

УДК 539.372

DOI: 10.32326/1814-9146-2026-88-1-104-117

**ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ЗАКОНОМЕРНОСТЕЙ
ПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ
КОНСТРУКЦИОННЫХ СПЛАВОВ
ПРИ МОНОТОННЫХ И ЦИКЛИЧЕСКИХ РЕЖИМАХ
НЕПРОПОРЦИОНАЛЬНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ***

© 2026 г. **Игумнов Л.А., Волков И.А., Костюков В.Е.**

Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Российская Федерация

ivan.volkov@mech.unn.ru

Поступила в редакцию 12.11.2025

Исследуются закономерности пластического деформирования металлов и сплавов, подвергающихся сложному пластическому деформированию в условиях как монотонного, так и циклического силового воздействия. Теоретической базой исследования является модель, разработанная в рамках дифференциальной теории пластичности профессором Ю.Г. Коротких. Ключевая особенность модели – концепция поверхности нагружения (текучести) и постулат о градиентальности вектора скорости пластических деформаций к этой поверхности в точке нагружения. Подобная форма записи определяющих уравнений позволяет корректно описывать фундаментальные эффекты пластичности при реализации произвольных (сложных) траекторий силового воздействия. При занулении соответствующих материальных параметров из общего варианта уравнений, как частный случай, получаются все основные представленные в литературе формы уравнений пластического деформирования материала при малых деформациях (система «вложенных» моделей).

Исследуются проблемы математического моделирования процессов, для которых характерно изменение ориентации главных осей тензоров напряжений, а также полных и пластических деформаций (так называемые режимы непропорционального нагружения). С целью верификации предложенной модели выполнен цикл численных экспериментов, моделирующих сложное пластическое деформирование конструкционных сталей (на примере сталей марок 304, 316 и стали 45). Анализ проводился для плоских траекторий, соответствующих непропорциональным режимам деформирования, в условиях монотонного и циклического силового воздействия. Результаты исследования демонстрируют, что модель пластичности Ю.Г. Коротких корректно предсказывает основные эффекты сложного пластического деформирования конструкционных сплавов. Модель обеспечивает качественное описание поведения материалов для плоских траекторий нагружения

* Выполнено при финансовой поддержке Министерством науки и высшего образования в рамках госзадания по технологическому запросу (проект № FSWR-2026-0019).

любой кривизны, а ее точность является достаточной для выполнения практических расчетов.

Отмечен ряд характерных особенностей, сопровождающих процесс непропорционального пластического деформирования сплавов: наличие «нырка» на диаграмме деформирования материала при переходе от криволинейного участка деформирования к прямолинейному; волнообразный характер векторных свойств материала на криволинейных траекториях постоянной кривизны при циклическом нагружении; появление дополнительного циклического упрочнения и др.

Ключевые слова: пластичность, сложное нагружение, моделирование, численный эксперимент, натурный эксперимент, плоские траектории деформирования, монотонное и циклическое нагружение.

Введение

Разработка и внедрение в современном машиностроении новых типов конструкций, ориентированных на ужесточающиеся эксплуатационные требования, повлекли за собой увеличение их рабочих параметров, уменьшение материалоемкости и расширение спектра нестационарных режимов силового воздействия. Указанные тенденции обусловили выдвигание на первый план проблемы достоверного расчета ресурса ответственных инженерных объектов, включая диагностику накопленных повреждений и прогнозирование остаточного срока службы на этапе эксплуатации. Реальные условия функционирования подобных объектов, как правило, сопряжены с действием нестационарных комбинированных термомеханических нагрузок и полей различной физической природы, что инициирует деградацию исходных прочностных характеристик материалов и, в конечном счете, приводит к исчерпанию несущей способности материала в наиболее напряженных зонах конструкции [1–3].

На начальных этапах развития механики деформируемого твердого тела основной вектор исследований был направлен на построение определяющих соотношений (моделей поведения материалов), известных как уравнения состояния [4–11]. Подобные модели призваны описывать отклик материала на разнообразные траектории деформирования и температурные воздействия. Интенсивное развитие этого направления стимулировалось двумя ключевыми факторами: во-первых, запросами инженерной практики, требовавшей методов оценки напряженно-деформированного состояния (НДС) конструкций, а во-вторых, прогрессом в области численных методов. Благодаря достигнутому уровню развития численного моделирования сегодня представляется возможным рассчитывать НДС сколь угодно сложных инженерных объектов с учетом практически любых нелинейных связей между напряжениями, деформациями и скоростями их изменения в условиях, максимально приближенных к реальной эксплуатации.

На современном этапе развития механики деформируемого твердого тела приоритетное значение приобретает задача прогнозирования взаимосвязанного развития процессов деформации и накопления повреждений. Решение этой задачи необходимо для получения ответов на ключевые вопросы, связанные с идентификацией областей концентрации повреждений в материале конструкции и последующим зарождением и ростом одной или нескольких магистральных трещин в наиболее опасных зонах [1–3].

Математическая строгость формирует модели, полнота системы базовых экспериментов для ее оснащения обеспечивает точность прогноза и оценки ресурса,

описывающих эволюцию НДС в заданных условиях. При всем многообразии существующих моделей, так или иначе учитывающих параметр поврежденности, значительная их часть характеризуется рядом существенных недостатков. Область применения таких моделей зачастую ограничена узким кругом режимов нагружения; кроме того, они, как правило, не сопряжены с определяющими уравнениями деформирования. Указанное обстоятельство не позволяет им достоверно учитывать влияние предыстории изменения НДС, температурных пульсаций и скорости деформации на процесс развития повреждений.

Следует отметить, что особенности предшествующего вязкопластического деформирования (включая конфигурацию траектории нагружения, характер изменения температуры, а также вид и эволюцию напряженного состояния) в значительной мере определяют интенсивность процесса накопления повреждений. Это обстоятельство обуславливает необходимость тщательного анализа изменения НДС в наиболее нагруженных зонах элементов конструкций и его адекватного математического описания с применением соответствующих определяющих соотношений.

