

УДК 539.52

DOI: 10.32326/1814-9146-2026-88-1-58-67

**К ВОПРОСУ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СТЕПЕННОГО ПАРАМЕТРА
В СООТНОШЕНИИ ХАТЧИНСОНА
В УПРУГОВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ
ДЕФОРМИРОВАНИЯ КРИСТАЛЛИТОВ***

© 2026 г.

Вшивкова А.А., Швейкин А.И.

*Пермский национальный исследовательский политехнический университет,
Пермь, Российская Федерация*

vshivkova.anastasiya@yandex.ru

Поступила в редакцию 11.06.2025

Одним из ключевых уравнений моделей металлов и их сплавов, созданных на базе физических теорий пластичности, является уравнение Хатчинсона для определения скоростей сдвига по системам скольжения. Исследовано влияние значения степенного параметра, входящего в уравнение Хатчинсона, на результаты, получаемые в двухуровневой статистической модели металла с гранецентрированной кубической решеткой. Полагалось, что скалярный множитель (префактор) в уравнении Хатчинсона пропорционален интенсивности скорости деформации. Использовалась формулировка закона упрочнения, опирающаяся на представления о постепенном увеличении плотности дефектов, препятствующих движению дислокаций до тех пор, пока не будет достигнуто состояние, при котором процессы аннигиляции и воспроизводства дислокаций не уравновесят друг друга. Показано, что при численной устойчивости расчетов степенной параметр практически не влияет на отклик, поэтому его можно задавать, руководствуясь лишь требованием обеспечения устойчивости расчетов. Проведено исследование условий для обеспечения устойчивости численной реализации модели, установлено существование некоторого критического значения показателя степени, при котором нарушается устойчивость численной реализации при использовании явной схемы интегрирования Эйлера. Выявлено наличие зависимости этого критического значения от шага интегрирования и ряда параметров модели (критического напряжения, модулей сдвига, скорости деформации). В предположении об активности единственной системы скольжения и об отсутствии ротаций для схемы Эйлера получена теоретическая оценка критического значения показателя степени в законе Хатчинсона, удовлетворительно согласующаяся с результатами вычислительных экспериментов.

Ключевые слова: физические теории пластичности, многоуровневые модели материалов, упруговязкопластичность, уравнение Хатчинсона, устойчивость.

* Выполнено при финансовой поддержке Министерством науки и высшего образования РФ в рамках выполнения государственного задания в лаборатории многоуровневого моделирования конструкционных и функциональных материалов (проект № FSNM-2024-0002).

Введение

В последние десятилетия активно развивается многоуровневый подход к созданию конститутивных моделей (КМ) металлов и их сплавов [1–4]. Вводится несколько масштабных уровней, связанных со строением материала (уровень отдельного зерна, представительного объема (ПО) зерен и т.д.), на каждом из которых используются внутренние переменные (ВП) [5, 6], отражающие особенности структуры (например, текстуру), и формулируются уравнения для их эволюции, явно учитывающие лежащие в ее основе физические механизмы. Ключевым механизмом реализации неупругого деформирования является внутризеренное дислокационное скольжение (ВДС).

Одним из типовых уравнений, входящих практически в любую многоуровневую КМ на базе физических теорий пластичности (ФТП) [3, 7, 8], является соотношение Хатчинсона [9, 10] для определения скоростей сдвигов по системам скольжения:

$$\dot{\gamma}^{(k)} = \dot{\gamma}_0 \left(\frac{\tau^{(k)}}{\tau_c^{(k)}} \right)^{1/m} \cdot H(\tau^{(k)} - \tau_c^{(k)}), \quad k = 1, \dots, K, \quad (1)$$

