УДК 539.3 DOI: 10.32326/1814-9146-2026-88-1-78-85

ОБ УСЛОВИЯХ ЭЛЛИПТИЧНОСТИ В ГРАДИЕНТНОЙ ТЕОРИИ ПОРОУПРУГОСТИ ПРИ КОНЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЯХ*

Айзикович С.М.[1], **Еремеев В.А.**[2]

[1]*Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону, Российская Федерация*
[2]*Университет Кальяри, Кальяри, Италия*

saizikovich@gmail.com, eremeyev.victor@gmail.com

Поступила в редакцию 03.12.2025

Обсуждаются условия сильной эллиптичности в нелинейной теории упругости. Рассматриваются модели простого в смысле Коши материала, а также градиентной теории упругости. Уравнения состояния простого материала записываются при помощи плотности энергии деформации, заданной функцией градиента деформации. Для градиентной теории упругости плотность энергии деформации зависит от первого и второго градиентов деформации в случае теории типа Тупина – Миндлина или от первого, второго и третьего градиентов вектора перемещений в случае градиентной теории упругости третьего порядка. Сформулированы условия сильной эллиптичности уравнений равновесия и проанализирована их связь с устойчивостью в малом. Условия сильной эллиптичности сформулированы в терминах плотности энергии деформации – ее выпуклости на определенных деформациях. Для градиентной теории упругости условия сильной эллиптичности, определяемые как в теории систем уравнений в частных производных, налагают ограничения только на форму энергии деформации и сами деформации в зависимости от градиентов деформации максимального порядка. Устойчивость в малом определена как положительная определенность второй вариации потенциальной энергии на допустимых перемещениях. Связь эллиптичности и устойчивости в малом здесь рассматривается для первой краевой задачи – краевой задачи с краевыми условиями типа Дирихле. Продемонстрированы существенные отличия в рассматриваемых моделях. Так, если в случае простого материала выполнение условия сильной эллиптичности вызывает устойчивость в малом аффинной деформации в случае первой краевой задачи, для градиентной теории упругости аналогичное утверждение, вообще говоря, не имеет места. Достаточными условиями устойчивости выступает серия неравенств. В качестве специального случая градиентной теории упругости рассмотрена теория градиентной пороупругости, для которой условия сильной эллиптичности не выполняются, а выполняются условия эллиптичности в смысле Даглиса – Ниренберга.

Ключевые слова: сильная эллиптичность, устойчивость в малом, градиентная теория упругости, нелинейная теория упругости, пороупругость.

* Выполнено при финансовой поддержке РНФ, проект 22-19-00732 (продление).

Введение

Свойства эллиптичности в определенной степени являются естественными в задачах статики теории упругости. В частности, эллиптичность связана с гладкостью решений соответствующих краевых задач. В математической литературе известны различные определения эллиптичности, см., например, [1–5]. В теории упругости как при конечных, так и при малых деформациях наиболее употребительным оказалось условие сильной эллиптичности [6, 7], которое выступает определяющим неравенством, то есть условием, налагаемым как на форму уравнений состояния, так и на допускаемые деформации. Как отмечено в [6], нарушение условий сильной эллиптичности не следует априори исключать из рассмотрения, поскольку подобная ситуация может описывать своего рода неустойчивости материала, локализацию деформаций, а также связана с потерей устойчивости в малом.

Целью настоящей статьи является обсуждение условий сильной эллиптичности в рамках градиентной теории упругости. Последняя нашла существенные приложения в моделирования поведения материалов на наноуровне, а также для описания поведения композиционных материалов [8–11].

Основы градиентной тории упругости в рамках рациональной механики сплошных сред заложены в работах Тупина и Миндлина [12–16]. В рамках этой модели энергия деформации зависит от первого и высших градиентов вектора перемещений, а наряду с напряжениями вводятся также гипернапряжения. Ранее условия сильной эллиптичности и их связь с устойчивостью и разрешимостью в рамках градиентной теории упругости обсуждалась в [17–20]. Частным случаем градиентной теории упругости является дилатационная градиентная теория упругости [21–23], условия эллиптичности для которой обсуждались в [24]. Показано, что уравнения равновесия не удовлетворяют условиями ни ординарной, ни сильной эллиптичности, но удовлетворяют более общим условиям эллиптичности в смысле Даглиса – Ниренберга. Это позволяет применить к этой модели теорию эллиптических систем уравнений [1–5]. Интересно отметить, что эта теория является своего рода градиентным аналогом теории пороупругости, предложенной в [25], а потеря эллиптичности соответствует неустойчивости пороупругого материала.

