

УДК 539.3

DOI: 10.32326/1814-9146-2026-88-1-118-126

ПРЕДЕЛЬНОЕ ПЛАСТИЧЕСКОЕ ФОРМОИЗМЕНЕНИЕ ТОРООБРАЗНЫХ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ КОНСТРУКЦИЙ, НАГРУЖЕННЫХ ВНУТРЕННИМ ДАВЛЕНИЕМ

© 2026 г.

Бондарь В.С., Токарев А.Е.

Московский политехнический университет, Москва, Российская Федерация

tm@mospolytech.ru

Поступила в редакцию 30.11.2025

Дана краткая характеристика трех используемых в рамках статьи вычислительных моделей, ориентированных на решение задач о больших пластических деформациях тонкостенных металлических конструкций, находящихся под действием внутреннего давления. Отмеченный набор моделей включает в себя оболочечную безмоментную жесткопластическую конечно-элементную модель и две твердотельные упругопластические конечно-элементные модели, которые предназначены для решения задач о больших пластических деформациях в осесимметричной и трехмерной постановках. Надежность получаемого при этом численного решения рассматриваемой задачи о предельном пластическом формоизменении устанавливается по факту согласованности результатов расчетов на основе двух (альтернативных) из отмеченных трех моделей. Закон упрочнения высокопластичного материала принимаемой к рассмотрению конструкции определяется в рамках расчетно-аналитического подхода, основанного на использовании стандартных механических характеристик этого материала: предела прочности, предела текучести и равномерного удлинения. Излагаются результаты выполненных расчетно-экспериментальных исследований по предельному пластическому формоизменению конструкции, изготовленной с применением аддитивных технологий, содержащей элемент в виде торообразной (с двумя полостями) оболочки, подверженной действию большой величины внутреннего давления. Отмечается хорошее согласование с экспериментом как зон начала разрушения конструкции, так и получаемых при этом расчетных прогнозов по предельным значениям приложенного давления. Таким образом, подтверждена корректность предложенных вычислительных моделей и истинной диаграммы деформирования стали, используемой в аддитивном производстве, построенной на основе расчетно-аналитического подхода. Полученные результаты свидетельствуют о возможности проведения оценки запаса прочности подобных конструкций в рамках предложенного В.И. Феодосьевым подхода, опирающегося на получаемый описанным способом расчетный прогноз по предельному значению приложенной нагрузки.

Ключевые слова: предельное пластическое формоизменение, упруго-пластические конечно-элементные модели, большие пластические деформации.

В настоящей статье рассматриваются изготовленные из высокопластичных металлов оболочечные конструкции, работающие в условиях высоких значений внутреннего давления при развитых пластических деформациях. Примером здесь могут служить конструкции жидкостных ракетных двигателей (ЖРД). К оценке прочности подобных конструкций В.И. Феодосьевым был предложен подход [1], в котором определение запаса прочности сводится к вычислению отношения предельного расчетного значения приложенной нагрузки к заявленному эксплуатационному значению ($P_{\text{расч}}/P_{\text{экс}}$). В качестве $P_{\text{расч}}$ для рассчитываемой оболочки принимается либо значение нагрузки на момент потери ее несущей способности, либо величина нагрузки на момент достижения предельно допустимого значения ее деформации. Этот подход означает, что для обсуждаемых конструкций необходимо решать типичные для технологии обработки металлов давлением задачи о больших пластических деформациях в условиях действия внутреннего давления. Трудности, с которыми при этом приходится сталкиваться, по-видимому, и являются причиной того, что этот подход до сих пор не получил должной апробации.

Отметим, что к настоящему времени для решения указанных задач о больших пластических деформациях разработан широкий набор конечно-элементных (КЭ) моделей. Среди них можно выделить твердотельные 3D- и 2D-модели [2–10], а также оболочечные модели [11–15]. Сравнительный анализ имеющихся численных результатов применительно к проблемам формоизменения при больших деформациях тонкостенных объектов показывает, что надежность ряда из указанных моделей недостаточно высока. Одна из главных причин подобной ситуации состоит в неучете при пошаговом решении задачи о больших пластических деформациях такого важного фактора, каким является поворот элементов модели на временном интервале. В ряде упругопластических моделей игнорирование поворотов является следствием использования явной схемы Эйлера при интегрировании по времени (на шаге нагружения) соответствующих соотношений, входящих в формулировку задачи.

