом, применение штрафного параметра, способствующего приближению решения к бинарному распределению «материал – пустота» определяет SIMP как один из наиболее эффективных методов в топологической оптимизации. В сравнении с другими методами, такими как метод уровней множеств (Level Set Method) [9] и метод эволюционной структурной оптимизации (ESO и BESO) [10, 11], SIMP обладает рядом преимуществ. В отличие от метода уровней множеств SIMP не требует отслеживания границ между материалом и пустотой, что упрощает вычислительную реализацию. По сравнению с ESO/BESO, в котором элементы полностью удаляются из расчета, SIMP обеспечивает более устойчивую сходимости благодаря плавному изменению плотности. Алгоритмически SIMP также удобен для интеграции с современными методами оптимизации [14, 15] и позволяет включать различные типы ограничений (например, ограничения на объем, максимальные перемещения, теплопроводность), что делает его универсальным инструментом для широкого спектра инженерных задач [16].

Реализация метода топологической оптимизации SIMP может быть выполнена на основе одного из сеточных методов. На практике распространение получил метод конечных элементов, с помощью которого проводится дискретизация расчетной области и последующий расчет путем определения поля перемещений в узлах сетки и постпроцессорный анализ напряженно-деформированного состояния. Таким образом, интеграция классического метода SIMP и метода конечных элементов позволяет

моделировать распределение материала в среде на уровне отдельного конечного элемента сетки. В этом случае точность численного моделирования напрямую зависит от степени дискретизации расчетной области и порядка интерполирующих функций. Недостатком представленного метода топологической оптимизации является необходимость в построении сеток с применением множества конечных элементов для достижения высокой точности результатов, что приводит к образованию большой размерности системы и требует значительных вычислительных ресурсов.

В настоящей статье предлагается новое улучшение метода SIMP на основе введения для каждой ячейки объема интерполирующих функций распределения плотности среды, порядок которых соответствует аппроксимирующим функциям конечного элемента. Такой подход дает возможность перейти от кусочно-постоянного распределения свойств материала к непрерывно-линейчатому представлению, это обеспечивает сглаживание результирующей геометрии изделий с учетом их структурной оптимизации. В этом случае используется модифицированный метод конечных элементов, учитывающий моделируемую локальную неоднородность материала на уровне отдельного конечного элемента [17]. К преимуществам улучшенного метода SIMP можно отнести быструю сходимость относительно стандартного подхода. Совместное применение улучшенного метода SIMP и модифицированного метода конечных элементов аналогично предполагает бинаризацию материала и позволяет проводить построение цифрового прототипа с кусочно-однородным распределением механических свойств. На практике точность цифрового прототипа, построенного по данным с изображений, устанавливается разрешающей способностью сканирующего устройства, используемого при применении методов неразрушающего контроля (например, проведение компьютерной томографии). Таким образом, в качестве исходных объектов моделирования могут выступать натурные образцы, проектирование которых предполагает получение снимков заданной точности с установлением неоднородного распределения механических параметров среды. На основе полученных изображений может быть выполнено внедрение дополнительных конструкций (например, имплантатов в биомедицине) или проведена прямая топологическая оптимизация для улучшения механических показателей образца.

Научная новизна статьи заключается в разработке и практической реализации улучшенного метода топологической оптимизации SIMP, предполагающей в отличие от классического подхода непрерывное распределение материала в конечных элементах, что приводит к улучшению сходимости результатов, требует меньших вычислительных ресурсов и позволяет более точно проектировать структурные свойства материала, обеспечивая оптимальные прочностные параметры конструкции. Цель статьи – разработка и реализация улучшенного метода топологической оптимизации SIMP с использованием интерполирующих функций, а также проведение сравнительного анализа его с классическим подходом на основе численного моделирования и натурных экспериментов.

В статье показано применение улучшенного метода SIMP для решения задачи топологической оптимизации трехмерной балки постоянного прямоугольного поперечного сечения, находящейся в условиях воздействия трехточечного изгиба. Решение задачи предполагает построение цифрового прототипа на основе воксельной модели, который делает возможным получение детального представления результирующей геометрии для дальнейшего аддитивного производства. Особое внимание уделяется сравнению метода SIMP в стандартной постановке с его улучшенной версией,

использующей интерполирующие функции для сглаживания распределения механических параметров в среде. Кроме того, исследуется влияние степени дискретизации расчетной сетки на качество получаемых результатов: оценка эффективности двух подходов выполняется на основе численного моделирования с использованием трех сеток различной точности. Таким образом, представленный в статье подход обеспечивает лучшую сходимость решения и позволяет получать оптимизированные структуры, обладающие высокой жесткостью при ограниченном объеме материала, что имеет существенное значение для ряда практических приложений в области машиностроения, медицинской инженерии и других отраслях промышленности, где важен точный контроль над показателями прочности изделий с учетом их поведения в условиях эксплуатации.

### Материалы и методы

В классическом подходе метода SIMP рассматривается топологическая оптимизация изделий, предполагающая изменение структуры материала. В этом случае каждый микроэлемент сплошной среды соответствует изотропной модели, а оптимальная неоднородность механических свойств возникает в силу неравномерного распределения фаз среды. В основе методов топологической оптимизации лежит минимизация функционала, определяющая оптимальное распределение механических показателей в среде. В общем виде функционал может быть представлен как:

$$J = \frac{1}{2} \int_{\Omega} f(\theta(\{x\}), u(\{x\})) dV - \int_{\Gamma_N} g(\theta(\{x\}), u(\{x\})) dS, \quad (1)$$

$$0 < \theta_{\min} < \theta(\{x\}) \leq 1, \quad \forall \{x\} \in \Omega,$$

где  $f(\theta(\{x\}), u(\{x\}))$  и  $g(\theta(\{x\}), u(\{x\}))$  – подынтегральные функции для определения внутренней и внешней работы;  $\Omega$  – рабочая область, подвергаемая оптимизации;  $\Gamma_N$  – часть границы рабочей области, на которой приложены нагрузки;  $\theta(\{x\})$  – функция, устанавливающая плотность материала в точке, заданной радиусом-вектором сплошного пространства  $\{x\}$ ;  $u(\{x\})$  – поле перемещений;  $\theta_{\min}$  – минимальное значение плотности для предотвращения вырождения расчетных матриц.