1. Кинематика

Деформацию упругого тела будем описывать как обратимое дифференцируемое отображение отсчетной конфигурации в актуальную

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}(\mathbf{r}), \tag{1}$$

где $\mathbf{R}$ и $\mathbf{r}$ – соответственно векторы места в актуальной и отсчетной конфигурациях [6]. Последовательно вводятся градиенты места (градиенты деформации)

$$\mathbf{F} = \nabla\mathbf{R}, \quad \mathbf{G} = \nabla\mathbf{F} = \nabla\nabla\mathbf{R}, \quad \mathbf{H} = \nabla\mathbf{G} = \nabla\nabla\nabla\mathbf{R}, \tag{2}$$

где ∇ – трехмерный набла-оператор.

При конечных деформациях дилатация (объемное расширение материала) описывается величиной $\mathbf{J} = \det \mathbf{F}$.

Здесь и далее используется прямое (безындексное) тензорное исчисление [6, 26].

2. Уравнения состояния

Для гиперупругого материала вводится плотность потенциальной энергии деформации как функция градиентов места. В случае простого нелинейно упругого материала эта зависимость имеет вид

$$U = U(\mathbf{F}). \tag{3}$$

Для градиентной теории упругости Тупина – Миндлина энергия деформации дается формулой [8, 9, 17]

$$V = V(\mathbf{F}, \mathbf{G}), \tag{4}$$

а для градиентной теории упругости третьего порядка [8, 16, 20] вводится при помощи соотношения

$$W = W(\mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{H}). \tag{5}$$

Можно ввести модели градиентных сред более высоких порядков. Уравнения (3)–(5) могут быть преобразованы к форме, удовлетворяющей принципу материальной индифферентности, см. [8, 9, 17, 18, 21, 26].

3. Условия сильной эллиптичности

Для уравнений состояния (3)–(5) условия сильной эллиптичности имеют вид

$$(\mathbf{ka}) : \frac{\partial^2 U}{\partial \mathbf{F}^2} : (\mathbf{ka}) \geq C_0 |\mathbf{k}|^2 |\mathbf{a}|^2, \quad \forall \mathbf{k}, \mathbf{a}, \tag{6}$$

$$(\mathbf{kka}) \vdots \frac{\partial^2 V}{\partial \mathbf{G}^2} \vdots (\mathbf{kka}) \geq C_1 |\mathbf{k}|^4 |\mathbf{a}|^2, \tag{7}$$

$$(\mathbf{kkka}) :: \frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{H}^2} :: (\mathbf{kkka}) \geq C_2 |\mathbf{k}|^6 |\mathbf{a}|^2, \tag{8}$$

где $\mathbf{k}$ и $\mathbf{a}$ – произвольные постоянные векторы; знаками « $:$ », « $\vdots$ » и « $::$ » обозначены операции скалярного произведения в пространстве тензоров второго, третьего и четвертого ранга соответственно [21], а C_0, C_1, C_2 – постоянные, не зависящие от $\mathbf{k}$ и $\mathbf{a}$. Легко видеть, что в случае градиентной теории упругости неравенства (7) и (8) не налагают никаких ограничений на зависимость энергии деформации от градиентов низшего порядка. Следуя [17, 20], будем называть (6)–(8) условиями сильной эллиптичности соответственно первого, второго и третьего порядка.

Можно показать, что неравенства (6)–(8) связаны с выпуклостью энергии деформации по отношению к градиентам места максимального порядка:

$$\left.\frac{d^2}{d\tau^2} U(\mathbf{F} + \tau \mathbf{ka})\right|_{\tau=0} \geq C_0 |\mathbf{k}|^2 |\mathbf{a}|^2,$$

$$\left.\frac{d^2}{d\tau^2} V(\mathbf{F}, \mathbf{G} + \tau \mathbf{kka})\right|_{\tau=0} \geq C_1 |\mathbf{k}|^4 |\mathbf{a}|^2,$$

$$\left.\frac{d^2}{d\tau^2} U(\mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{H} + \tau \mathbf{kkka})\right|_{\tau=0} \geq C_2 |\mathbf{k}|^6 |\mathbf{a}|^2, \quad \forall \mathbf{k}, \mathbf{a}.$$

Аналогично можно рассмотреть и более общий случай градиентной теории упругости порядка n [27].