Из вышесказанного следует, что вектор развития современных определяющих моделей, в том числе для вязкопластических сред, должен быть ориентирован на задачи прогнозирования разрушения. Приоритетным направлением становится уточнение методик расчета параметров процесса деформирования для заданных историй нагружения, нацеленное на выявление фундаментальных физических закономерностей, управляющих процессами деградации материала и последующего разрушения.

Разработка и верификация моделей упругопластических сред основывается на анализе данных, полученных в ходе испытаний лабораторных образцов. Нагружение при таких испытаниях моделирует условия, в которых конструкционный материал функционирует в составе реального конструктивного элемента [4, 6, 12–17].

Исследование особенностей поведения материалов в условиях упругопластического деформирования вносит весомый вклад в развитие теоретических основ механики пластических сред. Верификация предлагаемых определяющих соотношений упругопластичности предполагает выполнение серии численных расчетов с последующим сопоставлением полученных результатов с имеющимися экспериментальными данными. Такое сопоставление должно охватывать широкий круг конструкционных сплавов, различающихся по своим механическим характеристикам, и максимально возможный спектр траекторий нагружения. Выводы, сформулированные по итогам подобных исследований, могут быть использованы для корректировки материальных параметров, скалярных функций и функционалов, образующих структуру конститутивных соотношений моделей пластичности [4, 7, 10, 11].

В качестве инструмента для анализа процессов сложного пластического деформирования конструкционных сталей в условиях монотонных и циклических нагружений выбрана современная модель теории пластического течения. Отличительной особенностью модели является совместный учет кинематического и изотропного механизмов упрочнения, что позволяет более полно описывать поведение материала [10, 11] при сложном нагружении. Результаты численного моделирования сопоставляются с данными натурных экспериментов, выполненных на высокоточном автоматизированном испытательном оборудовании [12, 13]. Выполненное сопоставление расчетных и экспериментальных данных свидетельствует о том, что предложенная модель адекватно воспроизводит качественные и количественные характеристики

поведения конструкционных сталей. Последнее подтверждается для условий сложного нагружения, реализуемого по траекториям непропорционального деформирования в режимах как монотонного, так и циклического воздействия, причем погрешность расчетов не превышает приемлемого для инженерной практики уровня.

Численные результаты

В публикациях [14, 15] изложены некоторые выводы, основанные на изучении циклического упругопластического поведения материала в условиях сложного нагружения, а именно при растяжении-сжатии, сочетающемся со знакопеременным кручением. Эксперименты проводились для двух типов траекторий деформирования – квадратной и круговой. В качестве объекта исследований была взята сталь 316, которая по своим характеристикам соответствует отечественным коррозионно-стойким сталям.

Процесс деформирования по квадратной траектории (рис. 1а) циклически воспроизводит следующую последовательность состояний материала: растяжение до уровня $e_{11} = 0,004$ сменяется кручением, доводящим сдвиговую деформацию до значения $e_{12} = 0,00335$ (точка *A*); последующее сжатие приводит компоненту e_{11} к значению $-0,004$ (точка *B*); далее знакопеременное кручение характеризует точку *C* ($e_{12} = -0,00335$), после чего растяжение возвращает систему в исходное деформированное состояние ($e_{11} = 0,004$, точка *D*), и цикл повторяется.

Для круговой траектории (рис. 1б) условия эксперимента предполагают поддержание постоянной амплитуды интенсивности деформаций на уровне $e_{ii} \approx 0,004 = \text{const}$.

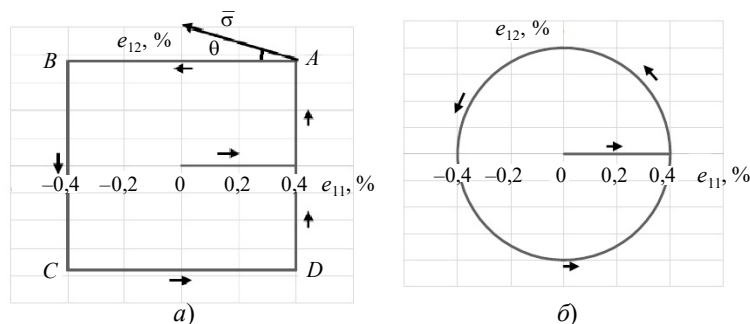


Рис. 1. Траектории деформирования

По итогам интерпретации экспериментальных данных сформулированы основные наблюдаемые эффекты, сопровождающие циклическое непропорциональное деформирование:

- установлено, что угол θ между вектором напряжений $\bar{\sigma}$ и направлением деформационного воздействия (угол запаздывания) достигает пиковых величин в точках излома траектории (см. рис. 1а), тогда как на прямолинейных участках он асимптотически приближается к нулю;
- обнаружено, что локальные максимумы модуля вектора напряжений $|\bar{\sigma}|$ соответствуют тем же точкам излома траектории, и их абсолютная величина обнаруживает зависимость от номера цикла нагружения (возрастает с его увеличением);
- зафиксировано устойчивое превышение значений модуля $|\bar{\sigma}|$ в точках *B* и *D* над соответствующими значениями в точках *A* и *C* в пределах каждого цикла;

– показано, что пульсации модуля вектора напряжений $|\bar{\sigma}|$ на отрезках квадратной траектории порождаются суперпозицией двух процессов: изменением модуля вектора деформаций $|\bar{\epsilon}|$ и нестационарными явлениями, возникающими вследствие скачкообразного изменения направления вектора скорости деформаций в точках излома.