Выбор функционала для минимизации определяется сеточным методом, используемым для численного моделирования. Решение на основе метода конечных элементов позволяет получать перемещения в расчетных узлах сетки, а также проводить оценку напряженно-деформированного состояния образца. Таким образом, в качестве функционала для минимизации может быть выбрана внутренняя энергия, представляемая в виде:

$$J = \frac{1}{2} \int_{\Omega} [[[\varepsilon(\{x\})]]] : [[[\sigma(\{x\})]]] dV \rightarrow \min, \quad (2)$$

где  $[[[\varepsilon(\{x\})]]]$  – тензор деформаций,  $[[[\sigma(\{x\})]]]$  – тензор напряжений.

Используя принцип гомогенизации, физические соотношения можно переписать в виде:

$$[[[C(\{x\})]]] = \theta(\{x\}) \cdot [[[C_0]]], \quad (3)$$

$$[[[\varepsilon(x)]]] = (\theta(\{x\}) \cdot [[[C_0]])^{-1} :: [[[\sigma(\{x\})]]],$$

где  $[[C(\{x\})]]$  – тензор упругости рассматриваемой среды, а  $[[C_0]]$  – тензор упругости исходного материала.

Тогда на основании (2) можно сформулировать задачу минимизации функционала как:

$$J = \min_{\theta} \int_{\Omega} [[[\sigma(\{x\})]] : (\theta(\{x\}) \cdot [[C_0]])^{-1} : [[[\sigma(\{x\})]]] dV. \quad (4)$$

С практической точки зрения необходимо контролировать количество материала в изделии. В этом случае используется значение средней плотности, определяемое согласно формуле:

$$\langle \theta \rangle = \frac{1}{V} \int_{\Omega} \theta(\{x\}) dV, \quad (5)$$

где  $\langle \theta \rangle$  – требуемое значение средней плотности. Таким образом, устанавливая среднюю плотность изделия согласно выражению (5), учет необходимого количества материала можно выполнить с помощью метода множителей Лагранжа. Тогда итоговый функционал с ограничением будет иметь вид:

$$J = \min_{\theta, \sigma} \int_{\Omega} [[[\sigma(\{x\})]] : (\theta(\{x\}) \cdot [[C_0]])^{-1} : [[[\sigma(\{x\})]]] dV + \lambda \left( \frac{1}{V} \int_{\Omega} \theta(\{x\}) dV - \langle \theta \rangle \right). \quad (6)$$

Ключевой особенностью стандартного метода SIMP является введение коэффициента пенализации [7, 18], позволяющего получать бинаризованные модели материалов. С учетом выбора функционала для минимизации в виде (6) параметрами оптимизации могут быть упругие свойства, однозначно определяемые в качестве тензора упругости материала в общем виде. В этом случае определение механических свойств в каждой точке среды предполагает, что функция плотности материала соответствует коэффициенту отношения компонент тензора упругости  $[[C_0]]$  исходного материала к компонентам тензора оптимизированной среды в виде:

$$[[C(\{x\})]] = \theta(\{x\})^p \cdot [[C_0]], \quad (7)$$

$$E(\{x\}) = \theta(\{x\})^p \cdot E_0, \quad (8)$$

где  $p$  – коэффициент пенализации, выступающий в качестве штрафного параметра, который приближает решение к распределению «материал – пустота».

Определение функции  $\theta(\{x\})$  и коэффициента пенализации  $p$  выполняется в ходе итерационной процедуры, сходимость которой устанавливается приведением используемого материала к неизменяющейся структуре. Используя постановку задачи топологической оптимизации (6), выведем условие оптимальности по  $\theta$ :

$$\theta_{n+1} = \min \left\{ 1, \max \left\{ \theta_{\min}, \left( \frac{V p_n e(U_n)}{\lambda} \right)^{1/(p_n+1)} \right\} \right\}, \quad (9)$$

где  $e(U_n) = \{U_n\}^T [K^E] \{U_n\}$ ;  $[K^E]$  – локальная матрица жесткости,  $\{U_n\}$  – вектор узловых перемещений текущего элемента, индекс  $n$  – номер итерации.

Для улучшения метода SIMP предположим, что коэффициент пенализации  $p = 1$ ,

также введем аппроксимацию распределения плотностей между узлами с помощью трилинейных функций формы вида:

$$\theta_{n_i}(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8}(1 + \xi \cdot \theta_{n_i}^{\xi})(1 + \eta \cdot \theta_{n_i}^{\eta})(1 + \zeta \cdot \theta_{n_i}^{\zeta}). \quad (10)$$

Применение функций формы требует нахождения узловых плотностей, с помощью которых в дальнейшем определяется линейчатое распределение плотности для каждого конечного элемента сетки, это позволяет получать непрерывное изменение механических свойств во всем изделии. Стоит отметить, что условие оптимальности (9) получается путем взятия производной по функции распределения плотности и не зависит от выбора аппроксимирующей функции.