4. Сравнение условий сильной эллиптичности

В случае классической нелинейной теории упругости установлена связь условия сильной эллиптичности (6) с устойчивостью в малом. Под устойчивостью в малом для консервативных систем понимается положительность второй вариации функционала потенциальной энергии. В частности, показано [6, 7], что:

– выполнение условия сильной эллиптичности влечет за собой устойчивость в малом аффинной деформации в случае первой краевой задачи, то есть краевой задачи с однородными условиями типа Дирихле;

– обратное, вообще говоря, не верно, из устойчивости в малом следует только слабая форма условия сильной эллиптичности – условие Адамара.

В случае градиентной теории упругости связь сильной эллиптичности и устойчивости нетривиальна. В частности, в [17] показано, что выполнение *только* условия сильной эллиптичности *недостаточно* для устойчивости в малом. Для градиентной теории типа Тупина – Миндлина неравенства (6) и (7) являются *достаточными* условиями устойчивости в случае первой краевой задачи, но не необходимыми. Такой же вывод можно сделать для градиентной теории упругости третьего порядка [16]: неравенства (6)–(8) являются достаточными, но не необходимыми условиями устойчивости в малом аффинной деформации [20]. Более того, устойчивость в малом можно обеспечить в случае менее жестких требований, чем (6)–(8). Таким образом, вопрос о необходимых условиях устойчивости в малом даже в случае первой краевой задачи следует считать открытым.

5. Эллиптичность в градиентной пороупругости

В рамках дилатационной градиентной теории упругости [21–23] уравнения состояния являются частным случаем уравнений (4):

$$C = V(\mathbf{F}, \mathbf{j}), \quad \mathbf{j} = \nabla J. \tag{9}$$

В этом случае можно показать, что условия сильной эллиптичности (7) не выполняются, но выполняются условия эллиптичности в смысле Даглиса – Ниренберга [24]. Их можно привести к неравенствам

$$(\mathbf{ka}) : \frac{\partial^2 C}{\partial \mathbf{F}^2} : (\mathbf{ka}) \neq 0, \quad \mathbf{k} \cdot \frac{\partial^2 C}{\partial \mathbf{j}^2} \cdot \mathbf{k} \neq 0, \ \forall \mathbf{k}, \mathbf{a} \neq \mathbf{0}.$$

Можно показать, что в случае малых деформаций они следуют из положительной определенности энергии деформации, что, в свою очередь, достаточно для корректности соответствующих краевых задач [21].

Заключение

Следует отметить, что условие сильной эллиптичности по-прежнему может играть существенную роль в механике обобщенных сред, таких как градиентная теория упругости. С другой стороны, связь устойчивости в малом и сильной эллиптичности не настолько прямая, как в случае нелинейной теории упругости. Тем не менее, условия сильной эллиптичности могут играть роль определяющих неравенств и в случае градиентной теории упругости [17, 18, 20], а также в других моделях сплошной среды, например, среды с микродеформациями [19]. В случае обобщенных сред возможны более сложные режимы потери устойчивости материала, связанные как с собственно нарушением условий сильной эллиптичности в математическом смысле, так и других подобных неравенств, см., например, одномерную краевую задачу [18, 19].

