

УДК 539.3

DOI: 10.32326/1814-9146-2026-88-1-86-103

**КИНЕМАТИЧЕСКОЕ НАГРУЖЕНИЕ
ПЛОСКОГО ТЕСТ-ОБРАЗЦА
С УЧАСТКАМИ ДВУХСТОРОННЕГО ЗАКРЕПЛЕНИЯ.
2. АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ПРОСТЕЙШИХ ЗАДАЧ***

© 2026 г.

Паймушин В.Н.¹, Шишкин В.М.²

¹*Казанский национальный исследовательский технический университет
им. А.Н. Туполева, Казань, Российская Федерация*

²*Вятский государственный университет, Киров, Российская Федерация*

vpajmushin@mail.ru

Поступила в редакцию 23.08.2025

Поставлена и решена линейная задача о начальном (докритическом) плоском напряженно-деформированном состоянии при осевом сжатии тест-образца с участками двухстороннего закрепления конечной длины, выполненного из однонаправленного волокнистого композитного материала. Предполагается, что осевое сжатие тест-образца осуществляется путем кинематического нагружения закрепленных концевых участков за счет сил трения, возникающих между стержнем и жесткими элементами приспособления и обеспечивающих реализацию одной из известных схем нагружения в соответствии с существующими стандартами испытаний. На участке двухстороннего закрепления образца рассматриваемый способ нагружения обеспечивает также и его сжатие в поперечном направлении. Построенные для закрепленных участков уравнения основаны на кубической по толщине аппроксимации осевых перемещений и линейной аппроксимации прогиба, которые преобразуются в другую модель путем их подчинения в точках граничных поверхностей условиям кинематического сопряжения с жесткими элементами приспособления для испытаний с заданными перемещениями. На незакрепленном участке для осевых перемещений принята кубическая, а для прогиба – линейная аппроксимации по толщине образца, в дополнение к которым также использована уточненная модель С.П. Тимошенко с учетом поперечного обжатия. Для всех принятых моделей деформирования сформулированы кинематические условия сопряжения закрепленного и незакрепленного участков, построены уравнения их равновесия, а также силовые условия сопряжения. С учетом сформулированных кинематических условий сопряжения отмеченных участков образца и соответствующих линейных соотношений упругости построены аналитические решения полученных уравнений в перемещениях, с использованием которых проведены численные эксперименты по определению докритического напряженного состояния при кинематическом сжатии образца, выполненного из однонаправ-

* Выполнено в рамках государственного задания Минобрнауки России (проект FZSU-2024-0010).

ленного волокнистого композита на основе углеродного волокна марки ЭЛУР-П и связующего ХТ-118. Дано сравнение результатов аналитического решения задачи с конечно-элементным решением при моделировании образца совокупностью изопараметрических прямоугольных элементов, построенных на основе уравнений плоской задачи теории упругости.

Ключевые слова: волокнистый композит, тест-образец, стержень-полоса, закрепленный и незакрепленный участки, уточненная трансформационная модель деформирования, кинематическое нагружение.

Введение

Экспериментальное определение физико-механических характеристик конструкционных материалов на основе проведения тех или иных испытаний является неотъемлемой частью в технологическом процессе проектирования и изготовления с их применением конструкций того или иного назначения. Для волокнистых композитных материалов (ВКМ) на полимерной основе в соответствии с существующими стандартами испытания проводятся, как правило, на плоских тест-образцах, имеющих ту или иную ориентацию расположенных в матрице волокон. Наиболее простыми в реализации являются испытания на растяжение образцов со структурами $[0^\circ]_s$ и $[90^\circ]_s$ (s – число монослоев в образце) с волокнами, расположенными вдоль и поперек к направлению действующей нагрузки, имеющих небольшие значения s и толщину t .

Более сложными в реализации являются испытания на сжатие тест-образцов со структурами $[0^\circ]_s$, $[90^\circ]_s$ и $[\pm 45^\circ]_s$ в силу их возможной потери устойчивости по той или иной форме. При этом значительный интерес представляют ВКМ со структурой $[0^\circ]_s$, поведение которых при сжатии в направлении волокон принципиально отличается от их поведения при растяжении. При растяжении разрушение образца, как правило, происходит из-за разрыва волокон по причине достижения растягивающим напряжением предельного значения. Поведение композита при этом остается линейно упругим вплоть до разрушения, и оно не зависит от числа слоев s в образце [1]. Поведение таких же образцов при сжатии оказывается принципиально другим. Во-первых, из-за возможной потери устойчивости по изгибной форме образцы должны иметь значительную относительную толщину (то есть большое количество монослоев). Во-вторых, требуется использование специальных приспособлений для крепления и нагружения образцов в соответствии с существующими стандартами испытаний [2, 3]. В-третьих, разрушение образцов всегда происходит вблизи концевых сечений образцов в окрестности захватов путем среза поперечного сечения.

На рис. 1 представлена одна из наиболее употребительных схем испытаний плоских тест-образцов из волокнистых композитов на осевое сжатие. Тест-образцы l с длиной рабочей части $a = 2l$ и общей длиной $2(l + L)$ имеют концевые участки длиной l (на рис. 1 в силу симметрии показана половина образца), закрепляемые в приспособлении для испытаний. При использовании такой схемы испытаний усилие сжатия P передается за счет сил трения между боковыми гранями образца l и жесткими накладками 2 (рис. 1а), подвергающимися кинематическому нагружению перемещениями u^* и $w^* = cu^*$ (рис. 1б), где c – некоторое малое число, обеспечивающее выполнение неравенства $w^* \ll u^*$.

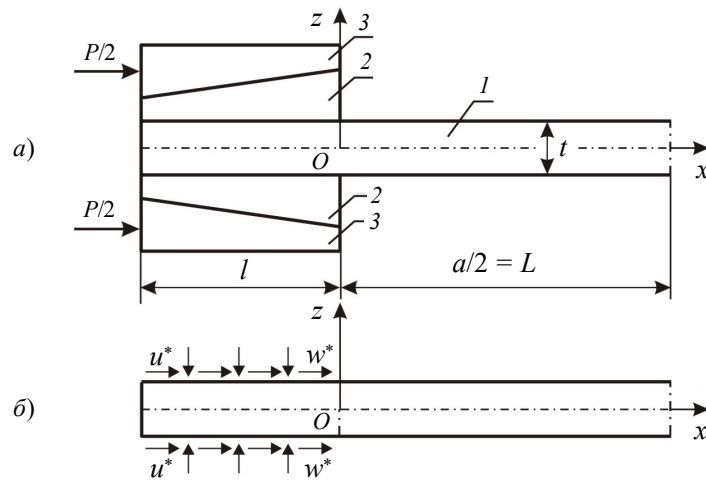


Рис. 1. Схема испытаний плоских тест-образцов на осевое сжатие силой P :
 1 – тест-образец; 2 – жесткие неподвижные накладки; 3 – жесткие подвижные накладки

В статье [3] на основании проведенных физических экспериментов с плоскими тест-образцами, изготовленными из ВКМ на основе углероды ЭЛУР-П со структурой $[0^\circ]_{30}$, показано, что потеря несущей способности (разрушение) испытываемых тест-образцов происходит за счет напряжений поперечного сдвига σ_{13} в зоне перехода от участка закрепления к рабочей части образца. На рис. 2, 3 приведены фотографии разрушенных тест-образцов после проведения испытаний, на которых отчетливо видно, что все образцы разрушились в отмеченной зоне по сдвиговой форме, что является характерным для однонаправленных композитов, имеющих высокую степень ортотропии.

Однако вопросы, связанные с исследованием распределения нормальных и касательных напряжений как по длине, так и по толщине тест-образца остаются недостаточно изученными. Особый интерес при этом представляют области, расположенные вблизи перехода через границу от закрепленного участка к незакрепленному, где должна наблюдаться ярко выраженная трансформация нормальных и касательных напряжений и локализация их вблизи сечения $x = 0$ (см. рис. 1).