Получив новое распределение плотности с помощью аппроксимирующих функций, необходимо использовать модифицированный метод конечных элементов [17, 19–21] для локального учета линейчатого распределения материала в каждом конечном элементе. За основу был взят метод прямого учета структурной анизотропии материала при построении численной модели на основе цифрового прототипа объекта [19, 22–25]. В этом случае создается растровое трехмерное изображение объекта, которое называется цифровым прототипом. Каждая точка этого изображения обладает физическим смыслом – локальной плотностью и используется при интегрировании локальной матрицы жесткости. В случае описанной выше топологической оптимизации цифровой прототип содержит в себе изменяемое на каждой итерации распределение плотности изделия. В дальнейшем будем называть данные цифрового прототипа воксельной моделью.

Локальная матрица жесткости конечного элемента может быть представлена в виде [25]:

$$[K^E] = \int_{-1}^1 [B(\{\varphi\})]^T [D(\{\varphi\})] [B(\{\varphi\})] d\varphi, \quad (11)$$

где  $\{\varphi\}$  – вектор пространственных координат, а матрица упругих констант  $[D(\{\varphi\})]$  модифицируется по аналогии с соотношением (4).

В результате работы представленного алгоритма моделируется новое распределение плотностей. Для каждой итерации рассматриваемой задачи сохраняется значение функционала  $J(6)$ . Итоговая геометрия определяется в виде трехмерного массива данных, где каждое значение соответствует плотности одного вокселя. Таким образом, метод ориентирован на твердые упруго-изотропные материалы и может быть применен в инженерии и биомедицине на основе аддитивного производства.

## Результаты

Выполнена структурная оптимизация балки, находящейся в условиях трехточечного изгиба. Исходная геометрия представляет собой прямоугольную область с одним характеристическим параметром, равным отношению длины стороны квадратного поперечного сечения к длине балки, значение которого составляет 1/4. Воксельная модель определялась разрешением  $100 \times 100 \times 400$  вокселей. Схема нагружения балки приведена на рис. 1. Аппроксимация геометрии выполнялась на основе трех расчетных сеток различной степени дискретизации с применением  $5 \times 5 \times 20$  (модель 1),  $10 \times 10 \times 40$  (модель 2) и  $20 \times 20 \times 80$  (модель 3) конечных элементов в направлении осей  $Ox$ ,  $Oy$  и  $Oz$  соответственно. Рассмотренные расчетные сетки обеспе-

чивали наличие узлов в геометрическом месте приложения кинематических и статических граничных условий на основе введенного коэффициента  $k$ , равного 1 для первой модели, 2 и 4 – для второй и третьей моделей соответственно. Каждая численная модель рассматривалась в стандартной и модифицированной постановках реализованного метода. Таким образом, в ходе работы решено 6 задач. Целевым параметром выступал объем упругого материала, соответствующий 40% от исходного объема конструкции.

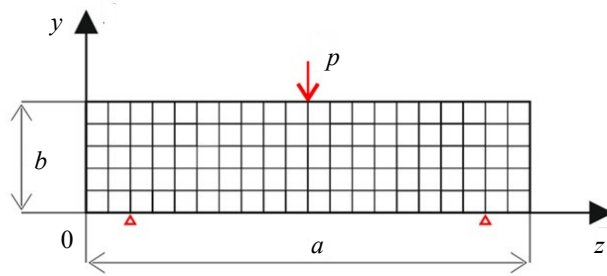


Рис. 1. Схематичное изображение балки с граничными условиями

Расчетная область  $\Omega$  определялась в виде:

$$\Omega : x, y \in [0, 5k], \quad z \in [0, 20k].$$

Тогда кинематические граничные условия можно выразить как:

$$\{u(\{x\})\} = 0, \quad \forall \{x\} : x = [3k] \cup [17k], \quad y = 0, \quad z \in \partial\Omega,$$

где  $\partial\Omega$  – граница области  $\Omega$ .

Статические граничные условия использовались в виде:

$$\int_{\Gamma_N} [[\sigma(\{x\})]] \{n\} dS = \left( 0, -\frac{p}{20k}, 0 \right), \quad \forall \{x\} : x = [0, 5k], \quad y = 5k, \quad z \in \partial\Omega, \quad (12)$$

где  $p$  – нагрузка, прикладываемая к изделию;  $\Gamma_N$  – область приложения нагрузки;  $k$  – коэффициент, зависящий от выбора сетки.

Рассмотрим результаты расчетов для образцов, соответствующих модели 1. На рис. 2а показана итоговая структура для стандартной постановки, на рис. 2б – структура улучшенного метода SIMP.

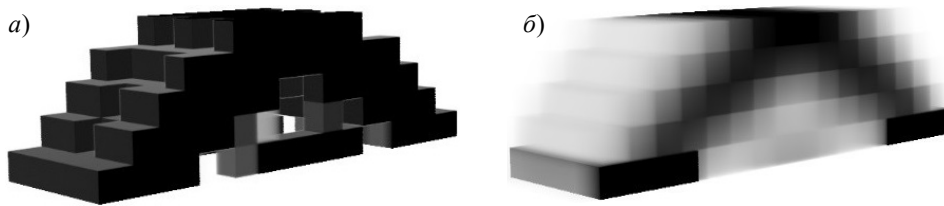


Рис. 2. Образец, полученный стандартным методом (а);  
образец, полученный улучшенным методом (б)

Чем прозрачнее конечный элемент на изображении, тем ближе значение плотности к нулю. В стандартной постановке наблюдается преобладающая бинарная структура материала, тогда как в улучшенном методе отмечается линейчатый вид распределения плотности. Кроме того, линейчатый вид сохраняется и внутри конечных элементов,

что позволяет на основе улучшенного метода конечных элементов учитывать локальную неоднородность среды.