Объектом экспериментальных исследований, представленных в [16, 17], являлась сталь 304 – зарубежный аналог отечественной коррозионно-стойкой стали аустенитного класса 08X18H10. Изучались процессы циклического непропорционального нагружения. В ходе экспериментов зафиксировано принципиальное различие в реакции материала на режим нагружения: в отличие от монотонных режимов, где упрочнение выражено слабо, непропорциональное деформирование сопровождается интенсивным упрочнением. Последнее обусловлено иницированием совокупности микроструктурных механизмов, ведущих к эволюции структурно-фазового состояния материала. Экспериментальное исследование, выполненное в [17] на образцах из стали 304 при нагружении по траекториям, аналогичным изображенным на рис. 1, позволило установить особенности эволюции поверхности текучести. В частности, обнаружено, что доминирующий вклад в упрочнение при нестационарных циклических режимах вносит изотропная компонента, тогда как кинематическая компонента ответственна за описание поведения материала в условиях стационарного циклического деформирования. Систематизация экспериментальных данных дает основание констатировать:

– фиксируется несовпадение ориентации вектора пластических приращений Δe_{ij}^p с направлениями девиатора напряжений σ'_{ij} и с его приращениями $\Delta \sigma'_{ij}$, вектор Δe_{ij}^p занимает некоторое промежуточное положение;

– направление смещения центра поверхности текучести ρ_{ij}^p не коррелирует с направлением вектора приращения пластических деформаций Δe_{ij}^p .

Из вышеизложенного следует требование к моделям циклической упругопластичности: они должны обеспечивать адекватное воспроизведение векторных свойств материала.

Методика экспериментальных исследований, описанная в [16], базировалась на принципе формирования цикла нагружения путем непрерывного комбинирования произвольных сегментов в пространстве контролируемых деформаций $e_{11}-e_{12}$ (так называемое «жесткое» нагружение). Блок нагружения конструировался как совокупность идентичных циклов в произвольной последовательности, причем программа испытаний позволяла варьировать количество таких блоков, каждый из которых мог иметь собственную циклическую траекторию. Рассматривались пропорциональные процессы, характеризуемые лучевыми траекториями деформирования, и непропорциональные, характеризуемые произвольными сложными траекториями. Число циклов N в блоке малоциклового нагружения в зависимости от вида траектории нагружения варьировалось в диапазоне от 10 до 25 циклов нагружения. Обобщенные данные трех серий опытов, представляющие собой зафиксированные конечные значения осевых и сдвиговых деформаций в рамках каждого режима, иллюстрирует рис. 2.

Моделирование процессов деформирования лабораторных образцов осуществлялось в рамках модели термопластичности, учитывающей кинематическую и изотропную составляющие упрочнения. Необходимые для расчетов материальные константы и скалярные функции, соответствующие стали 304, были приняты в соответствии с данными из [2].

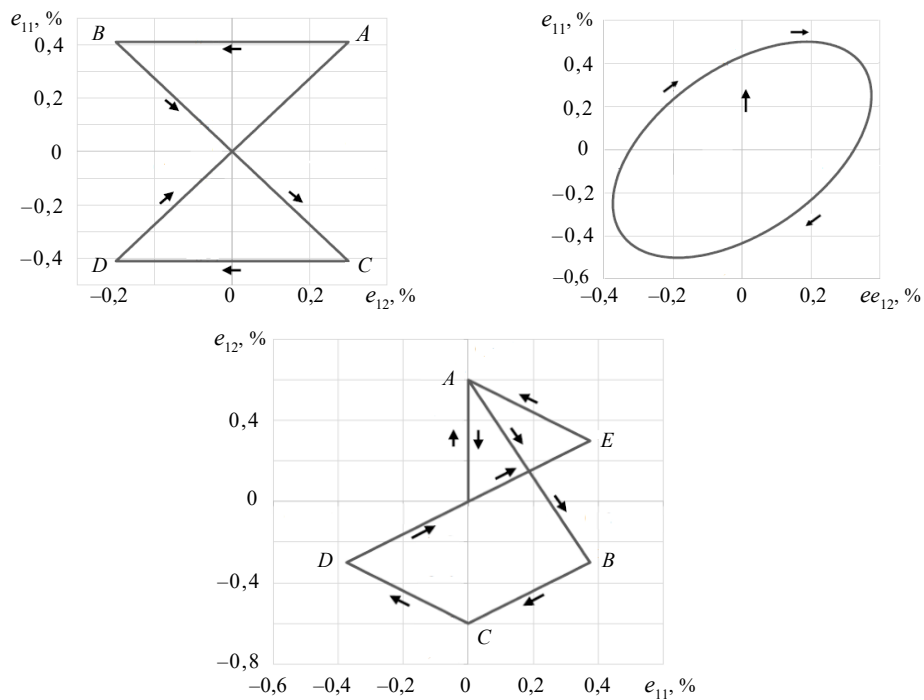


Рис. 2. Траектории деформирования в пространстве e_{11} - e_{12}

Графические материалы, иллюстрирующие отклик в пространстве напряжений σ_{11} - σ_{12} на реализованные в эксперименте программы сложного деформирования, представлены на рис. 3 для первых пяти циклов ($N = 5$) малоциклового нагружения.