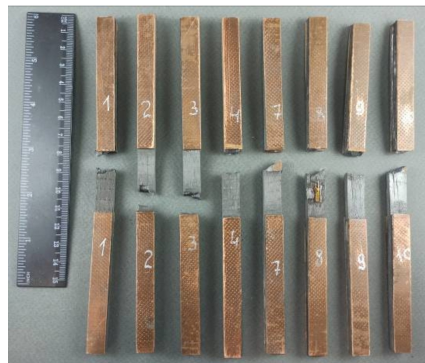


Рис. 2. Общий вид разрушенных образцов из композита ЭЛУР-П (по данным из [3])

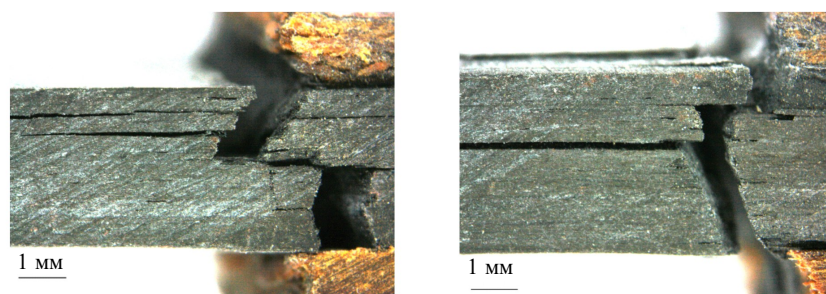


Рис. 3. Вид разрушенных образцов из композита ЭЛУР-П с торца рабочей части: слева – образец №2; справа – образец №4 (по данным из [3])

Для решения задач механики деформирования тонкостенных элементов конструкций (в том числе и плоских стержней) возможна пространственная постановка соответствующих задач и построение их численных решений на основе современных коммерческих пакетов прикладных программ [5, 6], основанных преимущественно на использовании метода конечных элементов (МКЭ) [7–13], что является желательным, но малоэффективным при их малой относительной толщине. В связи с этим значительное внимание в научной литературе уделялось проблемам редукции трехмерных уравнений механики деформирования к одномерным и двумерным уравнениям теории стержней, пластин и оболочек. Для тонкостенных элементов конструкций из композитных материалов такие уравнения построены в развитие классической теории [14, 15 и др.] и с учетом поперечных сдвигов и поперечного обжатия. Научная литература, посвященная указанным проблемам, весьма обширна и многогранна. Из нее, в частности, можно выделить публикации, посвященные построению высокоточных геометрически линейных и нелинейных моделей деформирования тонкостенных элементов конструкций с учетом поперечных сдвигов и поперечного обжатия, а также разработке на их основе тех или иных аналитических и численных методов решения соответствующих статических и динамических задач [16–25 и др.].

Однако необходимо отметить, что во всех исследованиях, посвященных разработке для тонкостенных элементов конструкций уточненных вариантов теории высокого порядка, практически не уделяется должного внимания проблемам формулировки граничных условий при тех или иных вариантах соединения с другими элементами конструкций или их закрепления на жестких опорных элементах.

В связи с изложенным представляются актуальными задачи, связанные с разработкой аналитических и численных методов анализа напряженно-деформированного состояния (НДС) композитных тест-образцов при их кинематическом сжатии, которые базируются на использовании высокоточных трансформационных моделей деформирования. Такие модели позволяют с необходимой степенью точности и содержательности учитывать деформативность материала образцов на участках их двухстороннего закрепления, имеющих конечную длину, и описывать картину распределения напряжений по длине и толщине тест-образца, включая области перехода от закрепленных участков к незакрепленным.

В статье [4] была построена уточненная трансформационная математическая модель геометрически нелинейного деформирования при кинематическом сжатии плоского стержня (тест-образца), выполненного из ВКМ и состоящего по длине из незакрепленного и двухсторонне закрепленных концевых участков. В ней основные

уравнения (кинематические соотношения, уравнения статического равновесия) для отмеченных участков стержня были получены с сохранением в них таких геометрически нелинейных слагаемых, которые позволяют выявить как классические изгибные, так и неклассические поперечно-сдвиговые формы потери устойчивости стержней при их статических испытаниях на сжатие и изгиб.

Настоящая статья является продолжением статьи [4] и посвящена построению на основе полученных в ней уравнений аналитического решения простейшей линейной задачи, описывающей начальное (докритическое) НДС композитного тест-образца со структурой $[0^\circ]_s$, которое формируется в нем при кинематическом осевом сжатии.

1. Постановка линейной задачи о начальном (докритическом) напряженно-деформированном состоянии тест-образца

Если через $U_0(x, z)$ и $W_0(x, z)$ обозначить перемещения точек образца в направлениях осей x и z на участке закрепления образца $-l \leq x \leq 0$, то при рассматриваемом его кинематическом нагружении в точках граничных плоскостей $z = \pm t/2$ при плоской постановке задачи должны быть выполнены условия

$$\begin{aligned} U_0(x, z = -t/2) &= u^*, & W_0(x, z = -t/2) &= w^*, \\ U_0(x, z = t/2) &= u^*, & W_0(x, z = t/2) &= -w^*. \end{aligned} \quad (1)$$

Удовлетворяющие этим условиям аппроксимирующие функции $U_0(x, z)$, $W_0(x, z)$ для участка закрепления $-l \leq x \leq 0$ построены в [4] и в предположении об отсутствии прогиба w_0 осевой линии указанного участка имеют вид:

$$\begin{aligned} U_0(x, z) &= \left(1 - \frac{4z^2}{t^2}\right) u_0 + z \left(1 - \frac{4z^2}{t^2}\right) \gamma_0 + \frac{4z^2}{t^2} u^*, \\ W_0(x, z) &= -\frac{2z}{t} w^*, \quad -\frac{t}{2} \leq z \leq \frac{t}{2}, \quad -l \leq x \leq 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где $u_0 = u_0(x)$, $\gamma_0(x)$ – подлежащие определению функции, представляющие собой осевое перемещение и угол поворота поперечного сечения тест-образца.

В случае малых перемещений соответствующие (2) уравнения равновесия закрепленного участка запишем в линейном приближении [4]:

$$T_{x,x}^0 + M_{xz}^0 + m_z^0(u_0 - u^*) = 0, \quad M_{x,x}^0 - T_{xz}^0 - T_z^0 \gamma_0 = 0, \quad (3)$$

в которых

$$\begin{aligned} T_x^0 &= \frac{2E_1^*}{3} \left(\frac{4t}{5} u_{0,x} - \nu_{31} w^* \right), & T_z^0 &= 8E_3^* \left(-\frac{w^*}{5} + \frac{\nu_{13}}{21} t u_{0,x} \right) \approx -\frac{8E_3^*}{5} w^*, \\ M_x^0 &= 0,02E_1^* t^3 \gamma_{0,x} - 0,08E_1^* \nu_{13} t u^* \gamma_0, & m_z^0 &= -\frac{32E_3^*}{3t^2} w^*, \\ T_{xz}^0 &= \frac{4G_{13}t}{5} \gamma_0, & M_{xz}^0 &= \frac{16G_{13}}{3t} (u^* - u_0) \end{aligned} \quad (4)$$

– внутренние усилия и моменты, приведенные к срединной плоскости $z = 0$; $E_1^* = E_1 / (1 - \nu_{13}\nu_{31})$, $E_3^* = E_3 / (1 - \nu_{13}\nu_{31})$, G_{13} , ν_{13} , ν_{31} – характеристики упругости и коэффициенты Пуассона материала ($E_1\nu_{31} = E_3\nu_{13}$). Здесь и далее нижний индекс x после запятой означает дифференцирование обозначаемой с ним величины по со-

ответствующей координате x . Следует заметить, что секущий модуль сдвига $\hat{G}_{13} = \sigma_{13}(\gamma_{13})/\gamma_{13}$ однонаправленного ВКМ при сжатии существенно зависит от угла сдвига γ_{13} [1]. Поэтому в (4) и далее при решении линейной задачи в качестве модуля сдвига G_{13} используется осредненный по толщине секущий модуль \hat{G}_{13} .