Сравнивая значения функционала внутренней энергии деформации (рис. 3), можно заметить, что на начальном этапе оптимизации наблюдается стабильное снижение величины функционала, что отражает эффективную минимизацию внутренней энергии деформации системы. Использование функций форм уменьшило внутреннюю энергию деформации на 2%, а также уже на 6-й итерации было получена итоговая геометрия изделия в отличие от стандартного метода, где для получения конечного варианта было произведено свыше 70 итераций. На графике функционала (см. рис. 3) для стандартной постановки задачи наблюдаются скачки значений после 20-й итерации, которые повторяются при проведении расчетов на основе моделей 2 и 3. Это объясняется обновлением коэффициента пенализации относительно количества промежуточных значений плотности, что способствует принудительному приближению решения к бинарному распределению фаз среды.

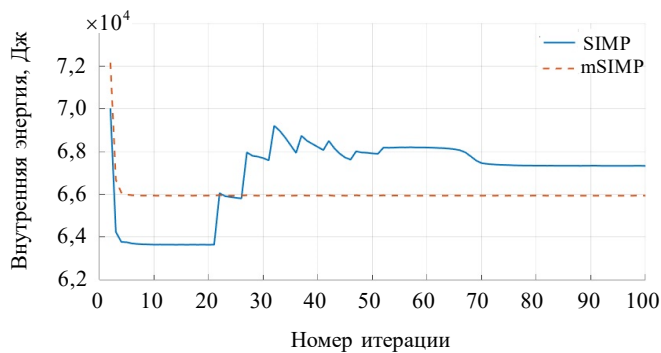


Рис. 3. Зависимость внутренней энергии деформации от номера итерации

Рассмотрим результаты оптимизации для сетки с более высокой степенью дискретизации (рис. 4). При визуальном сравнении с результатами второй модели заметно усложнение полученной оптимальной структуры, которое приводит к более высокой детализации несущих элементов балки и позволяет эффективнее распределить материал в соответствии с действующими нагрузками.

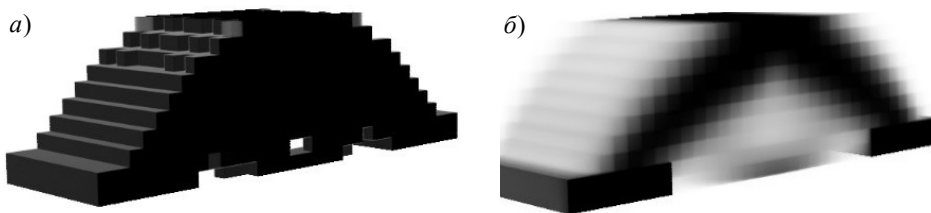


Рис. 4. Образец, полученный стандартным методом (а); образец, полученный улучшенным методом (б)

Анализируя зависимость внутренней энергии деформации от номера итерации (рис. 5), можно заметить, что итоговое значение функционала для модифицированного метода SIMP уменьшилось на 3,5% и итоговая геометрия также была получена после 6-й итерации.

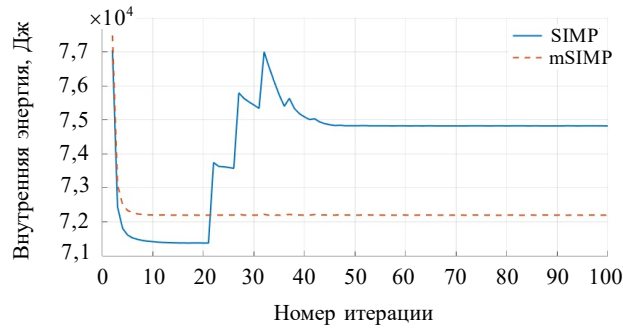


Рис. 5. Зависимость внутренней энергии деформации от номера итерации

Перейдем к рассмотрению результатов топологической оптимизации для третьей модели. Итоговая геометрия для данной расчетной сетки представлена на рис. 6а для стандартной постановки и на рис. 6б для улучшенного метода SIMP. Повышенная дискретизация позволяет лучше адаптировать геометрию к особенностям напряженно-деформированного состояния балки при трехточечном изгибе, что проявляется в формировании дополнительных несущих элементов и более эффективном их размещении в объеме конструкции. В стандартной постановке наблюдается четкое разделение на области с материалом и без него, при этом сформировавшаяся структура имеет более сложную топологию, оптимально воспринимающую действующую нагрузку. В улучшенном методе визуально заметно более плавное распределение плотности с градиентными переходами между элементами конструкции.

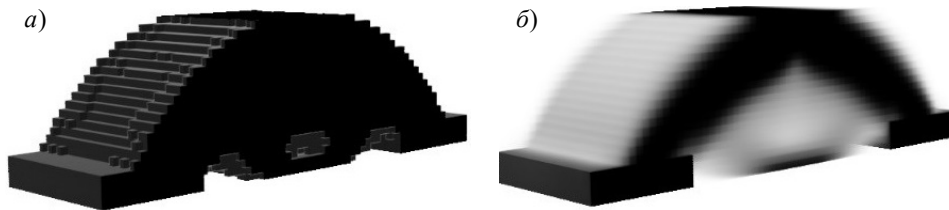


Рис. 6. Образец, полученный стандартным методом (а); образец, полученный улучшенным методом (б)

Анализ графика зависимости внутренней энергии деформации от номера итерации (рис. 7) показывает, что для сетки с высокой степенью дискретизации значение функционала в модифицированном методе SIMP оказывается меньше на 4%, это свидетельствует о большей жесткости изделия.