В настоящее время построение вычислительных моделей, предназначенных для решения описанного класса задач пластического формоизменения, осуществляется, как правило, в среде известных коммерческих КЭ комплексов. В представляемой статье получение на основе численного моделирования указанного выше значения $P_{\text{расч}}$ применительно к принятой к рассмотрению конструкции осуществляется в рамках методики, которая включает в себя: построение с использованием комплекса ABAQUS [16] двух твердотельных упругопластических КЭ-2 и КЭ-3 моделей для решения обозначенных задач в осесимметричной и трехмерной постановках; построение безмоментной жесткопластической КЭ-1 модели [17], программно реализованной на языке Фортран, которая предназначена для подтверждения достоверности числовых результатов, полученных по КЭ-2 модели (результаты такого тестирования на примере проблемы гидроразбухания металлической пластины [18] представлены в [17]); экспериментальное подтверждение получаемых расчетным прогнозированием результатов.

Будем рассматривать тонкостенную конструкцию, изготовленную из стали по аддитивной технологии, содержащую элемент в виде торообразной (с двумя полостями) оболочки, предназначенной для работы в условиях больших значений внутреннего давления. Сегмент принятой к рассмотрению конструкции представлен на рис. 1. Обозначения «П1» и «П2» приняты, соответственно, для участков полостей высокого и низкого давления.

Испытания конструкции проведено в такой последовательности: обе полости нагружались давлением порядка 30 МПа, затем последовательно (вплоть до разрушения) давление подавалось сначала в полость «П1», а затем в полость «П2». В результате испытаний были определены давления, при которых произошли разрушения на участках «П1» и «П2». Зоны разрушения отмечены на рис. 1 символами *K* и *N*.

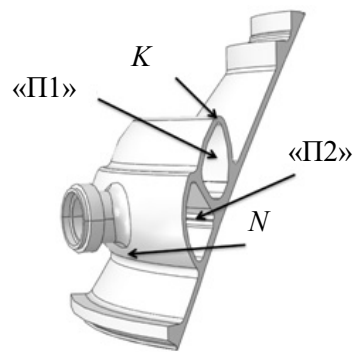


Рис. 1. Сегмент рассматриваемой стальной конструкции

Значения параметров, входящих в формулировку принятого закона пластического упрочнения материала конструкции

$$\sigma_{и} = \sigma_{\tau} + C \frac{1 - \exp(-\gamma \varepsilon_{и}^p)}{\gamma},$$

определены, согласно [19], в виде: $\sigma_{\tau} = 951$ МПа, $C = 5463$ МПа, $\gamma = 7,05$. Здесь $\sigma_{и}$ – интенсивность напряжений, $\varepsilon_{и}^p$ – накопленная пластическая деформация. Установлено предельное значение деформации данного материала в виде $\varepsilon_{пр} = 0,17$ (или в логарифмических деформаций $\bar{\varepsilon}_{пр} = \ln(1 + \varepsilon_B) = 0,16$).

Для расчета предельной нагрузки применительно к участку «П1» конструкции (на основе модели КЭ-2 с элементом типа САХ8R) была сгенерирована сетка, представленная на рис. 2. Максимальный размер элемента сетки составлял величину порядка 1 мм. В зоне *K* размер элементов изменялся в пределах от 0,08 до 0,03 мм.

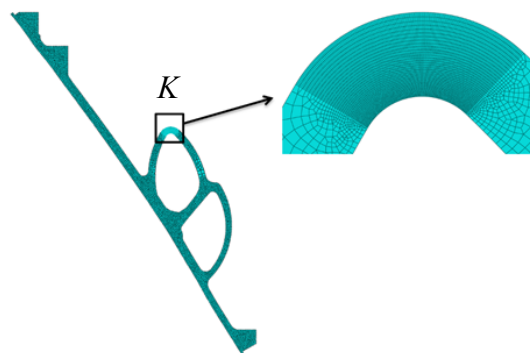


Рис. 2. Схема дискретизации применительно к КЭ-2 модели

Проведенным расчетом установлено, что предельное значение давления для участка «П1», определенное по критерию достижения предельного значения (0,16) накопленной пластической деформации, составляет величину порядка 112 МПа (практи-

чески при этой же величине давления в процессе испытания было зафиксировано разрушение конструкции в зоне K). Этот вывод иллюстрирует представленный на рис. 3 график полученной расчетом зависимости накопленной пластической деформации в зоне K от действующего в полости «П1» давления.