При подстановке в (3) соотношений (4) в предположении $u^* = \text{const}$, $w^* = \text{const}$ получим уравнения, выраженные через функции u_0 и γ_0 :

$$u_{0,xx} - k_3^2 u_0 = -k_3^2 u^*, \quad (5)$$

$$\gamma_{0,xx} - k_4 u^* \gamma_{0,x} - k_5^2 \gamma_0 = 0, \quad (6)$$

где

$$k_3^2 = \frac{10}{E_1^* t^2} \left(G_{13} - 2E_3^* \frac{w^*}{t} \right), \quad k_4 = \frac{4\nu_{13}}{t^2}, \quad k_5^2 = \frac{40}{E_1^* t^2} \left(G_{13} - 2E_3^* \frac{w^*}{t} \right) = 4k_3^2. \quad (7)$$

При рассматриваемом виде нагружения решения уравнений (5), (6) в сечении $x = -l$ должны удовлетворять граничным условиям

$$T_x^0 \Big|_{x=-l} = 0, \quad M_x^0 \Big|_{x=-l} = 0, \quad (8)$$

а формулируемые в сечении $x = 0$ условия сопряжения закрепленного участка с незакрепленным зависят от используемой для незакрепленного участка модели деформирования.

Для перемещений $U(x, z)$, $W(x, z)$ незакрепленного участка рассмотрим два вида аппроксимаций.

1.1. Аппроксимации третьего порядка для U и первого порядка для W . Следуя известным в механике тонкостенных элементов конструкций результатам по разработке высокоточных моделей деформирования [16–25], критический анализ которых был дан, в частности, в [26, 27], на незакрепленном участке $0 \leq x \leq L$ тест-образца для перемещений U и W примем аппроксимации

$$U = u + z\gamma + \frac{z^2}{2}\psi + \frac{z^3}{6}\chi, \quad W = w + z\varphi, \quad -\frac{t}{2} \leq z \leq \frac{t}{2}, \quad 0 \leq x \leq L. \quad (9)$$

Таким аппроксимациям в случае малых перемещений соответствуют уравнения равновесия вида:

$$\begin{aligned} T_{x,x} = 0, \quad T_{xz,x} = 0, \quad M_{xz,x} - T_z = 0, \\ M_{x,x} - T_{xz} = 0, \quad R_{x,x} - M_{xz} = 0, \quad N_{x,x} - R_{xz} = 0, \end{aligned} \quad (10)$$

в которых в предположении $\nu_{31} = 0$, $\nu_{13} = 0$

$$\begin{aligned} T_x = B_{11} \left(u_{,x} + \frac{t^2}{24} \psi_{,x} \right), \quad T_z = B_{33} \varphi, \quad M_x = D_{11} \left(\gamma_{,x} + \frac{t^2}{40} \chi_{,x} \right), \\ R_x = \frac{E_1 t^3}{8} \left(\frac{1}{3} u_{,x} + \frac{t^2}{40} \psi_{,x} \right), \quad N_x = \frac{E_1 t^5}{48} \left(\frac{1}{10} \gamma_{,x} + \frac{t^2}{336} \chi_{,x} \right), \end{aligned} \quad (11)$$

$$T_{xz} = B_{13} \left(\gamma + w_{,x} + \frac{t^2}{24} \chi \right), \quad M_{xz} = D_{13} (\psi + \varphi_{,x}), \quad R_{xz} = G_{13} \left[\frac{t^3}{24} (\gamma + w_{,x}) + \frac{t^5}{320} \chi \right]$$

– соотношения упругости, полученные в результате линеаризации соответствующих нелинейных соотношений, приведенных в [4]. Заметим, что в (11) введены обозначения для жесткостных коэффициентов, определяемых по формулам

$$B_{11} = E_1 t, \quad B_{33} = E_3 t, \quad B_{13} = G_{13} t, \quad D_{11} = \frac{E_1 t^3}{12}, \quad D_{13} = \frac{G_{13} t^3}{12}.$$

С учетом соотношений (11) уравнения (10) распадаются на две несвязанные системы уравнений вида

$$u_{,xx} + \frac{t^2}{24} \psi_{,xx} = 0, \quad D_{13}(\psi_{,x} + \varphi_{,xx}) - B_{33}\varphi = 0, \quad (12)$$

$$\frac{E_1 t^3}{8} \left(\frac{1}{3} u_{,xx} + \frac{t^2}{40} \psi_{,xx} \right) - D_{13}(\psi + \varphi_{,x}) = 0,$$

$$\gamma_{,x} + w_{,xx} + \frac{t^2}{24} \chi_{,x} = 0, \quad D_{11} \left(\gamma_{,xx} + \frac{t^2}{40} \chi_{,xx} \right) - B_{13} \left(\gamma + w_{,x} + \frac{t^2}{24} \chi \right) = 0, \quad (13)$$

$$\frac{E_1 t^5}{48} \left(\frac{1}{10} \gamma_{,xx} + \frac{t^2}{336} \chi_{,xx} \right) - G_{13} \left[\frac{t^3}{24} (\gamma + w_{,x}) + \frac{t^5}{320} \chi \right] = 0,$$

решения которых в сечении $x = L$ должны удовлетворять условиям симметрии

$$u = 0, \quad \gamma = 0, \quad T_{xz} = 0, \quad M_{xz} = 0, \quad \psi = 0, \quad \chi = 0. \quad (14)$$

В сечении $x = 0$ для уравнений (5), (6) и (12), (13) должны быть выполнены кинематические и силовые условия сопряжения участков

$$u|_{x=0} = u_0|_{x=0}, \quad \gamma|_{x=0} = \gamma_0|_{x=0}, \quad \psi|_{x=0} = -\frac{8}{t^2} (u_0 - u^*)|_{x=0}, \quad \chi|_{x=0} = -\frac{24}{t^2} \gamma_0|_{x=0}, \quad (15)$$

$$\left(T_x^0 - T_x + \frac{8}{t^2} R_x \right)|_{x=0} = 0, \quad \left(M_x^0 - M_x + \frac{24}{t^2} N_x \right)|_{x=0} = 0.$$

Кроме условий (15), для функций w, φ в сечении $x = 0$ формулируются условия

$$w|_{x=0} = 0, \quad \varphi_{,x=0} = -\frac{2}{t} w^*. \quad (16)$$

1.2. Уточненная модель С.П. Тимошенко с учетом поперечного обжатия.

В соответствии с этой моделью для перемещений U, W принимаются аппроксимации

$$U = u + z\gamma, \quad W = w + z\varphi, \quad 0 \leq x \leq L, \quad (17)$$

которым при малых перемещениях соответствуют уравнения равновесия

$$T_{x,x} = 0, \quad M_{xz,x} - T_z = 0, \quad (18)$$

$$M_{x,x} - T_{xz} = 0, \quad T_{xz,x} = 0. \quad (19)$$

Для входящих в (18), (19) усилий и моментов в предположении $v_{31} \neq 0, v_{13} \neq 0$ имеют место соотношения упругости

$$T_x = B_{11}^* (u_{,x} + v_{31}\varphi), \quad M_x = D_{11}^* \gamma_{,x}, \quad T_{xz} = B_{13} (\gamma + w_{,x}), \quad (20)$$

$$M_{xz} = D_{13} \varphi_{,x}, \quad T_z = B_{33}^* (v_{13} u_{,x} + \varphi),$$

где в рассматриваемом приближении

$$B_{11}^* = E_1^* t, \quad B_{33}^* = E_3^* t, \quad B_{13} = G_{13} t, \quad D_{11}^* = \frac{E_1^* t^3}{12}, \quad D_{13} = \frac{G_{13} t^3}{12}. \quad (21)$$

Для уравнений (5), (18) в сечении $x = 0$ формулируются условия сопряжения участков

$$(u_0 - u)|_{x=0} = 0, \quad (T_x^0 - T_x)|_{x=0} = 0, \quad \varphi|_{x=0} = -\frac{2}{t} w^*. \quad (22)$$

2. Построение аналитических решений сформулированных задач

2.1. Решение, соответствующее аппроксимациям (2) и (9). Первое уравнение системы (12) запишем в виде зависимости

$$u_{,xx} = -\frac{t^2}{24} \psi_{,xx}, \quad (23)$$

а третье уравнение этой системы с использованием (23) приведем к виду

$$\psi_{,xx} - \frac{60G_{13}}{E_1 t^2} (\psi + \varphi_{,x}) = 0. \quad (24)$$

Введя в рассмотрение функцию перемещения F в соответствии с зависимостями

$$\psi = F_{,x}, \quad \varphi = -F + \alpha F_{,xx}, \quad \alpha = \frac{E_1 t^2}{60G_{13}}, \quad (25)$$