где $\dot{\gamma}_0$, m – параметры модели; $\tau^{(k)}$, $\tau_c^{(k)}$ – касательные и критические напряжения на k -й системе скольжения (СС) соответственно; $H(\cdot)$ – функция Хевисайда. Авторами в статьях [11, 12] было показано, что для физического прозрачного учета скорости деформации (СД) в общем случае, когда СД может меняться в процессе нагружения, перспективно принять параметр $\dot{\gamma}_0$ в (1) (точнее при таком подходе называть его переменной) равным интенсивности девиатора тензора скорости деформаций d_i [13]. Здесь, как это сделано, например, в [14–17], $d_i = \sqrt{2/3 \mathbf{d}_{\text{dev}} : \mathbf{d}_{\text{dev}}}$; $\mathbf{d}_{\text{dev}} = \mathbf{d} - \text{sp}(\mathbf{d})\mathbf{I}/3$; $\text{sp}(\mathbf{d})$ – след тензора \mathbf{d} ; \mathbf{I} – единичный тензор; $\mathbf{d} = (\mathbf{I} + \mathbf{I}^T)/2$; $\mathbf{I} = (\nabla \mathbf{v})^T$ – транспонированный градиент скорости перемещений. При этом скоростная чувствительность полностью закладывается в соотношения для упрочнения/разупрочнения, а базовая постановка описывает нечувствительный к СД материал [4]. Это делает возможным физически обоснованное описание изменения скоростной чувствительности материала в процессе деформирования, связи скоростной чувствительности материала и температуры, поскольку в противном случае при $\dot{\gamma}_0 \neq d_i$ реализуемые на системах скольжения касательные напряжения могут существенно отличаться от критических, что приводит к потере критическими напряжениями физического смысла напряжения, при котором реализуется ВДС [11, 12]. Однако при таком подходе возникает вопрос о выборе значения параметра m . Поэтому представляется актуальным детальное исследование влияния значения m на отклик материала и численную реализацию именно при выборе параметра $\dot{\gamma}_0 = d_i$, которому посвящена настоящая статья.

1. Описание конститутивной модели

Ключевыми, определяющими поведение и диапазон применимости для многоуровневой КМ на базе ФТП (подробней ознакомиться можно, например, в [3]), являются уравнения мезоуровня – уровня отдельного кристаллита (зерна). Определяющим соотношением на этом уровне является закон Гука:

$$\mathbf{k}^{\text{cor}} = \mathbf{k} - \bar{\boldsymbol{\omega}} \cdot \mathbf{k} + \mathbf{k} \cdot \bar{\boldsymbol{\omega}} = \bar{\mathbf{p}}_{\text{cor}} : (\hat{\nabla} \mathbf{v}^T - \bar{\boldsymbol{\omega}} - \mathbf{z}^{\text{in}}), \quad (2)$$

где \mathbf{k}^{cor} – коротационная производная тензора напряжений Кирхгофа мезоуровня; $\bar{\boldsymbol{\omega}}$ – спин подвижной системы координат отдельного кристаллита [3]; $\bar{\mathbf{p}}_{\text{cor}}$ – тензор

упругих свойств кристаллита, компоненты которого постоянны в базисе подвижной системы координат кристаллита; $\mathbf{z} = \hat{\nabla} \mathbf{v}^T - \overline{\boldsymbol{\omega}}$ – мера скорости деформаций; \mathbf{z}^{in} – неупругая составляющая транспонированного градиента скорости перемещений. Для определения неупругой составляющей меры скорости деформации используется уравнение

$$\mathbf{z}^{\text{in}} = \sum_{j=1}^K \dot{\gamma}^{(j)} \mathbf{b}^{(j)} \mathbf{n}^{(j)}, \quad (3)$$

где K – число СС; $\dot{\gamma}^{(k)}$, $\mathbf{b}^{(k)}$, $\mathbf{n}^{(k)}$ – скорость сдвига, единичный вектор Бюргерса и направление экстраплоскости для k -й СС. Скорости сдвигов при этом определяются согласно вязкопластическому соотношению (1). Касательные напряжения определяются согласно соотношению:

$$\boldsymbol{\tau}^{(k)} = \boldsymbol{\kappa} : \mathbf{b}^{(k)} \mathbf{n}^{(k)}, \quad k = 1, \dots, K. \quad (4)$$

Исследователями предложено большое количество эволюционных уравнений (ЭУ) для критических напряжений, учитывающих различные механизмы упрочнения и разупрочнения (влияние границ зерен, дислокаций леса, аннигиляции дислокаций, двойникования и др.). Обзор этих уравнений можно найти, в частности, в [3]. В настоящей статье использовался простой закон [18] в приближении одинакового упрочнения по различным СС:

$$\dot{\tau}_c^{(k)} = A \left| 1 - \frac{\tau_c^{(k)}}{\tau_{\text{sat}}} \right|^a \sum_{i=1}^K \dot{\gamma}^{(i)}, \quad k = 1, \dots, K, \quad (5)$$

где A , a , τ_{sat} – параметры модели.

Уравнения мезомасштабного уровня дополняются начальными условиями:

$$\boldsymbol{\kappa} \Big|_{t=0} = \boldsymbol{\kappa}_0, \quad \tau_c^{(k)} \Big|_{t=0} = \tau_{c0}^{(k)}, \quad \gamma^{(k)} \Big|_{t=0} = \gamma_0^{(k)}, \quad k = 1, \dots, K, \quad \mathbf{o} \Big|_{t=0} = \mathbf{o}_0, \quad (6)$$

где $\boldsymbol{\kappa}_0$, $\tau_{c0}^{(k)}$, $\gamma_0^{(k)}$, \mathbf{o}_0 – начальные значения тензора напряжений, критических напряжений сдвига, накопленного сдвига, ориентации подвижной системы координат соответственно.