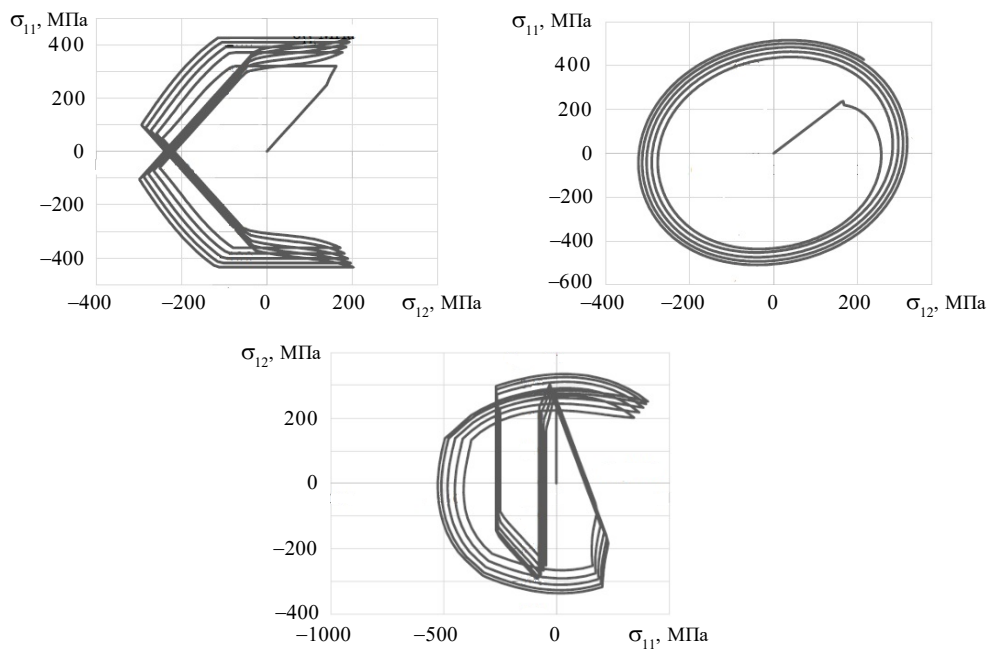


Рис. 3. Отклик в пространстве напряжений σ_{11} - σ_{12} для $N = 5$

Верификация модели выполнялась путем сопоставления расчетных данных (численные результаты – сплошные линии) с экспериментальными кривыми из источника [16] (штриховые линии) для одного из последних ($N = 23$) циклов непропорционального блока нагружения (рис. 4).

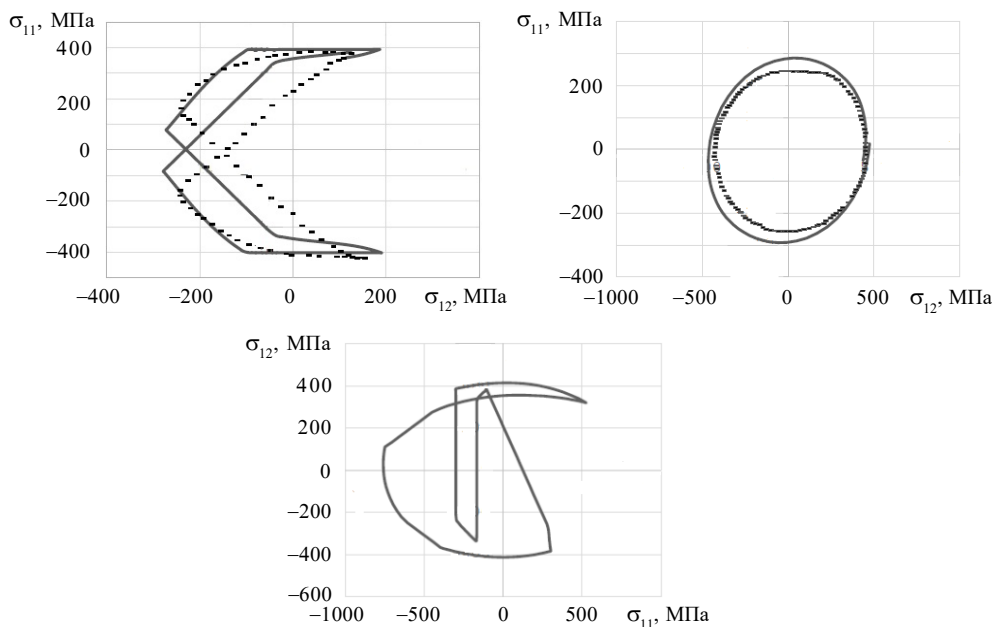


Рис. 4. Отклик в пространстве напряжений σ_{11} – σ_{12} на реализованные в эксперименте программы сложного деформирования для $N = 23$

Анализ показывает, что результаты численного моделирования качественно и с приемлемой для инженерных задач точностью количественно воспроизводят экспериментальные данные.

На рис. 5 представлена диаграмма деформирования в координатах интенсивность напряжений – интенсивность деформаций ($\sigma_{ii} - e_{ii}$), характеризующая скалярные свойства материала. На рис. 6 показана зависимость траектории движения центра поверхности текучести $\rho_{11}^p - \rho_{12}^p$.

Анализ выполненных расчетов показывает значительную несоосность тензоров σ_{ij} , e_{ij} , e_{ij}^p , ρ_{ij}^p . Отмеченные в экспериментах по циклическому непропорциональному упругопластическому деформированию конструктивных сталей эффекты описываются достаточно точно. В целом сопоставление результатов вычислительных экспериментов с данными натурных испытаний свидетельствует о том, что разработанная модель качественно и с допустимой для инженерных приложений точностью количественно воспроизводит основные закономерности сложного упругопластического деформирования конструкционных сталей при малоцикловом нагружении. Зафиксированные различия между расчетом и экспериментом могут быть следствием, в частности, не вполне точной идентификации материальных констант модели.

Поведение различных материалов при нагружении по произвольным сложным траекториям деформирования изучалось в [12, 13]. Испытания проводились на автоматизированном комплексе СМ-ЭВМ, разработанном в лаборатории механических испытаний Тверского государственного технического университета (научное руководство – проф. В.Г. Зубчанинов) [12, 13].