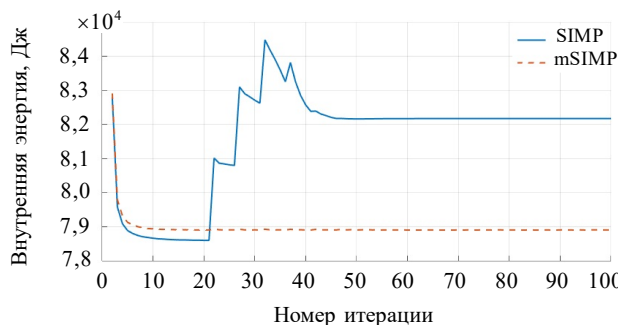


Рис. 7. Зависимость внутренней энергии деформации от номера итерации

Стоит отметить, что на получение итоговой геометрии для улучшенного метода SIMP понадобилось в 7 раз меньше итераций. Полученная для модели 3 оптимальная структура представляет собой наиболее точное приближение к теоретически оптимальному распределению материала в рамках заданных граничных условий и ограничениях на объем.

Результаты численного моделирования демонстрируют существенное влияние степени дискретизации расчетной сетки на итоговую топологию оптимизированной структуры и значение целевого функционала. Сопоставительный анализ результатов, полученных на трех различных сетках, позволяет сделать следующие выводы.

Для модели 1 оптимизированная структура характеризуется относительно простой геометрией с ограниченным числом несущих элементов. При этом стандартная постановка метода SIMP демонстрирует четкое бинарное распределение материала, тогда как в улучшенном методе присутствует линейчатое распределение плотности. С увеличением конечно-элементной сетки до  $10 \times 10 \times 40$  элементов наблюдается усложнение оптимальной структуры, что позволяет более эффективно распределить материал в соответствии с действующими нагрузками. Дополнительное количество конечных элементов обеспечивает формирование более детализированной системы несущих элементов балки. Наиболее информативные результаты получены для модели 3. Повышенная дискретизация позволяет оптимально адаптировать геометрию к особенностям напряженно-деформированного состояния балки при трехточечном изгибе, что проявляется в формировании дополнительных несущих элементов и их эффективном размещении в объеме конструкции. Важно отметить, что при использовании улучшенного метода SIMP в зависимости от выбора сетки значение внутренней энергии деформации уменьшилось на 2–4%.

Таким образом, увеличение детализации расчетной сетки приводит к существенному усложнению оптимальной топологии конструкции и позволяет более эффективно распределить материал для сопротивления заданной нагрузке. Во всех рассмотренных случаях удалось достичь целевого параметра по объему материала (40% от исходного объема), что подтверждает эффективность применяемых методов оптимизации для решения поставленной задачи. Улучшенная версия метода SIMP требует значительно меньшего количества итераций алгоритма и обеспечивает меньшее значение функционала внутренней энергии по сравнению со стандартным подходом. Полученные оптимизированные воксельные модели имеют непосредственную практическую значимость для аддитивного производства и могут быть напрямую использованы для изготовления методом стереолитографии.

## **Заключение**

Проведена топологическая оптимизация балки квадратного поперечного сечения при трехточечном изгибе с использованием улучшенного метода SIMP. Основное достижение состоит в применении функций формы для аппроксимации плотности материала, которые позволили повысить эффективность оптимизации. Показано, что такая модификация увеличивает сходимость метода и приводит к снижению функционала внутренней энергии деформации на 2–4% относительно классического подхода при сохранении заданного объема материала.

Анализ динамики сходимости алгоритма показывает быстрый выход на плато целевой функции, что свидетельствует об эффективности выбранного метода оптимизации и его практической применимости с точки зрения вычислительных затрат.

В большинстве случаев значительное улучшение целевой функции происходило в течение первых 10–15 итераций, после чего наблюдалась стабилизация процесса. Это особенно важно при решении задач большой размерности, характерных для практических приложений.

К особенностям представленного улучшенного метода SIMP можно отнести применение линейной модели упругости и одного критерия минимизации по функции плотности, что ограничивает рассмотрение нелинейных эффектов и других эксплуатационных факторов. Преимуществом подхода является возможность локального учета неоднородности материала, это позволяет использовать в расчетах сетки меньшего размера. Таким образом, вычислительная сложность метода в большей степени зависит от точности воксельной сетки, позволяющей применять представленный алгоритм для решения задач на основе моделей высокого разрешения.

Дальнейшие исследования могут быть связаны с расширением метода на многокритериальную и многоматериальную оптимизацию, с учетом нелинейных свойств материала и технологических ограничений аддитивного производства. Перспективно интегрировать SIMP с другими подходами (уровневая оптимизация, эволюционные методы) и использовать параллельные вычисления или машинное обучение для ускорения расчетов. Такие направления позволят повысить надежность решений и расширить область применения топологической оптимизации в современных инженерных задачах.