Отметим, что в систему уравнений (1)–(6) входит 6 параметров (A , a , τ_{sat} , Π_{1111} , Π_{1122} , Π_{1212}), которые должны быть однозначно определены для проведения вычислительных экспериментов. Для их определения могут быть либо использованы данные о микроструктурных исследованиях и о диаграммах нагружения для монокристаллов (например, в опытах на монокристаллах определимы компоненты $\overline{\Pi}_{(\text{cor})}$, а начальные ориентации \mathbf{o}_0 определимы, например, по данным о дифракции отраженных электронов с помощью EBSD (Electron Backscattered Diffraction) анализа), либо использованы диаграммы нагружения для обычных поликристаллических образцов (алгоритм описан подробнее в [19], для определения ряда параметров мезоуровня сравнение только с данными макроэкспериментов используется в [14, 17] и многих других публикациях). Зачастую используется комбинация указанных способов. Параметры модели (1)–(6), характерные для алюминия, взяты из [12].

2. О влиянии степенного параметра m на скоростную чувствительность при выборе параметра $\dot{\gamma}_0 = d_i$

Рассмотрим для определенности случай квазиодноосного растяжения монокристалла со случайно выбранной ориентировкой с использованием модели (1)–(6) при отсутствии ротаций. В этом случае нагружение задается кинематически – постоянным тензором скорости деформации $\mathbf{L} = \dot{\epsilon} \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_1 - 0,5 \dot{\epsilon} (\mathbf{k}_2 \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 \mathbf{k}_3)$, где $\dot{\epsilon}$ – предписанная СД, \mathbf{k}_i – ортонормированный базис неподвижной лабораторной системы координат [20, 21]. Значения параметров КМ приведены в таблице 1 и соответствуют алюминию.

Таблица 1

Значения параметров КМ

Параметр	A	a	τ_{sat}	Π_{1111}	Π_{1122}	Π_{1212}
Значение	180 МПа	2,25	40 МПа	106,8 ГПа	60,4 ГПа	28,3 ГПа

Результаты моделирования при различных m и СД, полученные при использовании для интегрирования системы (1)–(6) явной схемы Эйлера с шагами 10^{-6} и 10^{-2} с для скоростей 10 и $0,001 \text{ с}^{-1}$ соответственно, приведены на рис. 1.

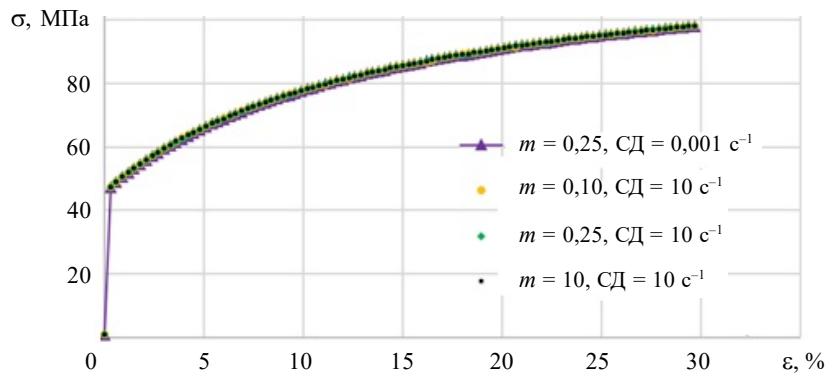


Рис. 1. Диаграммы нагружения при квазиодноосном растяжении в случае выбора разных m и СД при $\dot{\gamma}_0 = d_i$

Можно видеть, что при значении m , равном 0,25, при изменении СД на 4 порядка отклик практически не изменился. Существенное изменение m (увеличение в 100 раз) привело к изменению отклика (то есть интенсивности напряжения) для той же СД на величину, не превышающую 0,102 МПа (0,12% от уровня напряжений). Отметим, что такая же близость отклика при указанном выборе параметров модели и расчетной схемы получена в расчетах и для всех других видов нагружений и начальных ориентировок кристаллита. Таким образом, можно сделать выводы, что при принятии $\dot{\gamma}_0 = d_i$ в рамках соотношения Хатчинсона (1):

- 1) параметр m практически не влияет на скоростную чувствительность материала;
- 2) параметр m нельзя подбирать только на основе критерия близости расчетных и экспериментальных данных, как это делается, к примеру, для параметров упрочнения [19], поскольку существенное изменение m практически не меняет отклик модели.