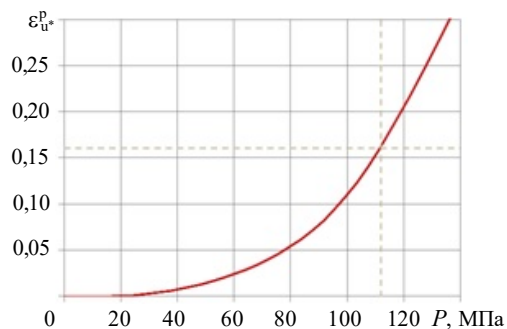


Рис. 3. Зависимость накопленной пластической деформации в зоне K от действующего в полости «П1» давления

Картина распределения накопленной пластической деформации в зоне K в достигнутом предельном состоянии представлена на рис. 4.

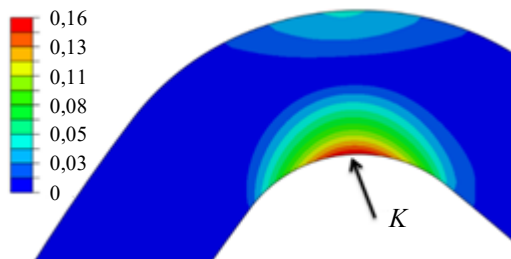


Рис. 4. Распределение накопленной пластической деформации в зоне K при достижении предельного значения приложенного давления

Для расчета предельной нагрузки применительно к участкам «П1» и «П2» конструкции была также сгенерирована трехмерная сетка (применительно к модели КЭ-3 с элементами типа С3D20 и С3D10), представленная на рис. 5.

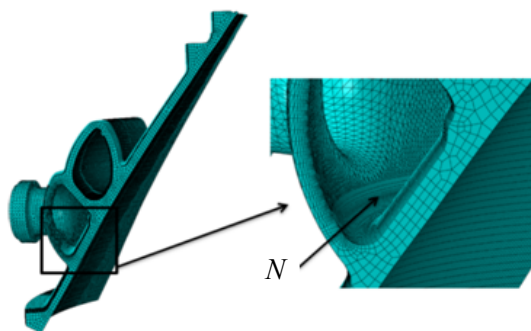


Рис. 5. Схема дискретизации рассматриваемой конструкции для расчета предельной нагрузки применительно к участкам «П1» и «П2»

Максимальный размер элемента сетки составлял величину порядка 2 мм. В зонах K и N размер элементов уменьшался до 0,2 мм. Расчеты проводились с использованием КЭ-3 модели сегмента конструкции (изображенного на рис. 5) с принятием условий симметрии на торцах этого сегмента. При этом в расчетной модели к торцевой поверхности патрубка (см. рис. 5) прикладывалась растягивающая нагрузка, значение которой принималось равным произведению давления, действующего в полости «П2», на площадь выходного отверстия патрубка.

Укажем, что полученное проведенным КЭ-3 моделированием предельное значение давления для участка «П1» конструкции составило величину 104 МПа, хорошо согласующуюся с результатом (112 МПа), полученным КЭ-2 моделированием. Это подтверждает вычислительную надежность построенных КЭ-2 и КЭ-3 моделей применительно к рассматриваемым задачам о предельном пластическом формоизменении конструкции.

Проведенным КЭ-3 моделированием установлено, что предельное значение давления для участка «П2», определенное по критерию достижения предельного значения (0,16) накопленной пластической деформации, составляет величину 83 МПа, на 14% заниженную (в запас) по сравнению с зафиксированным при испытании разрушающим давлением (96 МПа). Этот вывод иллюстрирует представленный на рис. 6 график полученной расчетом зависимости накопленной пластической деформации в зоне N от действующего в полости «П2» давления.

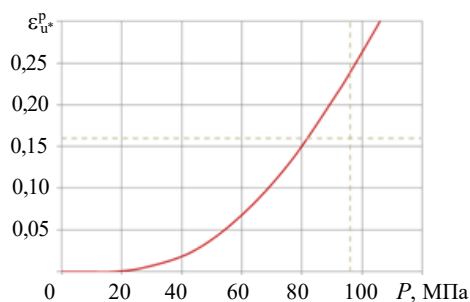


Рис. 6. График зависимости накопленной пластической деформации в зоне N от действующего в полости «П2» давления

Картина распределения накопленной пластической деформации в зоне N в достигнутом предельном состоянии представлена на рис. 7.