#### Список литературы

1. Tsirogiannis E., Vosniakos G. Redesign and topology optimization of an industrial robot link for additive manufacturing. *Facta Universitatis. Series: Mechanical Engineering*. 2019. Vol. 17. Iss. 3. P. 415–424. <https://doi.org/10.22190/FUME181219003T>.
2. Беспалов И.А., Шафигулин Р.А., Акифьев К.Н., Ахтямов И.Ф., Большаков П.В., Саченков О.А. Экспериментальное исследование изгибной жесткости цементированных и нецементированных решетчатых метаматериалов. *Российский журнал биомеханики*. 2025. Т. 29. №2. С. 13–21. <https://doi.org/10.15593/RZhBiomeh/2025.2.01>.
3. Kharin N., Akifyev K., Spiridonova K. et al. Inter-track porosity and macroporosity insights into mechanical properties of FDM printed samples using in-situ 4D XCT. *International Journal of Mechanics and Materials in Design*. 2025. Vol. 21. No 6. P. 1239–1257. <https://doi.org/10.1007/s10999-025-09780-6>.
4. Bolshakov P., Kharin N., Agathonov A., Kalinin E., Sachenkov O. Extension of the Voronoi diagram algorithm to orthotropic space for material structural design. *Biomimetics*. 2024. Vol. 9. No 3. P. 185-1 – 185-15. <https://doi.org/10.3390/biomimetics9040185>.
5. Bolshakov P., Kharin N., Kashapov R., Sachenkov O. Structural design method for constructions: simulation, manufacturing and experiment. *Materials*. 2021. Vol. 14. Iss. 20. P. 6064-1 – 6064-11. <https://doi.org/10.3390/ma14196064>.
6. Kharin N., Bolshakov P., Kuchumov A.G. Numerical and experimental study of a lattice structure for orthopedic applications. *Materials*. 2023. Vol. 16. Iss. 2. P. 744-1 – 744-13. <https://doi.org/10.3390/ma16020744>.
7. Bendsoe M.P., Sigmund O. *Topology Optimization. Theory, Methods, and Applications*. Berlin: Springer, 2004. 370 p.
8. Косых П.А., Азаров А.В. Теория и анализ методов топологической оптимизации. *Инженерный журнал: наука и инновации*. 2023. Вып. 4 (136). С. 1–18. <https://doi.org/10.18698/2308-6033-2023-4-2264>.
9. Huang X., Xie Y.M. *Evolutionary Topology Optimization of Continuum Structures: Methods and Applications*. Chichester, West Sussex, UK: John Wiley & Sons, 2010. 237 p. <https://doi.org/10.1002/9780470689486>.

10. Xie Y.M., Steven G.P. *Evolutionary Structural Optimization*. London: Springer-Verlag, 1997. 188 p. <https://doi.org/10.1007/978-1-4471-0985-3>.
11. Бодягина К.С. Проектирование композиционных материалов и пластин сложной формы в условиях термомеханического воздействия на основе МКЭ и топологической оптимизации. *Дисс... канд. физ.-мат. наук*. Саратов. 2023. 143 с.
12. Павлов С.П., Бодягина К.С. Топологическая оптимизация конструкций, состоящих из нескольких материалов с использованием модифицированного метода SIMP. *Математика и математическое моделирование*. 2019. №6. С. 19–34. <https://doi.org/10.24108/mathm.0619.0000211>.
13. Bolshakov P., Kuchumov A.G., Kharin N., Akifyev K., Statsenko E., Silberschmidt V.V. Method of computational design for additive manufacturing of hip endoprosthesis based on basic-cell concept. *International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering*. 2024. Vol. 40. Iss. 3. Article No e3802. <https://doi.org/10.1002/cnm.3802>.
14. Vahid K., Mitra A., Tolga T., Robert M. K. Image-based multiresolution topology optimization using deep disjunctive normal shape model. *Computer-Aided Design*. 2021. Vol 130. Article No 102947. <https://doi.org/10.1016/j.cad.2020.102947>.
15. Zheng X., Zhang X., Chen T., Watanabe I. Deep learning in mechanical metamaterials: from prediction and generation to inverse design. *Advanced Materials*. 2023. Vol. 35. Iss. 45. Article No 2302530. <https://doi.org/10.1002/adma.202302530>.
16. Allaire G., Jouve F., Toader A.-M. Level set method for shape optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*. 2004. №28 (2-3). P. 175–194.
17. Харин Н.В., Герасимов О.В., Большаков П.В., Хабибуллин А.А., Федянин А.О., Балтин М.Э., Балтина Т.В., Саченков О.А. Методика определения ортотропных свойств костного органа по данным компьютерной томографии. *Российский журнал биомеханики*. 2019. Т. 23. №2. С. 460–468. DOI: 10.15593/RzhBiomeh/2019.3.11.
18. Allaire G., Schoenauer M. *Conception Optimale de Structures*. Paris: Springer, 2007. 278 p.
19. Semenova E., Gerasimov O., Koroleva E., Ahmetov N., Baltina T., Sachenkov O. Automatic processing and analysis of the quality healing of derma injury. *Biomechanics in Medicine and Biology. Advances in Intelligent Systems and Computing*. 2019. Vol. 831. P. 107–113. [https://doi.org/10.1007/978-3-319-97286-2\\_10](https://doi.org/10.1007/978-3-319-97286-2_10).
20. Yaikova V., Gerasimov O., Fedyanin A., Zaytsev M., Baltin M., Baltina T., Sachenkov O.A. Automation of bone tissue histology. *Frontiers in Physics*. 2019. Vol. 7. P. 91-1 – 91-8. <https://doi.org/10.3389/fphy.2019.00091>.
21. Gerasimov O., Yaikova V., Baltina T., Baltin M., Fedyanin A., Zamaliev R., Sachenkov O.A. Modeling the change in the stiffness parameters of bone tissue under the influence of external loads. *Journal of Physics: Conference Series*. 2019. Vol. 1158. Iss. 2. Article No 022045. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1158/2/022045>.
22. Паймушин В.Н., Каюмов Р.А., Шакирзянов Ф.Р., Холмогоров С.А. О причинах потери несущей способности композитного тест-образца при трехточечном изгибе. *Ученые записки Казанского университета. Серия физико-математические науки*. 2022. Т. 164. Кн. 2-3. С. 221–243. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2022.2-3.221-243>.
23. Marcián P., Florian Z., Horácková L. et al. Microstructural finite-element analysis of influence of bone density and histomorphometric parameters on mechanical behavior of mandibular cancellous bone structure. *Solid State Phenomena*. 2016. Vol. 258. P. 362–365. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/SSP.258.362>.
24. Kayumov R.A., Muhamedova I.Z., Tazyukov B.F., Shakirzjanov F.R. Parameter determination of hereditary models of deformation of composite materials based on identification method. *Journal of Physics: Conference Series*. 2018. Vol. 973. No 1. Article No 012006. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/973/1/012006>.
25. Gerasimov O., Kharin N., Statsenko E., Mukhin D., Berezhnoi D., Sachenkov O. Patient-specific bone organ modeling using CT based FEM. *Lecture Notes in Computational Science and Engineering*. 2022. Vol. 141. P. 125–139. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-87809-2\\_10](https://doi.org/10.1007/978-3-030-87809-2_10).