тождественно удовлетворим уравнению (24). Тогда второе уравнение системы (12), записанное в форме

$$\frac{G_{13} t^2}{12E_3} (\psi_{,x} + \varphi_{,xx}) - \varphi = 0,$$

при подстановке (25) преобразуется к виду

$$F_{,xxxx} - k_1 F_{,xx} + k_2 F = 0, \quad (26)$$

где

$$k_1 = \frac{12E_3}{G_{13} t^2}, \quad k_2 = \frac{720E_3}{E_1 t^4}. \quad (27)$$

Решение уравнения (26) имеет вид

$$F = c_1 \exp(\lambda_1 x) + c_2 \exp(\lambda_2 x) + c_3 \exp(\lambda_3 x) + c_4 \exp(\lambda_4 x) = \sum_{i=1}^4 c_i \exp(\lambda_i x), \quad (28)$$

где c_1, \dots, c_4 – постоянные интегрирования, а

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \sqrt{\frac{k_1}{2} + \sqrt{\frac{k_1^2}{4} - k_2}}, & \lambda_2 &= \sqrt{\frac{k_1}{2} - \sqrt{\frac{k_1^2}{4} - k_2}}, \\ \lambda_3 &= -\sqrt{\frac{k_1}{2} + \sqrt{\frac{k_1^2}{4} - k_2}}, & \lambda_4 &= -\sqrt{\frac{k_1}{2} - \sqrt{\frac{k_1^2}{4} - k_2}} \end{aligned} \quad (29)$$

– корни характеристического уравнения $\lambda^4 - k_1 \lambda^2 + k_2 = 0$, составленного для (26).

Внеся (28) в (25), находим функции ψ и φ :

$$\psi = \sum_{i=1}^4 \lambda_i c_i \exp(\lambda_i x), \quad \varphi = \sum_{i=1}^4 (\alpha \lambda_i^2 - 1) c_i \exp(\lambda_i x), \quad (30)$$

при использовании которых из (23) для функции u следует решение

$$u = -\frac{t^2}{24} \sum_{i=1}^4 \lambda_i c_i \exp(\lambda_i x) + c_5 x + c_6, \quad (31)$$

где c_5, c_6 – постоянные интегрирования.

Решение уравнения (5), составленного для закрепленного участка стержня, будет иметь вид

$$u_0 = d_1 \exp(k_3 x) + d_2 \exp(-k_3 x) + u^*, \quad (32)$$

где d_1, d_2 – постоянные интегрирования.

При рассматриваемом виде нагружения уравнение (6) и система уравнений (13), а также формулируемые для них граничные условия и условия сопряжения участков являются однородными. Поэтому уравнения относительно функций $w, \gamma, \chi, \gamma_0$ будут иметь только тривиальные решения $w = \gamma = \chi = \gamma_0 = 0$. Таким образом, для определения восьми постоянных интегрирования $c_1, \dots, c_6, d_1, d_2$ найденные решения (30)–(32) необходимо подчинить соответствующим условиям из (8), (14)–(16), что приводит к системе восьми алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{4tk_3}{5} [d_1 \exp(-k_3 l) - d_2 \exp(k_3 l)] &= v_{31} w^*, \quad d_1 + d_2 + \frac{t^2}{24} \sum_{i=1}^4 \lambda_i c_i - c_6 = -u^*, \\ \frac{8}{t^2} (d_1 + d_2) + \sum_{i=1}^4 \lambda_i c_i &= 0, \quad \sum_{i=1}^4 (\alpha \lambda_i^2 - 1) c_i = -\frac{2}{t} w^*, \\ \frac{8k_3}{5} (d_1 - d_2) + \frac{t^2}{30} \sum_{i=1}^4 \lambda_i^2 c_i - 2(1 - v_{13} v_{31}) c_5 &= \frac{2v_{31}}{t} w^*, \\ -\frac{t^2}{24} \sum_{i=1}^4 \lambda_i c_i \exp(\lambda_i L) + c_5 L + c_6 &= 0, \quad \sum_{i=1}^4 \lambda_i c_i \exp(\lambda_i L) = 0, \quad \sum_{i=1}^4 \lambda_i^3 c_i \exp(\lambda_i L) = 0. \end{aligned} \quad (33)$$

После определения из системы уравнений (33) постоянных интегрирования подстановкой решений (30)–(32) в соответствующие физические зависимости, полученные в [4] и записанные в линейном приближении, определяются компоненты напряжений

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= E_1 \left(u_{,x} + \frac{z^2}{2} \psi_{,x} \right) = E_1 \left[c_5 + \left(\frac{z^2}{2} - \frac{t^2}{24} \right) \sum_{i=1}^4 \lambda_i^2 c_i \exp(\lambda_i x) \right], \\ \sigma_{zz} &= E_3 \varphi = E_3 \sum_{i=1}^4 (\alpha \lambda_i^2 - 1) c_i \exp(\lambda_i x), \quad \sigma_{xz} = z G_{13} (\psi + \varphi_{,x}) = z G_{13} \alpha \sum_{i=1}^4 \lambda_i^3 c_i \exp(\lambda_i x), \\ \sigma_{xx}^0 &= E_1^* \left[\left(1 - \frac{4z^2}{t^2} \right) u_{,x}^0 - \frac{2v_{31}}{t} w^* \right] = \\ &= E_1^* \left(1 - \frac{4z^2}{t^2} \right) k_3 [d_1 \exp(k_3 x) - d_2 \exp(-k_3 x)] - E_1^* \frac{2v_{31}}{t} w^*, \\ \sigma_{zz}^0 &= E_1^* \left[-\frac{2}{t} w^* + v_{13} \left(1 - \frac{4z^2}{t^2} \right) u_{,x}^0 \right] = \\ &= -E_1^* \frac{2}{t} w^* + v_{13} E_1^* \left(1 - \frac{4z^2}{t^2} \right) k_3 [d_1 \exp(k_3 x) - d_2 \exp(-k_3 x)], \end{aligned} \quad (34)$$

$$\sigma_{xz}^0 = \frac{8z}{t^2} G_{13}(u^* - u_0) = -\frac{8z}{t^2} G_{13}[d_1 \exp(k_3 x) + d_2 \exp(-k_3 x)],$$

соответствующие незакрепленному и закрепленному участкам стержня.

2.2. Решение, соответствующее аппроксимациям (2) и (17). Первый интеграл первого уравнения системы (18) при использовании соотношений (20) представим в виде

$$u_{,x} = \frac{c_1}{B_{11}^*} - \nu_{31} \varphi, \quad (36)$$

где $c_1 = T_x = \text{const}$ – постоянная интегрирования. В силу (36) второе уравнение системы (18) с учетом равенства

$$\frac{1 - \nu_{13}\nu_{31}}{B_{11}^*} = \frac{1}{B_{11}} \quad (37)$$

сводится к уравнению

$$\varphi_{,xx} - k_\varphi^2 \varphi = \frac{k_\varphi^2 \nu_{13} c_1}{B_{11}}, \quad k_\varphi^2 = \frac{B_{33}^*}{D_{13}} (1 - \nu_{13}\nu_{31}), \quad (38)$$

решение которого имеет вид

$$\varphi = g_1 \exp(k_\varphi x) + g_2 \exp(-k_\varphi x) - \frac{\nu_{13} c_1}{B_{11}}, \quad (39)$$

где g_1, g_2 – постоянные интегрирования. Подстановкой (39) в (36) с учетом (37) можно получить выражение

$$u_{,x} = \frac{c_1}{B_{11}} - \nu_{31} [g_1 \exp(k_\varphi x) + g_2 \exp(-k_\varphi x)], \quad (40)$$

из которого следует решение

$$u = \frac{c_1}{B_{11}} x + c_2 - \frac{\nu_{31}}{k_\varphi} [g_1 \exp(k_\varphi x) - g_2 \exp(-k_\varphi x)] \quad (41)$$

с постоянной интегрирования c_2 .