Список литературы

1. Agranovich M. Elliptic boundary problems. In: Agranovich M., Egorov Y., Shubin M. *Partial Differential Equations IX: Elliptic Boundary Problems. Encyclopaedia of Mathematical Sciences*. Vol. 79. Berlin: Springer, 1997. P. 1–144.
2. Fichera G. Linear elliptic differential systems and eigenvalue problems. Part of the book series: *Lecture Notes in Mathematics.* Vol. 8. Berlin: Springer, 1965. 174 p.
3. Agmon S., Douglis A., Nirenberg L. Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. I. *Communications on Pure and Applied Mathematics*. 1959. Vol. 12. Iss. 4. P. 623–727.
4. Agmon S., Douglis A., Nirenberg L. Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. II. *Communications on Pure and Applied Mathematics*. 1964. Vol. 17. Iss. 1. P. 35–92.
5. Волевич Л.Р. Разрешимость краевых задач для общих эллиптических систем. *Математический сборник*. 1965. Т. 68(110). №3. С. 373–416.
6. Лурье А.И. *Нелинейная теория упругости.* М.: Наука, 1980, 512 с.
7. Ogden R.W. *Non-Linear Elastic Deformations*. Mineola: Dover, 1997. 532 p.
8. Bertram A. *Compendium on Gradient Materials*. Cham: Springer, 2023. 293 p.
9. Bertram A. *Elasticity and Plasticity of Large Deformations: Including Gradient Materials.* Berlin: Springer Nature, 2021. 410 p.
10. Bertram A., Forest S. Mechanics of strain gradient materials. Part of: *CISM International Centre for Mechanical Sciences, 600*. Cham: Springer, 2020. 171 p.
11. dell'Isola F., Steigmann D.J. *Discrete and Continuum Models for Complex Metamaterials*. Cambridge: Cambridge University Press, 2020. 626 p.
12. Toupin R. Elastic materials with couple-stresses. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. 1962. Vol. 11. No 1. P. 385–414.
13. Toupin R.A. Theories of elasticity with couple-stress. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. 1964. Vol. 17. No 2. P. 85–112.
14. Mindlin R.D. Micro-structure in linear elasticity. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. 1964. Vol. 16. No 1. P. 51–78.
15. Mindlin R.D., Eshel N.N. On first strain-gradient theories in linear elasticity. *International Journal of Solids and Structures*. 1968. Vol. 4. Iss. 1. P. 109–124. https://doi.org/10.1016/0020-7683(68)90036-x.
16. Mindlin R.D. Second gradient of strain and surface-tension in linear elasticity. *International Journal of Solids and Structures*. 1965. Vol. 1. Iss. 4. P. 417–438. DOI: 10.1016/0020-7683(65)90006-5
17. Eremeyev V.A. Strong ellipticity conditions and infinitesimal stability within nonlinear strain gradient elasticity. *Mechanics Research Communications*. 2021. Vol. 117. Iss. 3. Article No 103782. DOI: 10.1016/j.mechrescom.2021.103782.
18. Eremeyev V.A., Reccia E. Strong ellipticity within the strain gradient elasticity: elastic bar case. In: *Theoretical Analyses, Computations, and Experiments of Multiscale Materials*. Cham: Springer, 2022. P. 137–144.
19. Eremeyev V.A., Reccia E. Nonlinear strain gradient and micromorphic one-dimensional elastic continua: Comparison through strong ellipticity conditions. *Mechanics Research Communications.* 2022. Vol. 124. Iss. 4. Article No 103909. DOI: 10.1016/j.mechrescom.2022.103909.
20. Еремеев В.А. О сильной эллиптичности и устойчивости в малом в нелинейной градиентной теории упругости третьего порядка. *Прикладная математика и механика.* 2022. Т. 86. №4. С. 470–476. DOI: 10.31857/S0032823522040063.

21. Eremeyev V.A., Lurie S.A., Solyaev Y.O., dell'Isola F. On the well posedness of static boundary value problem within the linear dilatational strain gradient elasticity. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*. 2020. Vol. 71. No 6. Article No 182.

22. Eremeyev V.A., Cazzani A., dell'Isola F. On nonlinear dilatational strain gradient elasticity. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*. 2021. Vol. 33. No 4. P. 1429–1463.

23. Lurie S.A., Kalamkarov A.L., Solyaev Y.O., Volkov A.V. Dilatation gradient elasticity theory. *European Journal of Mechanics-A/Solids*. 2021. Vol. 88. Article No 104258. DOI: 10.1016/j.euromechsol.2021.104258.

24. Eremeyev V.A. Ellipticity of gradient poroelasticity. *International Journal of Engineering Science*. 2023. Vol. 190. Article No 103885. DOI: 10.1016/j.ijengsci.2023.103885.