## References

1. Tsirogiannis E., Vosniakos G. Redesign and topology optimization of an industrial robot link for additive manufacturing. *Facta Universitatis. Series: Mechanical Engineering*. 2019. Vol. 17. Iss. 3. P. 415–424. <https://doi.org/10.22190/FUME181219003T>.
2. Bespalov I.A., Shafigulin R.A., Akifyev K.N., Akhtyamov I.F., Bolshakov P.V., Sachenkov O.A. Eksperimentalnoe issledovanie izgibnoy zhestkosti tsementirovannykh i netsementirovannykh reshetchatykh metamaterialov [An experimental study of bending stiffness in lattice metamaterials with and without cement embedding]. *Rossiyskiy zhurnal biomekhaniki [Russian Journal of Biomechanics]*. 2025. Vol. 29. No 2. P. 13–21 (In Russian).
3. Kharin N., Akifyev K., Spiridonova K. et al. Inter-track porosity and macroporosity insights into mechanical properties of FDM printed samples using in-situ 4D XCT. *International Journal of Mechanics and Materials in Design*. 2025. Vol. 21. No 6. P. 1239–1257. <https://doi.org/10.1007/s10999-025-09780-6>.
4. Bolshakov P., Kharin N., Agathonov A., Kalinin E., Sachenkov O. Extension of the Voronoi diagram algorithm to orthotropic space for material structural design. *Biomimetics*. 2024. Vol. 9. No 3. P. 185-1 – 185-15. <https://doi.org/10.3390/biomimetics9040185>.
5. Bolshakov P., Kharin N., Kashapov R., Sachenkov O. Structural design method for constructions: simulation, manufacturing and experiment. *Materials*. 2021. Vol. 14. Iss. 20. P. 6064-1 – 6064-11. <https://doi.org/10.3390/ma14196064>.
6. Kharin N., Bolshakov P., Kuchumov A.G. Numerical and experimental study of a lattice structure for orthopedic applications. *Materials*. 2023. Vol. 16. Iss. 2. P. 744-1 – 744-13. <https://doi.org/10.3390/ma16020744>.
7. Bendsoe M.P., Sigmund O. *Topology Optimization. Theory, Methods, and Applications*. Berlin. Springer. 2004. 370 p.
8. Kosykh P.A., Azarov A.V. Teoriya i analiz metodov topologicheskoy optimizatsii [Theory and analysis of topology optimization methods]. *Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovatsii [Engineering Journal: Science and Innovation]*. 2023. Iss. 4 (136). P. 1–18 (In Russian).
9. Huang X., Xie Y.M. *Evolutionary Topology Optimization of Continuum Structures: Methods and Applications*. Chichester, West Sussex, UK. John Wiley & Sons. 2010. 272 p. <https://doi.org/10.1002/9780470689486>.
10. Xie Y.M., Steven G.P. *Evolutionary Structural Optimization*. London. Springer-Verlag. 1997. 188 p. <https://doi.org/10.1007/978-1-4471-0985-3>.
11. Bodyagina K.S. Proektirovanie kompozitsionnykh materialov i plastin slozhnoy formy v usloviyakh termomekhanicheskogo vozdeystviya na osnove MKE i topologicheskoy optimizatsii [Design of composite materials and plates of complex shape under thermomechanical loading based on FEM and topology optimization]. *Dissertatsiya na soiskanie uchenoy stepeni kandidata fiziko-matematicheskikh nauk [Cand. Sci. (Engineering). Dissertation]*. Saratov. 2023. 143 p. (In Russian).
12. Pavlov S.P., Bodyagina K.S. Topologicheskaya optimizatsiya konstruktsiy, sostoyashchikh iz neskolkikh materialov s ispolzovaniem modifitsirovannogo metoda SIMP [Topology optimization of structures composed of multiple materials using a modified SIMP method]. *Matematika i matematicheskoe modelirovanie [Mathematics and Mathematical Modeling]*. 2019. No 6. P. 19–34 (In Russian).
13. Bolshakov P., Kuchumov A.G., Kharin N., Akifyev K., Statsenko E., Silberschmidt V.V. Method of computational design for additive manufacturing of hip endoprosthesis based on basic-cell concept. *International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering*. 2024. Vol. 40. Iss. 3. Article No e3802. <https://doi.org/10.1002/cnm.3802>.
14. Vahid K., Mitra A., Tolga T., Robert M. K. Image-based multiresolution topology optimization using deep disjunctive normal shape model. *Computer-Aided Design*. 2021. Vol 130. Article No 102947. <https://doi.org/10.1016/j.cad.2020.102947>.
15. Zheng X., Zhang X., Chen T., Watanabe I. Deep learning in mechanical metamaterials: from prediction and generation to inverse design. *Advanced Materials*. 2023. Vol. 35. Iss. 45. Article No 2302530. <https://doi.org/10.1002/adma.202302530>.
16. Allaire G., Jouve F., Toader A.-M. Level set method for shape optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*. 2004. №28(2-3). P. 175–194.