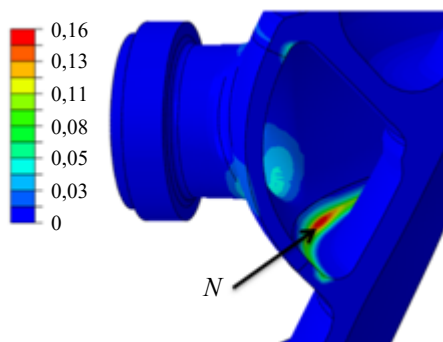


Рис. 7. Распределение накопленной пластической деформации в зоне N при достижении предельного значения приложенного давления

Заклучение

Продемонстрированы возможности представленной методики, ориентированной на исследование предельного пластического формоизменения тонкостенных металлических конструкций, находящихся под действием внутреннего давления. В рамках этой методики в качестве расчетных инструментов используются двумерные и трехмерные упругопластические конечно-элементные модели, предназначенные для решения задач о больших пластических деформациях. Закон упрочнения высокопластичного материала принимаемой к рассмотрению конструкции устанавливается при этом в рамках расчетно-экспериментального подхода, основанного на использовании устанавливаемых в испытаниях на одноосное растяжение стандартных механических характеристик этого материала. С использованием построенных вычислительных моделей и результатов испытаний, выполненных с соответствующими стальными образцами, проведено расчетно-экспериментальное исследование пластического формоизменения торообразной стальной конструкции с двумя нагруженными внутренним давлением полостями. Сопоставлением полученных расчетных и экспериментальных результатов установлено, что расчетные прогнозы по предельным (соответствующим разрушению конструкции) значениям приложенного давления хорошо согласуются с экспериментом. Тем самым подтверждена возможность проведения оценки запаса прочности подобного типа конструкций в рамках предложенного В.И. Феодосьевым подхода, опирающегося на получаемый в соответствии с описанной методикой расчетный прогноз по предельному значению приложенной нагрузки.

Список литературы

1. Феодосьев В.И. *Прочность теплонпряженных узлов жидкостных ракетных двигателей*. М.: Оборонгиз, 1963. 212 с.
2. Cheng J.H., Kikuchi N. An analysis of metal forming processes using large deformation elastic-plastic formulations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 1985. Vol. 49. Iss. 1. P. 71–108. DOI: 10.1016/0045-7825(85)90051-9.
3. Keck P., Wilhelm M., Lange K. Application of the finite element method to the simulation of sheet forming processes: comparison of calculations and experiments. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1990. Vol. 30. No 8. P. 1415–1430.
4. Khalid Y.A. Finite element analysis of hydraulic bulging process. *Suranaree Journal of Science and Technology*. 2004. Vol. 11. No 4. P. 275–288.
5. Oliveira M.C., Fernandes J.V. Modelling and simulation of sheet metal forming processes. *Metals*. 2019. Vol. 9. Iss. 12. Article No 1356. DOI: 10.3390/met9121356.
6. Ashofteh A., Mosavi Mashhadi M., Seifollahpour S. Simultaneous hydroforming of bulge- and t-zone in 70/30 brass and 304 stainless steel tubes. *Journal of Computational Applied Mechanics*. 2020. Vol. 51. No 1. P. 213–230. DOI: 10.22059/jcamech.2019.270658.346.
7. Sannidhi A.K., Gupta A.K., Varghese G., Toshniwal K., Sharma V. Analytical and finite element modelling of hydraulic bulge test on extra deep drawing steel with fractography study. *Advances in Materials and Processing Technologies*. 2020. Vol. 7. Iss. 2. P. 1–17. DOI: 10.1080/2374068X.2020.1792704.
8. Zhang J., Wang Fe., Wang Fa., Tang W., Zhao X. Free bulging of thin-walled cylinders closed by two heavy plates. *Ocean Engineering*. 2021. Vol. 223. Article No 108646. <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2021.108646>.
9. Shamim R. Metal forming process simulation by FEA software. *Polish Journal of Science*. 2024. No 77. P. 37–41.