Было выявлено, однако, что выбранное значение m может влиять на устойчивость численного решения на уровне отдельных кристаллитов в зависимости от их ориентировки [12].

Таким образом, при численной устойчивости расчетов параметр m практически не влияет на отклик, однако для определения ограничений на m может быть привлечено требование обеспечения устойчивости численных результатов, получаемых для конститутивной модели.

3. О влиянии m при $\dot{\gamma}_0 = d_i$ на неустойчивость при моделировании квазиодноосного растяжения отдельного кристаллита

Для заданной траектории нагружения, ориентации кристаллита, параметров модели и шага интегрирования при значениях параметра m ниже некоторого критического значения m_{crit} можно получить некорректное численное решение: начиная с некоторого момента времени t , интенсивность напряжений будет превышать физически допустимое значение. Введем соответствующее определение критического значения параметра m :

$$m_{\text{crit}} = \max \{m \mid (\exists t_{\text{crit}} > 0)(\forall t > t_{\text{crit}}) : \sigma_{\text{инт}}(t, m, \mathbf{L}, \mathbf{X}, \Delta t) > M\}, \quad (7)$$

где \mathbf{X} – вектор всех, кроме m , параметров модели; t – время; Δt – величина шага по времени; \mathbf{L} – предписанный транспонированный градиент скорости перемещений; $\sigma_{\text{инт}}$ – численно полученная интенсивность напряжений; M – параметр, равный удвоенному пределу прочности на макроуровне.

Рассмотрим далее связь m_{crit} с параметрами модели (связанными со свойствами конкретного материала), параметрами воздействий (условий нагружения) и параметрами численной реализации (шагом интегрирования). Вычислительные эксперименты проводились для квазиодноосного растяжения [20, 21] со скоростью деформации 10 c^{-1} .

Обнаружено, что m_{crit} увеличивается с ростом модуля сдвига либо уменьшением критического напряжения (рис. 2).

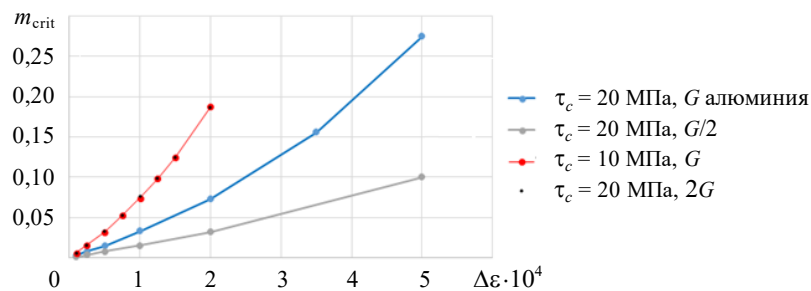


Рис. 2. Зависимости m_{crit} от $\Delta \epsilon$ при различных критических напряжениях и упругих модулях

В качестве виртуального тестового примера упругие модули, соответствующие алюминию, были уменьшены в 2 раза; можно видеть существенное изменение критического m . Увеличение m_{crit} можно трактовать как понижение уровня устойчивости КМ (при одинаковом шаге интегрирования), которое выглядит логичным при увеличении модуля сдвига (за счет более резкой релаксации напряжений за шаг интегрирования) и при уменьшении критического напряжения (при выходе на пластичность отношение касательного напряжения к критическому, возводимое в (1) в степень, будет больше).

Для выявления основы описанных выше зависимостей рассмотрим упрощенно

первые шаги алгоритма реализации модели в случае использования схемы Эйлера, если задействована только одна система скольжения, нет ротаций и упрочнения.

Когда напряжения максимально приближаются к пределу текучести, но не превышают его, следующий шаг приводит к превышению касательными напряжениями критических значений на величину $\Delta\tau$, максимальный размер которой можно оценить как $G\Delta\varepsilon$, где G – модуль сдвига по СС. Тогда в соответствии с формулами (1)–(4) скорость сдвига и касательное напряжение на последующем шаге с учетом связи скорости деформации с шагами по времени и деформации $\dot{\varepsilon}\Delta t = \Delta\varepsilon$ определяются соотношениями:

$$\begin{aligned}\gamma_{t+\Delta t} &= \gamma_t + \Delta\varepsilon \left(1 + \frac{G\Delta\varepsilon}{\tau_c}\right)^{1/m}, \\ \tau_{t+\Delta t} &= \tau_t + G\Delta\varepsilon + \Delta t \dot{\tau} = \tau_c + G\Delta\varepsilon + \Delta t G(\dot{\varepsilon} - \dot{\gamma}) = \\ &= \tau_c + G\Delta\varepsilon + G\Delta\varepsilon \left(1 - \left(1 + \frac{G\Delta\varepsilon}{\tau_c}\right)^{1/m}\right) = \tau_c + 2G\Delta\varepsilon - G\Delta\varepsilon \left(1 + \frac{G\Delta\varepsilon}{\tau_c}\right)^{1/m}.\end{aligned}$$