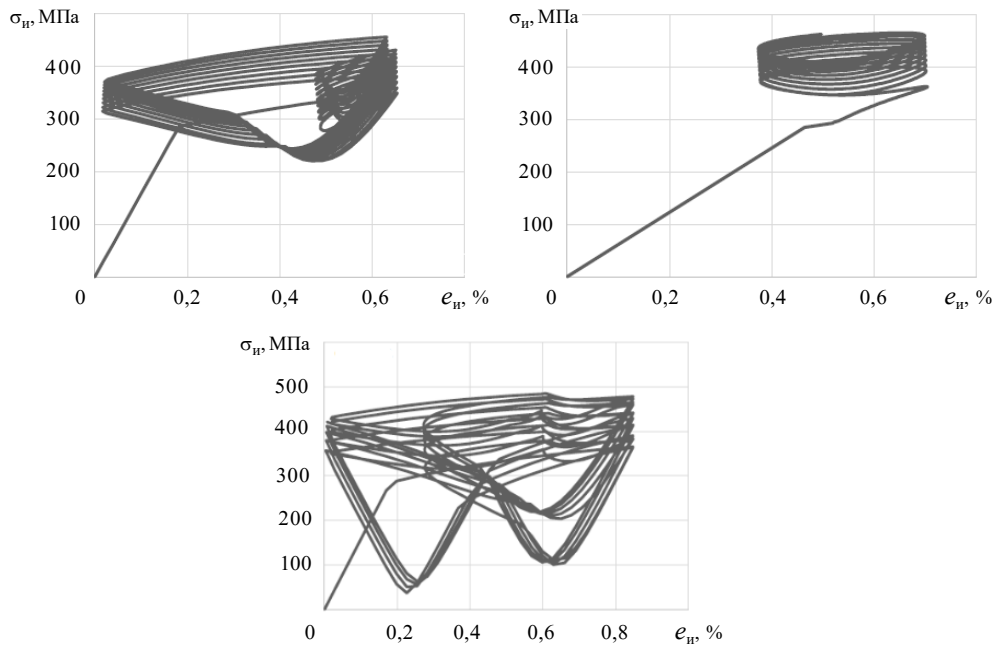


Рис. 5. Диаграммы деформирования $\sigma_n - e_n$

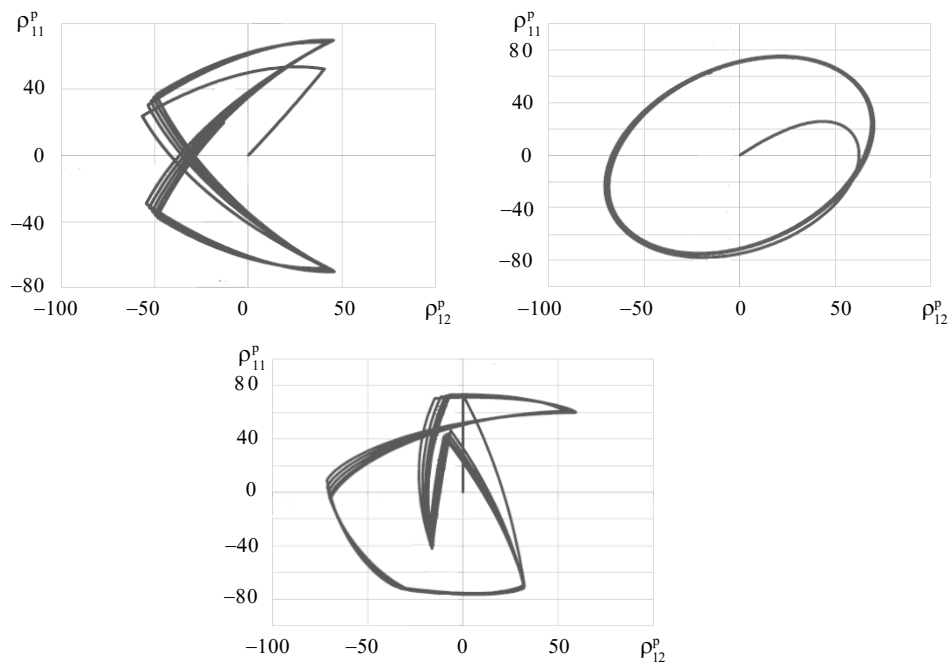


Рис. 6. Зависимость траектории движения центра поверхности текучести $\rho_{11}^p - \rho_{12}^p$

Испытательный стенд позволяет в автоматическом режиме реализовывать произвольные программы сложного деформирования тонкостенных цилиндрических оболочек, нагружаемых осевым усилием P , крутящим моментом M и внутренним давлением q . В качестве материала образцов использовалась сталь 45 в состоянии поставки (геометрия: тонкостенная труба с рабочей длиной 110 мм, толщиной $h = 1$ мм

и радиусом срединной поверхности $R = 15,5$ мм; температура испытаний 20°C . Расчет компонент тензоров напряжений σ_{ij} и деформаций e_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) для различных видов нагружения (растяжение, кручение, внутреннее давление) выполнялся по следующим зависимостям:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{P}{2\pi R h}, & \sigma_{22} &= \frac{qR}{h}, & \sigma_{12} &= \frac{M}{2\pi R^2 h}, & \sigma_{23} &= \sigma_{31} = \sigma_{33} = 0, \\ e_{11} &= \frac{\Delta l}{l}, & e_{22} &= \frac{\Delta R}{R}, & e_{12} &= \frac{\varphi R}{2l}, & e_{23} &= e_{31} = 0, & e_{33} &\neq 0. \end{aligned} \quad (1)$$

В расчетах использованы величины: Δl – абсолютное удлинение рабочей части испытываемого образца; ΔR – изменение радиуса его срединной поверхности; φ – угол относительного поворота сечений.

Экспериментальные исследования выполнялись в плоскости \mathcal{E}_1 – \mathcal{E}_3 девиаторного пространства, предложенного А.А. Ильюшиным. Вычисление компонент S_k, \mathcal{E}_k ($k = \overline{1, 5}$) векторов напряжений $\bar{\sigma}$ и деформаций \bar{e} в пятимерном девиаторном пространстве осуществлялось с использованием соотношений

$$\begin{aligned} \bar{\sigma} &= S_k \bar{i}_k, & \bar{e} &= \mathcal{E}_k \bar{i}_k & (k = \overline{1, 5}), \\ \sigma &= |\bar{\sigma}| = \sqrt{S_1^2 + S_2^2 + \dots + S_5^2}, & e &= |\bar{e}| = \sqrt{\mathcal{E}_1^2 + \mathcal{E}_2^2 + \dots + \mathcal{E}_5^2}, \end{aligned} \quad (2)$$

устанавливающих их взаимосвязь, по приведенным ниже формулам:

$$\begin{aligned} S_1 &= \sqrt{\frac{2}{3}} \left[\sigma_{11} - \frac{1}{2}(\sigma_{22} + \sigma_{33}) \right], & S_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_{22} - \sigma_{33}), \\ S_3 &= \sqrt{2}\sigma_{12}, & S_4 &= S_5 = 0, \\ \mathcal{E}_1 &= \sqrt{\frac{3}{2}}e_{11}, & \mathcal{E}_2 &= \sqrt{2} \left(e_{22} + \frac{1}{3}e_{11} \right), \\ \mathcal{E}_3 &= \sqrt{2}e_{12}, & \mathcal{E}_4 &= \mathcal{E}_5 = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

При обработке результатов принималось допущение, что напряженное состояние образцов плоское, и использовалось условие несжимаемости материала.