10. Баженов В.Г., Нагорных Е.В. Численный анализ больших упругопластических деформаций тел и сред и идентификация их диаграмм деформирования при различных видах нагружения. *Ученые записки Казанского университета. Серия Физико-математические науки*. 2022. Т. 164. Кн. 4. С. 316–328. <https://doi.org/10/26907/2541-7746.2022.4.316-328>.
11. Iseki H., Murota T., Jimma T. Finite element method in the analysis of the hydrostatic bulging of a sheet metal (Part II). *Bulletin of the JSME*. 1977. Vol. 20. No 141. P. 285–291.
12. Baynham J.M.W., Zienkiewicz O.C. Developments in the finite element analysis of thin sheet drawing and direct redrawing processes, using the rigid/plastic approach. *Proceedings International Conference Numerical Method in Industrial Forming Processes*. Eds. J.F.T. Pittman, R.D. Wood, J.M. Alexander, O.C. Zienkiewicz. Swansea: Pineridge Press, 1982. P. 697–707.
13. Wang N.M., Tang S.C. Analysis of bending effects in sheet forming operations. *Proceedings the NUMIFORM'86 Conference*. Gothenburg, 1986. P. 71–76.
14. Баженов В.Г., Ломунов В.К., Шеронов Г.В. Моделирование процесса пластического формообразования осесимметричных тонкостенных изделий. *Машиноведение*. 1988. №4. С. 36–42.
15. Rebelo N., Nagtegaal J.C., Hibbit H.D. Finite element analysis of sheet forming processes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1990. Vol. 30. Iss. 8. P. 1739–1758. <https://doi.org/10.1002/nme.1620300824>.
16. *Abaqus/CAE. User's Manual. Documentation*.
17. Сухомлинов Л.Г., Токарев А.Е. Численное моделирование предельного пластического формоизменения тонкостенных элементов конструкций, находящихся под действием гидростатического давления. *Космонавтика и ракетостроение*. 2023. № 2(131). С. 56–67.
18. Wang N.M., Shammamy M.R. On the plastic bulging of circular diaphragm by hydrostatic pressure. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 1969. Vol. 17. Iss. 1. P. 43–61.
19. Владимиров С.А., Горохов В.Б., Токарев А.Е. Аппроксимация истинной диаграммы свойств пластичных металлических материалов по стандартным механическим характеристикам. *Космонавтика и ракетостроение*. 2019. №1(106). С. 73–79.

References

1. Feodosyev V.I. *Prochnost teplonapryazhennykh uzlov zhidkostnykh raketnykh dvigateley* [Strength of Thermally Stressed Assemblies in Liquid Rocket Engines]. Moscow. Oborongiz Publ. 1963. 212 p. (In Russian).
2. Cheng J.H., Kikuchi N. An analysis of metal forming processes using large deformation elastic-plastic formulations. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*. 1985. Vol. 49. Iss. 1. P. 71–108. DOI: 10.1016/0045-7825(85)90051-9.
3. Keck P., Wilhelm M., Lange K. Application of the finite element method to the simulation of sheet forming processes: comparison of calculations and experiments. *Int. J. Numer. Method Eng*. 1990. Vol. 30. No 8. P. 1415–1430.
4. Khalid Y.A. Finite element analysis of hydraulic bulging process. *Suranaree Journal of Science and Technology*. 2004. Vol. 11. No 4. P. 275–288.
5. Oliveira M.C., Fernandes J.V. Modelling and simulation of sheet metal forming processes. *Metals*. 2019. Vol. 9. Iss. 12. Article No 1356. DOI: 10.3390/met9121356.
6. Ashofteh A., Mosavi Mashhadi M., Seifollahpour S. Simultaneous hydroforming of bulge- and *t*-zone in 70/30 brass and 304 stainless steel tubes. *J. Comput. Appl. Mech*. 2020. Vol. 51. No 1. P. 213–230. DOI: 10.22059/jcamech.2019.270658.346.
7. Sannidhi A.K., Gupta A.K., Varghese G., Toshniwal K., Sharma V. Analytical and finite element modelling of hydraulic bulge test on extra deep drawing steel with fractography study. *Advances in Materials and Processing Technologies*. 2020. Vol. 7. Iss. 2. P. 1–17. DOI: 10.1080/2374068X.2020.1792704.
8. Zhang J., Wang Fe., Wang Fa., Tang W., Zhao X. Free bulging of thin-walled cylinders closed by two heavy plates. *Ocean Engineering*. 2021. Vol. 223. Article No 108646. <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2021.108646>.
9. Shamim R. Metal forming process simulation by FEA software. *Polish Journal of Science*. 2024. No 77. P. 37–41.