В результате при использовании (32) и первой зависимости в (4) для закрепленного участка можно записать выражения

$$u_0|_{x=0} = d_1 + d_2 + u^*, \quad T_x^0|_{x=0} = \frac{8E_1^* t}{15} k_3 (d_1 - d_2) - \frac{2E_1^* \nu_{31}}{3} w^*,$$

а в сечении $x = 0$ незакрепленного участка в соответствии с (39) и (41) будут иметь место равенства

$$\varphi|_{x=0} = g_1 + g_2 - \frac{\nu_{31} c_1}{B_{11}}, \quad u|_{x=0} = c_2 - \frac{\nu_{31}}{k_\varphi} (g_1 - g_2).$$

Таким образом, исходя из составленных соотношений в рассматриваемом приближении для определения неизвестных $d_1, d_2, c_1, c_2, g_1, g_2$ путем удовлетворения граничным условиям (22), условию $T_x^0|_{x=-l} = 0$, а также условиям симметрии $u|_{x=L} = 0, \varphi_{,x}|_{x=L} = 0$, получим систему шести алгебраических уравнений

$$\frac{4tk_3}{5}[d_1 \exp(-k_3 l) - d_2 \exp(k_3 l)] = v_{31} w^*, \quad c_2 - \frac{v_{31}}{k_\phi}(g_1 - g_2) - d_1 - d_2 = u^*,$$

$$\frac{8E_1^* t k_3}{15}(d_1 - d_2) - c_1 = \frac{2v_{31} E_1^*}{3} w^*, \quad g_1 + g_2 - \frac{v_{31} c_1}{B_{11}} = -\frac{2w^*}{t},$$

$$\frac{c_1 L}{B_{11}} + c_2 - \frac{v_{31}}{k_\phi}[g_1 \exp(k_\phi L) - g_2 \exp(-k_\phi L)] = 0, \quad g_1 \exp(k_\phi L) - g_2 \exp(-k_\phi L) = 0.$$

После определения неизвестных $d_1, d_2, c_1, c_2, g_1, g_2$ по формулам (35) и

$$\sigma_{xx} = \frac{c_1}{t}, \quad \sigma_{zz} = E_3^*[g_1 \exp(k_\phi x) + g_2 \exp(-k_\phi x)] - \frac{v_{31} c_1}{t},$$

$$\sigma_{xz} = z G_{13} k_\phi [g_1 \exp(k_\phi x) - g_2 \exp(-k_\phi x)]$$

вычисляются компоненты напряжений на закрепленном и незакрепленном участках стержня.

3. Численные эксперименты и анализ полученных результатов

С использованием решений, полученных на основе аппроксимаций (2), (9) и (2), (17), проведены расчеты по определению параметров НДС для тест-образца, выполненного из однонаправленного волокнистого композита на основе углеродного волокна марки ЭЛУР-П и связующего ХТ-118, при следующих исходных данных: $l = 20$ мм; $L = 50$ мм; $t = 3$ мм; $E_1 = 100$ ГПа; $E_2 = 5,7$ ГПа; $G_{13} = 1$ ГПа; $v_{13} = 0,34$; $u^* = 0,1$ мм; $w^* = cu^*$; $c = 0,12$. Результаты аналитических решений сравнивались с конечно-элементным решением задачи при моделировании тест-образца прямоугольными изопараметрическими элементами [9, 11], находящимися в плоском напряженном состоянии. Образец по толщине разбивался на 24 элемента, закрепленный и незакрепленный участки разбивались по длине, соответственно, на 50 и 125 элементов.

Вычисления показали, что наиболее близкие к конечно-элементному решению результаты дает аналитическое решение, построенное на основе аппроксимаций (2), (9) с представлением зависимости перемещений U и W незакрепленного участка стержня кубическим полиномом и линейной функцией z соответственно. На рис. 4–10 дается сравнение результатов расчетов, полученных на основе аппроксимаций (2), (9) и с использованием МКЭ.

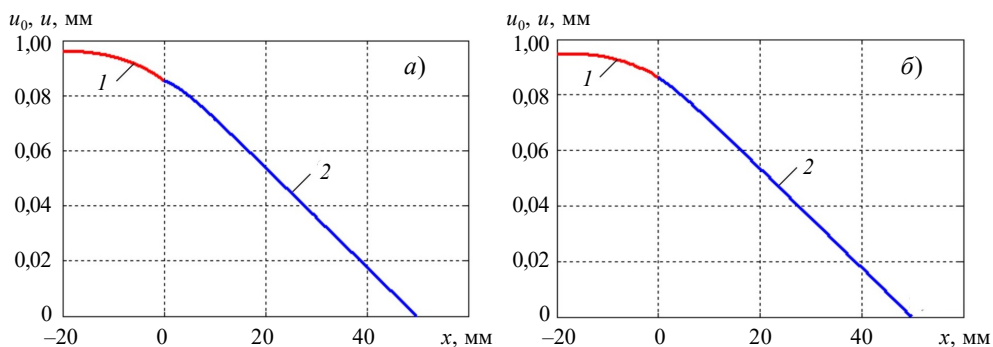


Рис. 4. Осевые перемещения u_0, u тест-образца:
а – аналитическое решение; б – МКЭ; 1 – u_0 , 2 – u

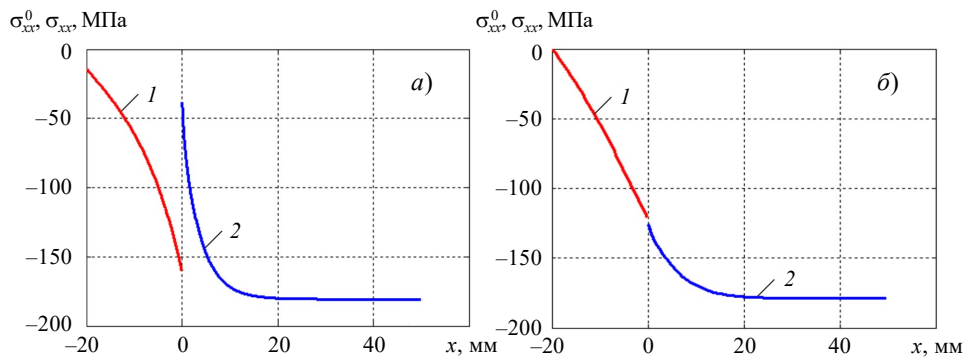


Рис. 5. Нормальные напряжения $\sigma_{xv}^0, \sigma_{xv}$ в сечении $z = 0$:
a – аналитическое решение; *б* – МКЭ; 1 – σ_{xv}^0 ; 2 – σ_{xv}

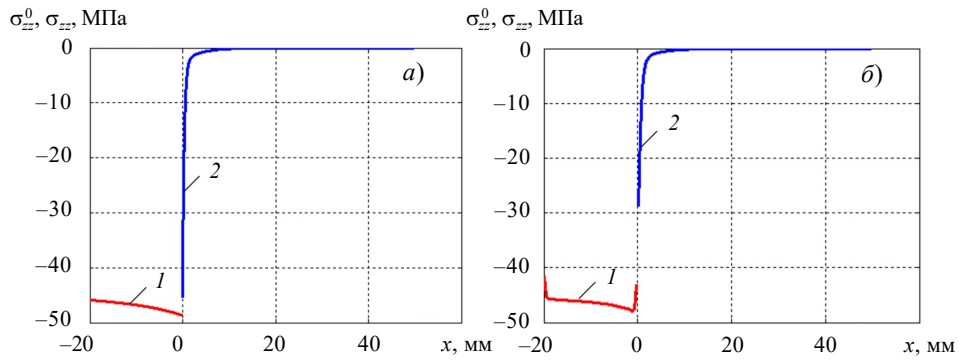


Рис. 6. Нормальные напряжения $\sigma_{zv}^0, \sigma_{zv}$ в сечении $z = 0$:
a – аналитическое решение; *б* – МКЭ; 1 – σ_{zv}^0 ; 2 – σ_{zv}

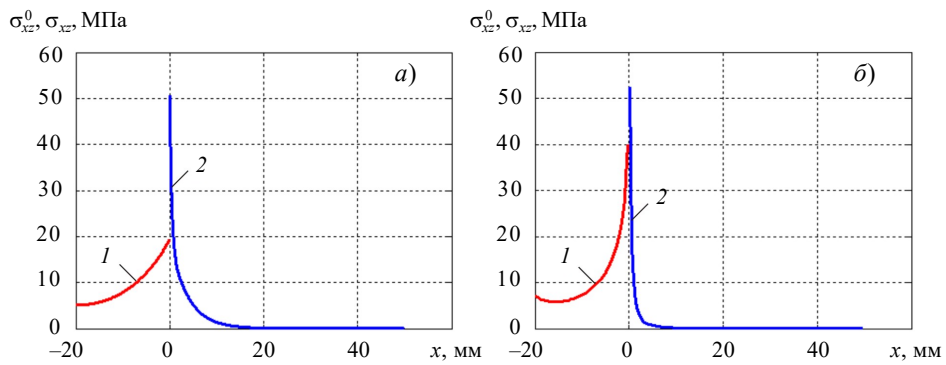


Рис. 7. Касательные напряжения $\sigma_{xz}^0, \sigma_{xz}$ на поверхности $z = t/2$:
a – аналитическое решение; *б* – МКЭ; 1 – σ_{xz}^0 ; 2 – σ_{xz}