Численный анализ процессов деформирования тонкостенных трубчатых образцов (сталь 45) по сложной многозвенной траектории выполнялся на основе модели термопластичности, включающей в себя трансляционно-изотропное упрочнение. Геометрия траектории и полученные результаты проиллюстрированы на рисунках, а подробное описание приведено в [6]. На начальном этапе (первое звено) реализовывалось закручивание образца до $\mathcal{E}_3^* = 1,25\%$. С последующим изломом траектории под углом 90° образец переводился на деформирование по круговой траектории с радиусом $R = 1,25\%$, в ходе которого было пройдено четыре полных оборота. Заключительная стадия испытаний соответствовала движению по прямой линии, параллельной оси деформаций \mathcal{E}_1 . Принципиальной особенностью рассматриваемой программы являлось обеспечение постоянства модуля вектора деформации \bar{e} на всей протяженности круговых сегментов траектории.

Результаты моделирования отклика материала на сложную траекторию деформирования представлены на рис. 7–10.

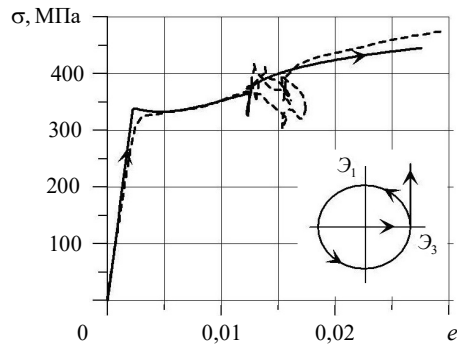


Рис. 7. Глобальная диаграмма деформирования σ – e

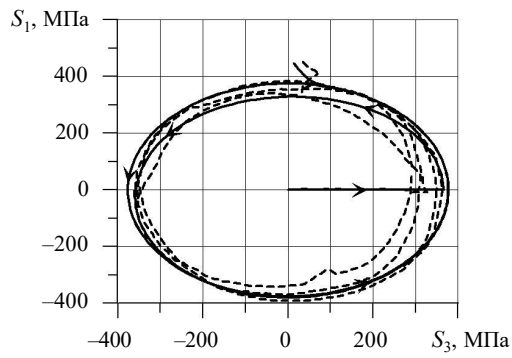


Рис. 8. Отклик материала на сложную траекторию деформирования S_1 – S_3

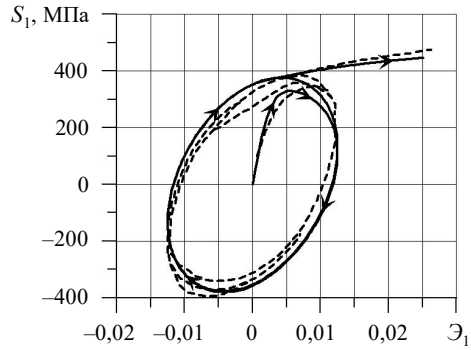


Рис. 9. Локальная диаграмма деформирования S_1 – ϵ_1

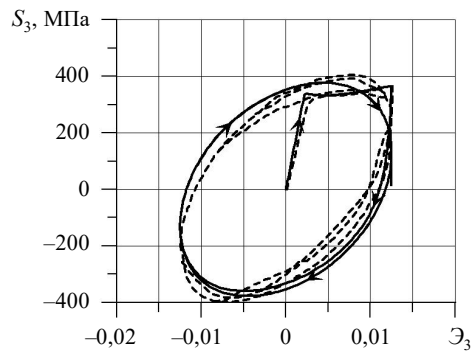


Рис. 10. Локальная диаграмма деформирования S_3 – ϵ_3

На рис. 8 представлен отклик на реализованную сложную траекторию деформирования в пространстве напряжений S_1-S_3 . На рис. 9, 10 приведены локальные траектории деформирования (графики $S_1-\mathcal{E}_1$, $S_3-\mathcal{E}_3$), а на рис. 7 – глобальная диаграмма $\sigma-e$, демонстрирующая скалярные свойства материала. Установлено, что для рассмотренной траектории нагружения расчетные данные находятся в качественном и количественном соответствии с экспериментом.

На основании проведенного исследования можно заключить, что используемая модель термопластичности, интегрирующая кинематическую и изотропную составляющие упрочнения и дополнительно учитывающая такие явления, как «нырок» напряжений, дополнительное циклическое упрочнение материала и др., адекватно отражает физические процессы деформирования материала и может быть рекомендована для практического применения в численных расчетах.

Заключение

С целью оценки достоверности конститутивных соотношений, разработанных в рамках теории пластического течения и учитывающих изотропное и кинематическое упрочнение, было выполнено сопоставление результатов численного моделирования с экспериментальными данными. Объектом сравнения служили процессы деформирования конструкционных сталей по плоским траекториям, характеризующимся различной кривизной, в условиях монотонного и циклического нагружения. Верификация подтвердила, что модель адекватно отражает закономерности как пропорционального, так и непропорционального пластического деформирования конструкционных сталей при нагружении по произвольным плоским траекториям нагружения [17].

Анализ модели [10, 11, 18] и аналогичных подходов [19–21] позволяет рекомендовать их к расчетам конструктивных узлов материальных объектов, работающих в условиях нестационарного термомеханического нагружения.