25. Cowin S.C., Nunziato J.W. Linear elastic materials with voids. *Journal of Elasticity*. 1983. Vol. 13. No 2. P. 125–147. DOI: 10.1007/bf00041230.

26. Eremeyev V.A., Cloud M.J., Lebedev L.P. *Applications of Tensor Analysis in Continuum Mechanics*. New Jersey: World Scientific, 2018. 498 p.

27. Eremeyev V.A. Strong ellipticity and infinitesimal stability within n^{th}-order gradient elasticity. *Mathematics*. 2023. Vol. 11. Iss. 4. Article No 1024. DOI: 10.3390/math11041024.

References

1. Agranovich M. Elliptic boundary problems. In: Agranovich M., Egorov Y., Shubin M. *Partial Differential Equations IX: Elliptic Boundary Problems. Encyclopaedia of Mathematical Sciences*. Vol. 79. Berlin. Springer. 1997. P. 1–144.

2. Fichera G., Linear elliptic differential systems and eigenvalue problems. Part of the book series: *Lecture Notes in Mathematics*. Vol. 8. Berlin. Springer. 1965. 174 p.

3. Agmon S., Douglis A., Nirenberg L. Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. I. *Commun. Pure Appl. Math.* 1959. Vol. 12. Iss. 4. P. 623–727.

4. Agmon S., Douglis A., Nirenberg L. Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. II. *Commun. Pure Appl. Math.* 1964. Vol. 17. Iss. 1. P. 35–92.

5. Volevich L.R. Razreshimost kraevykh zadach dlya obshchikh ellipticheskikh sistem. [Solubility of boundary value problems for general elliptic systems]. *Matematicheskii Sbornik. Novaya Seriya*. 1965. Vol. 68(110). No 3. P. 373–416 (In Russian).

6. Lurie A.I. *Non-Linear Theory of Elasticity*. Amsterdam. North-Holland. 1990. 617 p.

7. Ogden R.W. *Non-Linear Elastic Deformations*. Mineola. Dover. 1997. 532 p.

8. Bertram A. *Compendium on Gradient Materials*. Cham. Springer. 2023. 293 p.

9. Bertram A. *Elasticity and Plasticity of Large Deformations: Including Gradient Materials*. Berlin. Springer Nature. 2021. 410 p.

10. Bertram A., Forest S. Mechanics of strain gradient materials. Part of: *CISM International Centre for Mechanical Sciences, 600*. Cham. Springer. 2020. 171 p.

11. dell'Isola F., Steigmann D.J. *Discrete and Continuum Models for Complex Metamaterials*. Cambridge. Cambridge University Press. 2020. 626 p.

12. Toupin R. Elastic materials with couple-stresses. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. 1962. Vol. 11. No 1. P. 385–414.

13. Toupin R.A. Theories of elasticity with couple-stress. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. 1964. Vol. 17. No 2. P. 85–112.

14. Mindlin R.D. Micro-structure in linear elasticity. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. 1964. Vol. 16. No 1. P. 51–78.

15. Mindlin R.D., Eshel N.N. On first strain-gradient theories in linear elasticity. *Int. J. Solids Struct.* 1968. Vol. 4. Iss. 1. P. 109–124. https://doi.org/10.1016/0020-7683(68)90036-x.

16. Mindlin R.D. Second gradient of strain and surface-tension in linear elasticity. *Int. J. Solids Struct.* 1965. Vol. 1. Iss. 4. P. 417–438. DOI: 10.1016/0020-7683(65)90006-5

17. Eremeyev V.A. Strong ellipticity conditions and infinitesimal stability within nonlinear strain gradient elasticity. *Mech. Res. Commun*. 2021. Vol. 117. Iss. 3. Article No 103782. DOI: 10.1016/j.mechrescom.2021.103782.

18. Eremeyev V.A., Reccia E. Strong ellipticity within the strain gradient elasticity: elastic bar case. In: *Theoretical Analyses, Computations, and Experiments of Multiscale Materials.* Cham. Springer. 2022. P. 137–144.

19. Eremeyev V.A., Reccia E. Nonlinear strain gradient and micromorphic one-dimensional elastic continua: Comparison through strong ellipticity conditions. *Mech. Res. Commun.* 2022. Vol. 124. Iss. 4. Article No 103909. DOI: 10.1016/j.mechrescom.2022.103909.