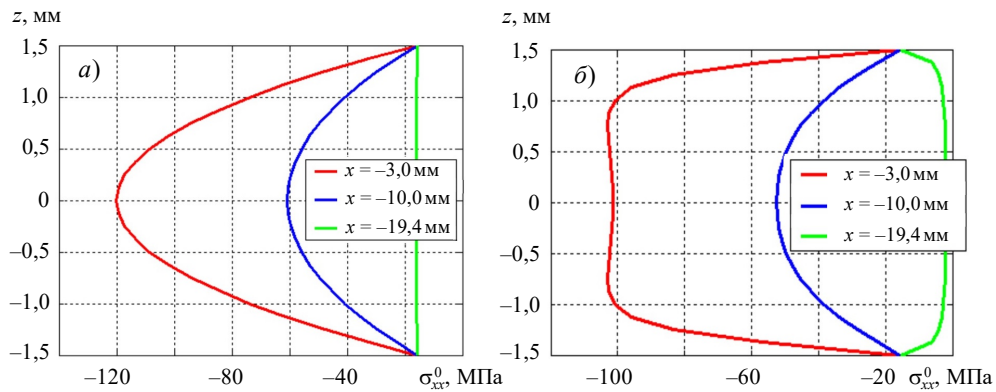


Рис. 8. Нормальные напряжения σ_{xx}^0 на закрепленном участке тест-образца в поперечных сечениях $x = -3,0; -10,0; -19,4$ мм: a – аналитическое решение; b – МКЭ

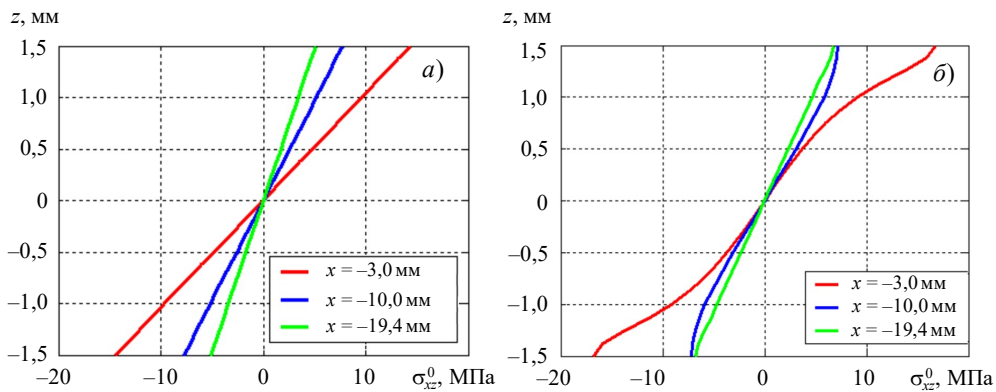


Рис. 9. Касательные напряжения σ_{xz}^0 на закрепленном участке тест-образца в поперечных сечениях $x = -3,0; -10,0; -19,4$ мм: a – аналитическое решение; b – МКЭ

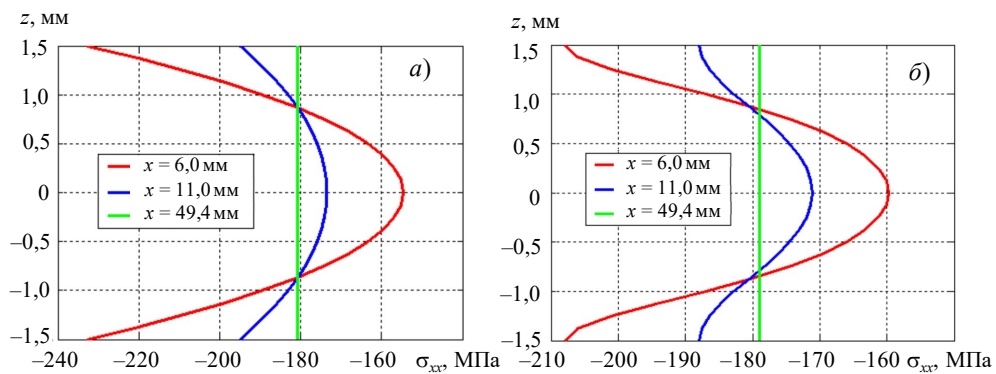


Рис. 10. Нормальные напряжения σ_{xx} на незакрепленном участке тест-образца в поперечных сечениях $x = 6,0; 11,0; 49,4$ мм: a – аналитическое решение; a – МКЭ

Из рис. 4 видно, что осевые перемещения u_0 , u соответственно закрепленного и незакрепленного участков стержня при аналитическом решении хорошо согласуются с конечно-элементным решением, причем в обоих случаях перемещения $u_0 = U_0(x, z = 0)$ получаются, как и следовало ожидать, несколько меньше заданного перемещения $u^* = U_0(x, z = \pm t/2)$. Наблюдается ярко выраженная трансформация

нормальных и касательных напряжений при переходе через границу от закрепленного участка к незакрепленному (см. рис. 5–7), характерная при использовании трансформационных моделей деформирования, и их локализация вблизи сечения $x = 0$. Интересно отметить, что максимальные по модулю нормальные напряжения получаются в сечении $x = 0$ закрепленного участка тест-образца (см. рис. 5, 6), а максимальные касательные напряжения, наоборот, в сечении $x = 0$ незакрепленного участка (см. рис. 7). При удалении от данного сечения напряжение σ_{zz} на незакрепленном участке образца, как и следовало ожидать, довольно быстро стремится к нулю (см. рис. 6), а напряжение σ_{xx} – к некоторому постоянному значению.

Анализ распределения нормальных и касательных напряжений по толщине закрепленного и незакрепленного участков стержня при различных значениях осевой координаты x (рис. см. 8–10) показывает, что наиболее близкие к МКЭ результаты получаются только в отношении нормальных напряжений σ_{xx} на незакрепленном участке (см. рис. 10), которые по мере удаления от сечения $x = 0$ постепенно выравниваются. При этом средние по толщине стержня нормальные напряжения $\bar{\sigma}_{xx}$ в сечениях $x = 11$ мм и $x = 49,4$ мм при аналитическом и конечно-элементном решениях задачи во всех сечениях получают достаточно близкими между собою (таблица 1).

Таблица 1

Средние по толщине стержня нормальные напряжения $\bar{\sigma}_{xx}$ в сечениях при аналитическом решении и на основе МКЭ

Модель	Аналитическое решение			МКЭ			
	x , мм	6,0	11,0	49,4	6,0	11,0	49,4
$\bar{\sigma}_{xx}$, МПа		-180,77	-180,70	-180,70	-179,12	-179,12	-179,12

Для сравнения определялось нормальное напряжение σ_{xx} на незакрепленном участке образца при кинематическом сжатии его средним по толщине перемещением Δ сечения $x = 0$ (при отсутствии закрепленного участка):

$$\Delta_0 = \frac{1}{t} \int_{-t/2}^{t/2} U_0(x=0, z) dz. \quad (42)$$

В соответствии с аппроксимациями (2) выражение (42) дает $\Delta_0 = [2u_0(0) + u^*]/3$, что при заданном перемещении $u^* = 0,1$ мм и найденном из (32) значении $u_0(0) = 0,0855$ мм соответствует напряжению $\hat{\sigma}_{xx} = -E_1 \Delta / L = -180,6$ МПа, практически совпадающему со средними по толщине образца напряжениями $\bar{\sigma}_{xx}$ (см. таблицу).