Список литературы

1. Митенков Ф.М., Кайдалов В.Б., Коротких Ю.Г. и др. *Методы обоснования ресурса ядерных энергетических установок*. М.: Машиностроение, 2007. 448 с.
2. Волков И.А., Коротких Ю.Г. *Уравнения состояния вязкоупругопластических сред с повреждениями*. М.: Физматлит, 2008. 422 с.
3. Коллинз Дж. *Повреждение материалов в конструкциях. Анализ. Предсказание. Предотвращение*. М.: Мир, 1984. 624 с.
4. Зубчанинов В.Г. *Механика процессов пластических сред*. М.: Физматлит, 2010. 352 с.
5. Ишлинский А.Ю., Ивлев Д.Д. *Математическая теория пластичности*. М.: Физматлит, 2001. 701 с.
6. Жуков А.М. Некоторые особенности поведения материалов при упругопластическом деформировании. *Вопросы теории пластичности*. М.: Изд-во АН СССР, 1961. С. 30–57.
7. Ильюшин А.А. Об основах общей математической теории пластичности. *Вопросы теории пластичности*. М.: Изд-во АН СССР, 1961. С. 3–29.
8. Ильюшин А.А. *Пластичность. Основы общей математической теории*. М.: Изд-во АН СССР, 1963. 271 с.
9. Хилл Р. *Математическая теория пластичности*. М.: Гостехиздат, 1956. 407 с.
10. Митенков Ф.М., Волков И.А., Игумнов Л.А., Коротких Ю.Г. и др. *Прикладная теория пластичности*. М.: Физматлит, 2015. 284 с.
11. Волков И.А., Игумнов Л.А., Коротких Ю.Г. *Прикладная теория вязкопластичности*. Нижний Новгород: Изд-во ННГУ, 2015. 317 с.

12. Зубчанинов В.Г., Охлопков Н.Л., Гаранников В.В. *Экспериментальная пластичность. Кн. 1. Процессы сложного деформирования*. Тверь: ТГТУ, 2003. 172 с.
13. Зубчанинов В.Г., Охлопков Н.Л., Гаранников В.В. *Экспериментальная пластичность. Кн. 2. Процессы сложного нагружения*. Тверь: ТГТУ, 2004. 184 с.
14. Охаси И., Каваи М., Каито Т. Неупругое поведение стали 316 при многоосных непропорциональных циклических нагружениях при повышенной температуре. *Теоретические основы инженерных расчетов*. 1985. Т. 107. №2. С. 6–15.
15. Охаси И., Танака Е., Оока М. Пластическое деформирование нержавеющей стали типа 316 под действием несинфазных циклов по деформации. *Теоретические основы инженерных расчетов*. 1985. Т. 107. №4. С. 61–73.
16. Лэмба Г.С., Сайдботтом О.М. Пластичность при циклическом нагружении по непропорциональным траекториям. *Теоретические основы инженерных расчетов*. 1978. Т. 100. №1. С. 108–117.
17. Макдауэлл Д.Л. Экспериментальное изучение структуры определяющих уравнений для непропорциональной циклической пластичности. *Теоретические основы инженерных расчетов*. 1985. №4. С. 98–111.
18. Ильюшин А.А., Ленский В.С. Модель и алгоритм. *Прикладные проблемы прочности и пластичности: Всесоюз. межвуз. сб.* Горьк. ун-т, Горький. 1975. С. 7–38.
19. Волков И.А., Коротких Ю.Г., Фомин М.Н. Численное моделирование сложного пластического деформирования металлов по плоским и пространственным траекториям произвольной кривизны и кручения. *Вычислительная механика сплошных сред*. 2009. Т. 2. №3. С. 17–25.
20. Chaboche J.L. Constitutive equation for cyclic plasticity and cyclic viscoplasticity. *International Journal of Plasticity*. 1989. Vol. 5. No 3. P. 247–302.
21. Бондарь В.С. *Неупругость. Варианты теории*. М.: Физматлит, 2004. 144 с.

References

1. Mitenkov F.M., Kaydalov V.B., Korotkikh Yu.G. et al. *Metody obosnovaniya resursa yadernykh energeticheskikh ustanovok [Methods of Substantiating the Resource of Nuclear Power Plants]*. Moscow. Mashinostroenie Publ. 2007. 448 p. (In Russian).
2. Volkov I.A., Korotkikh Yu.G. *Uravneniya sostoyaniya vyazkoupругoplasticheskikh sred s povrezhdeniyami [Equations of State of Viscoelastic Plastic Media with Damage]*. Moscow. Fizmatlit Publ. 2008. 422 p. (In Russian)
3. Collins J.A. *Failure of Materials Design. Analysis. Prediction. Prevention*. New York. Toronto. Singapoge. John Wiley & Sons. 1981. 622 p.
4. Zubchaninov V.G. *Mekhanika protsessov plasticheskikh sred [Mechanics of Plastic Media Processes]*. Moscow. Fizmatlit Publ. 2010. 352 p. (In Russian).
5. Ishlinskiy A.Yu., Ivlev D.D. *Matematicheskaya teoriya plastichnosti [Mathematical Theory of Plasticity]*. Moscow. Fizmatlit Publ. 2001. 701 p. (In Russian).
6. Zhukov A.M. Nekotorye osobennosti povedeniya materialov pri uprugoplasticheskom deformirovani [Some features of the behavior of materials during elastoplastic deformation]. V kn: *Voprosy teorii plastichnosti [In: Questions of the Theory of Plasticity]*. Moscow. USSR Academy of Sciences Publ. 1961. P. 30–57 (In Russian).
7. Ilyushin A.A. Ob osnovakh obshchey matematicheskoy teorii plastichnosti [On the fundamentals of the general mathematical theory of plasticity]. V sb.: *Voprosy teorii plastichnosti [In: Questions of the Theory of Plasticity]*. Moscow. USSR Academy of Sciences Publ. 1961. P. 3–29 (In Russian).
8. Ilyushin A.A. *Plastichnost. Osnovy obshchey matematicheskoy teorii [Plasticity: Fundamentals of a General Mathematical Theory]*. Moscow. USSR Academy of Sciences Publ. 1963. 271 p. (In Russian).
9. Hill R. *The Mathematical Theory of Plasticity*. Oxford. New York. Oxford University Press. 1950. 362 p.
10. Mitenkov F.M., Volkov I.A., Igumnov L.A., Korotkikh Yu.G. et al. *Prikladnaya teoriya plastichnosti [Applied Theory of Plasticity]*. Moscow. Fizmatlit Publ. 2015. 284 p. (In Russian).