10. Bazhenov V.G., Nagornykh E.V. Chislennyy analiz bolshikh uprugoplasticheskikh deformatsiy tel i sred i identifikatsiya ikh diagramm deformirovaniya pri razlichnykh vidakh nagruzheniya [Numerical analysis of large elastoplastic deformations of bodies and continua and identification of their deformation diagrams under different types of loading]. *Uchenye zapiski Kazanskogo universiteta. Seriya Fiziko-matematicheskie nauki [Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series]*. 2022. Vol. 164. Book 4. P. 316–328 (In Russian).
11. Iseki H., Murota T., Jimma T. Finite element method in the analysis of the hydrostatic bulging of a sheet metal (Part II). *Bulletin of the JSME*. 1977. Vol. 20. No 141. P. 285–291.
12. Baynham J.M.W., Zienkiewicz O.C. Developments in the finite element analysis of thin sheet drawing and direct redrawing processes, using the rigid/plastic approach. *Proceedings International Conference Numerical Method in Industrial Forming Processes*. Eds. J.F.T. Pittman, R.D. Wood, J.M. Alexander, O.C. Zienkiewicz. Swansea. Pineridge Press. 1982. P. 697–707.
13. Wang N.M., Tang S.C. Analysis of bending effects in sheet forming operations. *Proceedings the NUMIFORM'86 Conference*. Gothenburg. 1986. P. 71–76.
14. Bazhenov V.G., Lomunov V.K., Sheronov G.V. Modelirovanie protsessa plasticheskogo formoobrazovaniya osesimmetrichnykh tonkostennykh izdeliy [Modeling of the plastic forming process of axisymmetric thin-walled products]. *Mashinovedenie [Mechanical Engineering]*. 1988. No 4. C. 36–42 (In Russian).
15. Rebelo N., Nagtegaal J.C., Hibbit H.D. Finite element analysis of sheet forming processes. *Int. J. Numer. Method Eng.* 1990. Vol. 30. Iss. 8. P. 1739–1758. <https://doi.org/10.1002/nme.1620300824>.
16. *Abaqus/CAE*. User's Manual. Documentation.
17. Sukhomlinov L.G., Tokarev A.E. Chislennoe modelirovanie predelnogo plasticheskogo formoizmeneniya tonkostennykh elementov konstruktsiy, nakhodyashchikhsya pod deystviem gidrostaticheskogo davleniya [Numerical simulation of the limiting plastic deformation of thin-walled structural elements under the action of hydrostatic pressure]. *Kosmonavtika i raketostroenie*. 2023. No 2(131). P. 56–67 (In Russian).
18. Wang N.M., Shammamy M.R. On the plastic bulging of circular diaphragm by hydrostatic pressure. *J. Mech. Phys. Solids*. 1969. Vol. 17. Iss. 1. P. 43–61.
19. Vladimirov S.A., Gorokhov V.B., Tokarev A.E. Approksimatsiya istinnoy diagrammy svoystv plastichnykh metallicheskih materialov po standartnym mekhanicheskim kharakteristikam [Approximation of the true diagram of the plastic properties of metal materials in standard mechanical characteristics]. *Kosmonavtika i raketostroenie*. 2019. No 1(106). P. 73–79 (In Russian).

LIMIT PLASTIC FORMING OF TORUS-SHAPED METAL STRUCTURES LOADED WITH INTERNAL PRESSURE

Bondar V.S., Tokarev A.E.

Moscow Polytechnic University, Moscow, Russian Federation

tm@mospolytech.ru

Received by the Editor 2025/11/30

A brief description of three computational models used is given. They are aimed at solving problems of large plastic deformations of thin-walled metal structures under internal pressure. The set of models includes a membrane rigid-plastic finite element model and two solid elastic-plastic finite element models, which are intended to solve problems of large plastic deformations in axisymmetric and three-dimensional formulations. The reliability of the resulting numerical solution to the considered problem of limit plastic forming is established by the fact of consistency of the calculation results based on two (alternative) of the three models. The law of strengthening of the highly plastic material of the structure taken into consideration is

determined within the framework of the calculation and experimental approach based on the use of standard mechanical characteristics of this material. The results of the calculation and experimental studies on the limiting plastic deformation of the structure containing an element in the form of a toroidal (with two cavities) shell subjected to the action of a large value of internal pressure are presented. Good agreement with the experiment of the obtained calculation forecasts for the limiting values of the applied pressure is noted. This confirms the possibility of assessing the safety factor of such structures within the framework of the approach proposed by V.I. Feodosyev, based on the calculated forecast for the limiting value of the applied load obtained in the described manner.

Keywords: limit plastic forming, elastic-plastic finite element models, large plastic deformations.