Заключение

Предложенная уточненная трансформационная математическая модель и построенные на ее основе соответствующие уравнения предназначены для описания процесса геометрически и физически линейного деформирования стержня-полосы (тест-образца) прямоугольного поперечного сечения из волокнистого композита, имеющего участки крепления в приспособлении для испытаний на осевое сжатие. Проведенный на основе этих уравнений анализ начального (докритического) НДС при кинематическом сжатии композитного тест-образца, имеющего двухсторонне закрепленные концевые участки конечной длины l , показывает, что нормальные и касательные напряжения σ_{zz} , σ_{xz} в пределах незакрепленного участка тест-образца отсутствуют почти по всей его длине (за исключением небольшой области, расположенной вблизи сечения $x = 0$), а нормальные напряжения σ_{xx} довольно быстро стре-

мятся к постоянному значению $\hat{\sigma}_{xx}$, найденному при кинематическом сжатии указанного участка средним по толщине перемещением Δ_0 . Описанная картина НДС незакрепленной части является вполне ожидаемой и укладывается в рамки представлений о характере ее работы при кинематическом сжатии короткого тест-образца, имеющего участки двухстороннего крепления в приспособлении для испытаний на осевое сжатие. В отличие от этого нормальные и касательные напряжения на закрепленных участках образца имеют значительные градиенты, достигая довольно высоких значений на границах перехода к его незакрепленному участку, что приводит к необходимости детального исследования НДС закрепленных участков при кинематическом сжатии тест-образца.

Главным результатом настоящей статьи следует считать предложенную методологию исследования процесса деформирования композитных тест-образцов, имеющих двухсторонне закрепленные участки конечной длины и находящиеся в условиях сжатия путем кинематического нагружения. Ее применение требует использования уточненных моделей деформирования с высоким порядком точности, трансформирующихся при переходе от незакрепленного участка к закрепленному.

Список литературы

1. Paimushin V.N., Kholmogorov S.A. Physical-mechanical properties of a fiber-reinforced composite based on an ELUR-P carbon tape and XT-118 binder. *Mechanics of Composite Materials*. 2018. Vol. 54. Iss. 1. P. 2–12. DOI: 10.1007/s11029-018-9712-1.
2. Paimushin V.N., Makarov M.V., Kholmogorov S.A., Polyakova N.V. Shear buckling mode and failure of flat fiber-reinforced specimens under axial compression 1. Refined nonlinear mathematical deformation model. *Mechanics of Composite Materials*. 2023. Vol. 59. Iss. 5. P. 885–900. <https://doi.org/10.1007/s11029-023-10140-8>.
3. Paimushin V.N., Makarov M.V., Kholmogorov S.A., Polyakova N.V. Shear buckling mode and failure of flat fiber-reinforced specimens under axial compression. 2. Numerical method, experimental and numerical investigations of the specimens with a $[0]_s$ layup. *Mechanics of Composite Materials*. 2024. Vol. 59. No 6. P. 1065–1082. DOI: 10.1007/s11029-023-10157-z.
4. Паймушин В.Н., Шишкин В.М. Кинематическое нагружение плоского тест-образца с участками двухстороннего крепления. 1. Теоретические основы. *Проблемы прочности и пластичности*. 2025. Т. 87. №3. С. 296–314. DOI: 10.32326/1814-9146-2025-87-3-296-314.
5. Басов К.А. *ANSYS в примерах и задачах*. Под общ. ред. Д.Г. Красковского. М.: Компьютер пресс, 2002. 224 с.
6. Чигарев А.В., Кравчук А.С., Смалюк А.Ф. *ANSYS для инженеров. Справ. пособие*. М.: Машиностроение, 2004. 512 с.
7. Burnett D.S. *Finite Element Analysis: From Concepts to Applications*. Reading, Massachusetts, USA: Addison-Wesley Pub. Co., 1987. 844 p.
8. Rades M. *Finite Element Analysis*. Bucuresti: Printech, 2006. 266 p.
9. Стренг Г., Фикс Дж. *Теория метода конечных элементов*. М.: Мир, 1977. 351 с.
10. Норри Д., де Фриз Ж. *Введение в метод конечных элементов*. М.: Мир, 1981. 304 с.
11. Зенкевич О.К. *Метод конечных элементов в технике*. М.: Мир, 1975. 541 с.
12. Галлагер Р. *Метод конечных элементов. Основы*. М.: Мир, 1984. 428 с.
13. Сегерлинд Л.Дж. *Применение метода конечных элементов*. М.: Мир, 1979. 392 с.
14. Амбарцумян С.А. *Общая теория анизотропных оболочек*. М.: Наука, 1974. 446 с.
15. Амбарцумян С.А. *Теория анизотропных пластин. Прочность, устойчивость и колебания*. М.: Наука, 1987. 360 с.
16. Reddy J.N. A simple higher-order theory for laminated composite plates. *Journal of Applied Mechanics*. 1984. Vol. 51. Iss. 4. P. 745–752. <https://doi.org/10.1115/1.3167719>.
17. Librescu L. Refined geometrically non-linear theories of anisotropic laminated shells. *Quarterly Applied Mathematics*. 1987. Vol. 45. Iss. 1. P. 1–22. <https://doi.org/10.1090/QAM/885164>.

18. Schmidt R., Reddy J.N. A refined small strain and moderate rotation theory of elastic anisotropic shells. *Journal of Applied Mechanics*. 1988. Vol. 55. Iss. 3. P. 611–617. <https://doi.org/10.1115/1.3125837>.
19. Librescu L., Schmidt R. Refined theories of elastic anisotropic shells accounting for small strains and moderate rotations. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 1988. Vol. 23. Iss. 3. P. 217–229. [https://doi.org/10.1016/0020-7462\(88\)90013-3](https://doi.org/10.1016/0020-7462(88)90013-3).
20. Reddy J.N. A general non-linear third-order theory of plates with moderate thickness. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 1990. Vol. 25. Iss. 6. P. 677–686. DOI: 10.1016/0020-7462(90)90006-U.
21. Librescu L., Schmidt R. Substantiation of a shear-deformable theory of anisotropic composite laminated shells accounting for the interlaminar continuity conditions. *International Journal of Engineering Science*. 1991. Vol. 29. Iss. 6. P. 669–683. DOI: 10.1016/0020-7225(91)90097-M.
22. Basar Y., Ding Y., Schultz R. Refined shear-deformation models for composite laminates with finite rotations. *International Journal of Solids and Structures*. 1993. Vol. 30. Iss. 19. P. 2611–2638. DOI: 10.1016/0020-7683(93)90102-D.
23. Gruttmann F., Wagner W. A linear quadrilateral shell element with fast stiffness computation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2005. Vol. 194. Iss. 39–41. P. 4279–4300. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2004.11.005>.
24. Gruttmann F., Wagner W. Structural analysis of composite laminates using a mixed hybrid shell element. *Computational Mechanics*. 2006. Vol. 37. Iss. 6. P. 479–497. DOI: 10.1007/S00466-005-0730-1.
25. Schmidt R., Vu T.D. Nonlinear dynamic FE simulation of smart piezolaminated structures based on first- and third-order transverse shear deformation theory. *Advanced Materials Research*. 2009. Vols. 79–82. P. 1313–1316. DOI: 10.4028/www.scientific.net/AMR.79-82.1313.
26. Yankovskii A.P. Critical analysis of the equations of statics in the bending theories of composite plates obtained on the basis of variational principles of elasticity theory 1. General theories of high order. *Mechanics of Composite Materials*. 2020. Vol. 56. Iss. 3. P. 271–290. DOI: 10.1007/s11029-020-09880-8.
27. Yankovskii A.P. Critical analysis of the equations of statics in the bending theories of composite plates obtained on the basis of variational principles of elasticity theory 2. Particular low-order theories. *Mechanics of Composite Materials*. 2020. Vol. 56. Iss. 4. P. 437–454. DOI: 10.1007/s11029-020-09895-1.