11. Volkov I.A., Igumnov L.A., Korotkikh Yu.G. *Prikladnaya teoriya vyazkoplastichnosti [Applied Theory of Viscoplasticity]*. N. Novgorod. NNGU Publ. 2015. 317 p. (In Russian).
12. Zubchaninov V.G., Okhlopkov N.L., Garannikov V.V. *Eksperimentalnaya plastichnost. Kn. 1. Protssesy slozhnogo deformirovaniya [Experimental Plasticity. Book 1. Processes of Complex Deformation]*. Tver. TGTU Publ. 2003. 172 p. (In Russian).
13. Zubchaninov V.G., Okhlopkov N.L., Garannikov V.V. *Eksperimentalnaya plastichnost. Kn. 2. Protssesy slozhnogo nagruzheniya [Experimental Plasticity. Book 2. Processes of Complex Loading]*. Tver. TGTU Publ. 2004. 184 p. (In Russian).
14. Ohashi I., Kawai M., Kaito T. Neuprugoe povedenie stali 316 pri mnogoosnykh neproportionalnykh tsiklicheskiykh nagruzheniyakh pri povyshennoy temperature [Inelastic behavior of 316 steel under multiaxial disproportionate cyclic loads at elevated temperatures]. *Teoreticheskie osnovy inzhenernykh raschetov [Theoretical Foundations of Engineering Calculations]*. 1985. Vol. 107. No 2. P. 6–15 (In Russian).
15. Okhasi I., Tanaka E., Ooka M. Plasticheskoe deformirovanie nerzhaveyushchey stali tipa 316 pod deystviem nesinfaznykh tsiklov po deformatsii [Plastic deformation of 316 type stainless steel under out-of-phase strain cycles]. *Teoreticheskie osnovy inzhenernykh raschetov [Theoretical Foundations of Engineering Calculations]*. 1985. Vol. 107. No 4. P. 61–73 (In Russian).
16. Lemba G.S., Saydbottom O.M. Plastichnost pri tsiklicheskom nagruzhenii po neproportionalnym traektoriyam [Plasticity under cyclic loading along disproportionate trajectories]. *Teoreticheskie osnovy inzhenernykh raschetov [Theoretical Foundations of Engineering Calculations]*. 1978. Vol. 100. No 1. P. 108–117 (In Russian).
17. Makdauell D.L. Eksperimentalnoe izuchenie struktury opredelyayushchikh uravneniy dlya neproportionalnoy tsiklicheskoj plastichnosti [Experimental study of the structure of defining equations for disproportionate cyclic plasticity]. *Teoreticheskie osnovy inzhenernykh raschetov [Theoretical Foundations of Engineering Calculations]*. 1985. Vol. 107. No 4. P. 98–111 (In Russian).
18. Ilyushin A.A., Lenskiy V.S. Model i algoritm [The model and algorithm]. *Prikladnye problemy prochnosti i plastichnosti: Vsesoyuznyy mezhvuzovskiy sbornik [Applied Problems of Strength and Plasticity: All-Union Interuniversity Collection]*. Gorky University. Gorkiy. 1975. P. 7–38 (In Russian).
19. Volkov I.A., Korotkih Yu.G., Fomin M.N. Chislennoe modelirovanie slozhnogo plasticheskogo deformirovaniya metallov po ploskim i prostranstvennym traektoriyam proizvolnoy krivizny i krucheniya [Numerical modeling of complex plastic deformation of metals along plane and spatial trajectories of arbitrary curvature and torsion]. *Vychislitel'naya mekhanika sploshnykh sred [Computational Continuum Mechanics]*. 2009. Vol. 2. No 3. P. 17–25 (In Russian).
20. Chaboche J.L. Constitutive equation for cyclic plasticity and cyclic viscoplasticity. *Int. J. Plast.* 1989. Vol. 5. No 3. P. 247–302.
21. Bondar V.S. *Neuprugost. Varianty teorii [Inelasticity. Variants of the Theory]*. Moscow. Fizmatlit Publ. 2004. 144 p. (In Russian).

**NUMERICAL ANALYSIS OF THE REGULARITIES OF PLASTIC DEFORMATION
OF STRUCTURAL ALLOYS UNDER MONOTONIC
AND CYCLIC NONPROPORTIONAL DEFORMATION MODES***

Igumnov L.A., Volkov I.A., Kostyukov V.E.

*National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod,
Nizhny Novgorod, Russian Federation*

ivan.volkov@mech.unn.ru

Received by the Editor 2025/11/12

The patterns of plastic deformation in metals and alloys subjected to complex plastic deformation under both monotonic and cyclic loading are investigated. The theoretical basis of the research is a model developed within the framework of the differential theory of plasticity by professor Yu.G. Korotkikh. A key feature of the model is the concept of a loading (yield) surface and the postulate of the gradientality of the plastic strain rate vector to this surface at the loading point. This form of writing constitutive equations allows for a correct description of fundamental plasticity effects when arbitrary (complex) loading paths are realized. By setting the corresponding material parameters to zero, all main forms of equations for plastic deformation of materials at small strains presented in the literature are obtained as a special case from the general variant of the equations (a system of “nested” models).

Problems of mathematical modeling of processes characterized by a change in the orientation of the principal axes of stress tensors, as well as total and plastic strains (so-called non-proportional loading regimes), are investigated. To verify the proposed model, a series of numerical experiments simulating complex plastic deformation of structural steels (using grades 304, 316, and steel 45 as examples) was performed. The analysis was conducted for planar trajectories corresponding to non-proportional deformation regimes under monotonic and cyclic loading. The research results demonstrate that Yu.G. Korotkikh's plasticity model correctly predicts the main effects of complex plastic deformation in structural alloys. The model provides a qualitative description of material behavior for planar loading trajectories of any curvature, and its accuracy is sufficient for practical calculations.

A number of characteristic features accompanying the process of non-proportional plastic deformation of alloys have been noted: the presence of a “dip” on the material's deformation diagram when transitioning from a curvilinear deformation section to a rectilinear one; the wavy nature of the material's vector properties on curvilinear trajectories of constant curvature under cyclic loading; the appearance of additional cyclic hardening, and others.

Keywords: plasticity, complex loading, modeling, numerical experiment, physical experiment, plane deformation paths, monotonic and cyclic loading.

* The study was carried out with the financial support of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (project No FSWR-2026-0019).