17. Kharin N.V., Gerasimov O.V., Bolshakov P.V., Khabibullin A.A., Fedyanin A.O., Baltin M.E., Baltina T.V., Sachenkov O.A. Metodika opredeleniya ortotropnykh svoystv kostnogo organa po dannym kompyuternoy tomografii [Method for determining orthotropic properties of a bone organ from CT data]. *Rossiyskiy zhurnal biomekhaniki [Russian Journal of Biomechanics]*. 2019. Vol. 23. No 2. P. 460–468 (In Russian).
18. Allaire G., Schoenauer M. *Conception Optimale de Structures*. Paris. Springer. 2007. 278 p.
19. Semenova E., Gerasimov O., Koroleva E., Ahmetov N., Baltina T., Sachenkov O. Automatic processing and analysis of the quality healing of derma injury. *Biomechanics in Medicine and Biology. Advances in Intelligent Systems and Computing*. 2019. Vol. 831. P. 107–113. [https://doi.org/10.1007/978-3-319-97286-2\\_10](https://doi.org/10.1007/978-3-319-97286-2_10).
20. Yaikova V., Gerasimov O., Fedyanin A., Zaytsev M., Baltin M., Baltina T., Sachenkov O.A. Automation of bone tissue histology. *Frontiers in Physics*. 2019. Vol. 7. P. 91-1 – 91-8. <https://doi.org/10.3389/fphy.2019.00091>.
21. Gerasimov O., Yaikova V., Baltina T., Baltin M., Fedyanin A., Zamaliev R., Sachenkov O.A. Modeling the change in the stiffness parameters of bone tissue under the influence of external loads. *Journal of Physics: Conference Series*. 2019. Vol. 1158. Iss. 2. Article No 022045. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1158/2/022045>.
22. Paimushin V.N., Kayumov R.A., Shakirzyanov F.R., Kholmogorov S.A. O prichinakh poteri nesushchey sposobnosti kompozitnogo test-obraztza pri trekhtochechnom izgibe [About the causes of the bearing capacity loss of a composite beam under three-point bending]. *Uchenye zapiski Kazanskogo universiteta. Seriya fiziko-matematicheskie nauki*. 2022. Vol. 164. Book 2-3. P. 221–243 (In Russian).
23. Marcián P., Florian Z., Horácková L. et al. Microstructural finite-element analysis of influence of bone density and histomorphometric parameters on mechanical behavior of mandibular cancellous bone structure. *Solid State Phenomena*. 2016. Vol. 258. P. 362–365. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/SSP.258.362>.
24. Kayumov R.A., Muhamedova I.Z., Tazyukov B.F., Shakirzyanov F.R. Parameter determination of hereditary models of deformation of composite materials based on identification method. *Journal of Physics: Conference Series*. 2018. Vol. 973. No 1. Article No 012006. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/973/1/012006>.
25. Gerasimov O., Kharin N., Statsenko E., Mukhin D., Berezhnoi D., Sachenkov O. Patient-specific bone organ modeling using CT based FEM. *Lecture Notes in Computational Science and Engineering*. 2022. Vol. 141. P/ 125–139. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-87809-2\\_10](https://doi.org/10.1007/978-3-030-87809-2_10).

## MODELING OF MECHANICAL PROPERTY DISTRIBUTION BASED ON A NUMERICAL-DIGITAL APPROACH\*

**Khamzin D.E., Bepalov I.A., Gerasimov O.V.**

*Kazan (Volga Region) Federal University, Kazan, Russian Federation*

kde1260@gmail.com

*Received by the Editor 2025/08/17*

The article discusses the problem of topological optimization of mechanical properties of materials based on a numerical-digital approach that involves the integration of numerical modeling and digital prototyping methods. The focus is on the standard implementation of the SIMP (Solid Isotropic Material with Penalization) method, as well as its improved version. The improvement consists in the use of interpolation functions to approximate the density of the

---

\*The research was supported by the Russian Science Foundation (grant No 25-21-00434).

material, which allows moving from a piecewise-constant to a continuous distribution, providing a smoothed representation of the structure's topology. As a numerical experiment, the problem of three-point bending of a beam with a rectangular cross-section is investigated. Calculations are performed for three different computational grids, which makes it possible to evaluate the influence of the degree of discretization on the results and compare the effectiveness of the standard and improved approaches. At each iteration, the density distribution is recorded, forming a voxel model of a digital prototype that can be used in additive manufacturing. The efficiency of the algorithm is evaluated based on the internal deformation energy functional. It is shown that the use of interpolation functions reduces the value of the functional by 2-4% and provides more stable convergence compared to the classical SIMP. The results confirm the practical significance of the method, which allows the formation of optimized structures with high rigidity while maintaining the specified volume of material. Additionally, it is noted that the modified approach reduces computational costs and speeds up the optimization process, which is especially important for high-dimensional problems. The proposed method can be effectively applied in mechanical engineering, medical engineering, and additive technologies.

*Keywords:* topology optimization, SIMP, digital prototype, FEM.