References

1. Paimushin V.N., Kholmogorov S.A. Physical-mechanical properties of a fiber-reinforced composite based on an ELUR-P carbon tape and XT-118 binder. *Mech. Compos. Mater.* 2018. Vol. 54. Iss. 1. P. 2–12. DOI: 10.1007/s11029-018-9712-1.
2. Paimushin V.N., Makarov M.V., Kholmogorov S.A., Polyakova N.V. Shear buckling mode and failure of flat fiber-reinforced specimens under axial compression 1. Refined nonlinear mathematical deformation model. *Mech. Compos. Mater.* 2023. Vol. 59. Iss. 5. P. 885–900. <https://doi.org/10.1007/s11029-023-10140-8>.
3. Paimushin V.N., Makarov M.V., Kholmogorov S.A., Polyakova N.V. Shear buckling mode and failure of flat fiber-reinforced specimens under axial compression. 2. Numerical method, experimental and numerical investigations of the specimens with a $[0]_s$ layup. *Mech. Compos. Mater.* 2024. Vol. 59. No 6. P. 1065–1082. DOI: 10.1007/s11029-023-10157-z.
4. Paimushin V.N., Shishkin V.M. Kinematicheskoe nagruzhenie ploskogo test-obraztza s uchastkami dvukhstoronnego zakrepleniya. 1. Teoreticheskie osnovy [Kinematic loading of semi-infinite specimen with two sided fixed sections. 1. Theoretical basis]. *Problemy prochnosti i plastichnosti [Problems of Strength and Plasticity]*. 2025. Vol. 87. No 3. P. 296–314 (In Russian).
5. Basov K.A. *ANSYS v primerakh i zadachakh*. Pod obshch. red. D.G. Kraskovskogo [ANSYS in Examples and Problems. Ed. D.G. Kraskovsky]. Moscow. Kompyuter press Publ. 2002. 224 p. (In Russian).
6. Chigarev A.V., Kravchuk A.S., Smalyuk A.F. *ANSYS dlya inzhenerov. Spravochnoe posobie [ANSYS for Engineers. Reference Manual]*. Moscow. Mashinostroenie Publ. 2004. 512 p. (In Russian).

7. Burnett D.S. *Finite Element Analysis: From Concepts to Applications*. Reading, Massachusetts, USA. Addison-Wesley Pub. Co. 1987. 844 p.
8. Rades M. *Finite Element Analysis*. Bucuresti. Printech. 2006. 266 p.
9. Strang G., Fix G.J. *An Analysis of the Finite Element Method*. Englewood Cliffs, New York, USA. Prentice-Hale. 1973. 412 p.
10. Norrie D.H., de Vries G. *An Introduction to Finite Element Analysis*. New York. Academic Press. 1978. 301 p.
11. Zienkiewicz O.C. *The Finite Element Method in Engineering Science*. London. McGraw-Hill. 1971. 521 p.
12. Gallagher R.H. *Finite Element Analysis: Fundamentals*. Englewoog Cliffs, New Jork, USA. Prentice-Hall. 1975. 420 p.
13. Segerlind L.J. *Applied Finite Element Analysis*. New York. John Wiley & Sons Inc. 1976. 422 p.
14. Ambartsumyan S.A. *Obshchaya teoriya anizotropnykh obolochek [General Theory of Anisotropic Shells]*. Moscow. Nauka Publ. 1974. 446 p. (In Russian).
15. Ambartsumyan S.A. *Teoriya anizotropnykh plastin. Prochnost, ustoychivost i kolebaniya [Theory of Anisotropic Plates. Strength, Stability and Vibrations]*. Moscow. Nauka Publ. 1987. 360 p. (In Russian)
16. Reddy J.N. A simple higher-order theory for laminated composite plates. *Journal of Applied Mechanics*. 1984. Vol. 51. Iss. 4. P. 745–752. <https://doi.org/10.1115/1.3167719>.
17. Librescu L. Refined geometrically non-linear theories of anisotropic laminated shells. *Quarterly Applied Mathematics*. 1987. Vol. 45. Iss. 1. P. 1–22. <https://doi.org/10.1090/QAM/885164>.
18. Schmidt R., Reddy J.N. A refined small strain and moderate rotation theory of elastic anisotropic shells. *Journal of Applied Mechanics*. 1988. Vol. 55. Iss. 3. P. 611–617. <https://doi.org/10.1115/1.3125837>.
19. Librescu L., Schmidt R. Refined theories of elastic anisotropic shells accounting for small strains and moderate rotations. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 1988. Vol. 23. Iss. 3. P. 217–229. [https://doi.org/10.1016/0020-7462\(88\)90013-3](https://doi.org/10.1016/0020-7462(88)90013-3).
20. Reddy J.N. A general non-linear third-order theory of plates with moderate thickness. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 1990. Vol. 25. Iss. 6. P. 677–686. DOI: 10.1016/0020-7462(90)90006-U.
21. Librescu L., Schmidt R. Substantiation of a shear-deformable theory of anisotropic composite laminated shells accounting for the interlaminar continuity conditions. *International Journal of Engineering Science*. 1991. Vol. 29. Iss. 6. P. 669–683. DOI: 10.1016/0020-7225(91)90097-M.
22. Basar Y., Ding Y., Schultz R. Refined shear-deformation models for composite laminates with finite rotations. *International Journal of Solids and Structures*. 1993. Vol. 30. Iss. 19. P. 2611–2638. DOI: 10.1016/0020-7683(93)90102-D.
23. Gruttmann F., Wagner W. A linear quadrilateral shell element with fast stiffness computation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2005. Vol. 194. Iss. 39–41. P. 4279–4300. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2004.11.005>.
24. Gruttmann F., Wagner W. Structural analysis of composite laminates using a mixed hybrid shell element. *Computational Mechanics*. 2006. Vol. 37. Iss. 6. P. 479–497. DOI: 10.1007/S00466-005-0730-1.
25. Schmidt R., Vu T.D. Nonlinear dynamic FE simulation of smart piezolaminated structures based on first- and third-order transverse shear deformation theory. *Adv. Mater. Res.* 2009. Vols. 79–82. P. 1313–1316. DOI: 10.4028/www.scientific.net/AMR.79-82.1313.
26. Yankovskii A.P. Critical analysis of the equations of statics in the bending theories of composite plates obtained on the basis of variational principles of elasticity theory 1. General theories of high order. *Mech. Compos. Mater.* 2020. Vol. 56. Iss. 3. P. 271–290. DOI: 10.1007/s11029-020-09880-8.
27. Yankovskii A.P. Critical analysis of the equations of statics in the bending theories of composite plates obtained on the basis of variational principles of elasticity theory 2. Particular low-order theories. *Mech. Compos. Mater.* 2020. Vol. 56. Iss. 4. P. 437–454. DOI: 10.1007/s11029-020-09895-1.

**KINEMATIC LOADING OF A FLAT TEST SAMPLE WITH SECTIONS
OF DOUBLE-SIDED FASTENING. 2. ANALYTICAL SOLUTIONS
THE SIMPLEST TASKS***

Paimushin V.N.¹, Shishkin V.M.²

¹*Kazan National Research Technical University n.a. A.N. Tupolev,
Kazan, Russian Federation*

²*Vyatka State University, Kirov, Russian Federation*

vpajmushin@mail.ru

Received by the Editor 2025/08/23

A linear problem of the initial (subcritical) planar stress-strain state under axial compression of a test sample with double-sided fixation sections of finite length is posed and solved. The test sample is made of unidirectional fiber composite material. It is assumed that the axial compression of the test sample is carried out by kinematic loading of the fixed end sections due to the friction forces arising between the rod and the rigid elements of the device and ensuring the implementation of one of the known loading schemes in accordance with existing test standards. In the area of double-sided attachment of the sample, the loading method in question also ensures its compression in the transverse direction. The equations constructed for fixed sections are based on cubic thickness approximation of axial displacements and linear approximation of deflection. Approximations are transformed into another model by subjecting them at the points of the boundary surfaces to the conditions of kinematic coupling with rigid elements of the test device with specified displacements. In the loose section, a cubic approximation is used for axial displacements. A linear approximation is accepted for deflection. Approximations were made based on the thickness of the sample, in addition to which a refined model by S.P. Timoshenko was also used, taking into account transverse compression. For all accepted deformation models, kinematic conditions for the coupling of fixed and non-fixed sections are formulated, equations of their balance are constructed, as well as force conditions for coupling. Taking into account the formulated kinematic conditions of coupling of the marked sections of the sample and the corresponding linear elasticity ratios, analytical solutions of the constructed displacement equations were constructed, using which numerical experiments were conducted to determine the subcritical stress state during kinematic compression of a sample made of unidirectional fibrous composite based on carbon fiber of the ELUR-P brand and of the XT-118. binder. A comparison is given of the results obtained in the analytical solution of the problem with the finite element solution when modeling a sample with a set of isoparametric rectangular elements based on the equations of the plane problem of the theory of elasticity

Keywords: fiber composite, test sample, rod-strip, fixed and loose sections, refined transformational model of deformation, kinematic loading.

* The article was carried out within the framework of the state assignment of the Ministry of Education and Science of Russia (project FZSU-2024-0010).