20. Eremeyev V.A. O silnoy ellipticnosti i ustoychivosti v malom v nelineynoy gradientnoy teorii uprugosti tretyego poryadka [On strong ellipticity and infinitesimal stability within nonlinear strain gradient elasticity of third order]. *Prikladnaya matematika i mekhanika* [*Journal of Applied Mathematics and Mechanics*]. 2022. Vol. 86. No 4. P. 470–476 (In Russian).

21. Eremeyev V.A., Lurie S.A., Solyaev Y.O., dell'Isola F. On the well posedness of static boundary value problem within the linear dilatational strain gradient elasticity. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*. 2020. Vol. 71. No 6. Article No 182.

22. Eremeyev V.A., Cazzani A., dell'Isola F. On nonlinear dilatational strain gradient elasticity. *Contin. Mech. Thermodyn.* 2021. Vol. 33. No 4. P. 1429–1463.

23. Lurie S.A., Kalamkarov A.L., Solyaev Y.O., Volkov A.V. Dilatation gradient elasticity theory. *Eur. J. Mech. A-Solid.* 2021. Vol. 88. Article No 104258. DOI: 10.1016/j.euromechsol.2021.104258.

24. Eremeyev V.A. Ellipticity of gradient poroelasticity. *Int. J. Eng. Sci.*. 2023. Vol. 190. Article No 103885. DOI: 10.1016/j.ijengsci.2023.103885.

25. Cowin S.C., Nunziato J.W. Linear elastic materials with voids. *J. Elast.* 1983. Vol. 13. No 2. P. 125–147. DOI: 10.1007/bf00041230.

26. Eremeyev V.A., Cloud M.J., Lebedev L.P. *Applications of Tensor Analysis in Continuum Mechanics*. New Jersey. World Scientific. 2018. 498 p.

27. Eremeyev V.A. Strong ellipticity and infinitesimal stability within n^{th}-order gradient elasticity. *Mathematics.* 2023. Vol. 11. Iss. 4. Article No 1024. DOI: 10.3390/math11041024.

ON ELLIPTICITY CONDITIONS WITHIN GRADIENT POROELASTICITY UNDER FINITE DEFORMATIONS*

Aizikovich S.M.[1], **Eremeyev V.A.**[2]

[1]*Don State Technical University, Rostov on Don, Russian Federation*
[2]*University of Cagliari, Cagliari, Italy*

saizikovich@gmail.com, eremeyev.victor@gmail.com

Received by the Editor 2025/12/03

In this paper, we discuss strong ellipticity conditions within nonlinear elasticity. We consider a Cauchy-type simple material model and strain gradient elasticity. The constitutive equations of a simple material are formulated using the strain energy density, which is given as a function of the deformation gradient. In strain gradient elasticity, the strain energy density depends on the first and second gradients of strain. For strain gradient elasticity of third order, it depends on the first, second and third deformation gradients. We formulate strong ellipticity conditions and analyze their relation to infinitesimal stability. These conditions are defined using the strain energy density and its convexity with respect to a particular class of deformations. In gradient elasticity, the strong ellipticity conditions, as defined in the theory of partial differential equations, constrain the form of the constitutive equations and the deformations themselves, depending on the deformation gradient of the highest order. Infinitesimal stability is defined as

*The research was supported by Russian Science Foundation, project No 22-19-00732 (extension).

the positive definiteness of the second variation of potential energy with respect to admissible displacements. We consider the relationship between ellipticity and infinitesimal stability for the first boundary-value problem, which is a boundary-value problem with Dirichlet boundary conditions. We demonstrate an essential difference between the considered models. For example, in a simple material, strong ellipticity implies stability of affine deformations within the first boundary-value problem. However, within strain-gradient elasticity, this statement is generally incorrect. A series of inequalities serves as sufficient conditions. As a particular case of gradient elasticity, we discuss gradient poroelasticity. In this theory, the strong ellipticity conditions are not met; however, there is still an ellipticity property in the sense of Douglis – Nirenberg.

Keywords: strong ellipticity, infinitesimal stability, strain gradient elasticity, nonlinear elasticity, poroelasticity.