Нарушение расчета произойдет, когда вследствие неудачной комбинации параметров модели и шага интегрирования (параметра численной реализации) будет получено нефизическое значение $\tau_{t+\Delta t} < -\tau_c$, то есть произойдет избыточная релаксация напряжений. Отсюда получим оценку m_{crit} :

$$m_{\text{crit}} = \log_{2+2\tau_c/(G\Delta\varepsilon)} \left(1 + \frac{G\Delta\varepsilon}{\tau_c}\right). \quad (8)$$

На рис. 3 изображены значения m_{crit} для различных τ_c . При проведении расчетов учитывалось, что при чрезмерно большом шаге $\Delta\varepsilon = \tau_c/G$, обеспечивающем превышение касательными напряжениями критических вдвое, расчет нарушается при любых m , что определило диапазон для проведения вычислительных экспериментов.

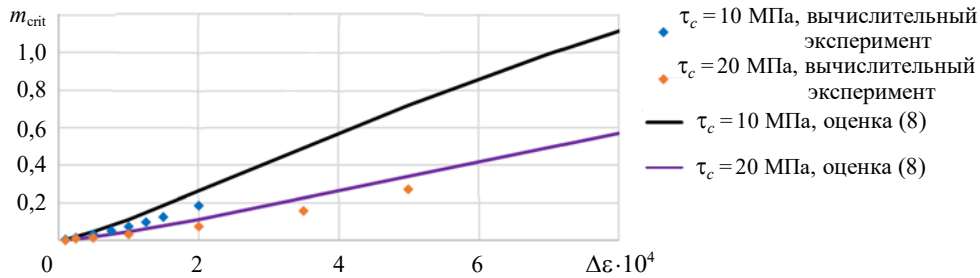


Рис. 3. Оценка (8) и значения m_{crit} , полученные в вычислительном эксперименте

Можно видеть, что оценка (8) качественно корректно описывает получаемые в расчетах зависимости (см. рис. 3). Кроме того, из (8) следует, что m_{crit} зависит от отношения τ_c/G , а не от этих величин по отдельности. Как показано на рис. 2, эта закономерность наблюдается и для полученных в ходе вычислительных экспериментов значений. Таким образом, представляются корректными предложенный выше механизм развития вычислительной неустойчивости, а также привлечение оценки (8) к определению допустимого диапазона значений для m . Подчеркнем, что при этом для идентификации m могут применяться и другие методы, (8) может только опре-

делять допустимый рассматриваемый диапазон для этих методов. Отметим также, что аналог (8) может быть построен и для более точных, чем схема Эйлера, методов решения системы (1)–(6).

Заключение

Исследовано влияние параметра m в вязкопластическом степенном соотношении Хатчинсона для определения скоростей сдвигов на отклик, описываемый двухуровневой статистической КМ, при выборе нормировочного множителя в этом соотношении равным интенсивности СД. Показано, что при выборе $\dot{\gamma}_0 = d_i$ параметр m перестает выступать регулятором скоростной чувствительности и не может быть определен только по результатам сравнения расчетных и экспериментальных данных в силу близости диаграмм нагружения, вычисленных для существенно различных m . Выявлено, что m влияет на устойчивость численной реализации КМ, исследовано влияние параметров численной реализации и других параметров КМ на область неустойчивости. Получена теоретическая оценка значения m , критического для устойчивости численного решения при использовании явной схемы Эйлера интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений.

Список литературы

1. Панин В.Е., Егорушкин В.Е., Панин А.В. Физическая мезомеханика деформируемого твердого тела как многоуровневой системы. I. Физические основы многоуровневого подхода. *Физическая мезомеханика*. 2006. Т. 9. №3. С. 9–22.
2. Roters F., Eisenlohr P., Hantcherli L., Tjahjanto D.D., Bieler T.R., Raabe D. Overview of constitutive laws, kinematics, homogenization and multiscale methods in crystal plasticity finite-element modeling: Theory, experiments, applications. *Acta Materialia*. 2010. Vol. 58. Iss. 4. P. 1152–1211. DOI: 10.1016/j.actamat.2009.10.058.
3. Трусов П.В., Швейкин А.И. *Многоуровневые модели моно- и поликристаллических материалов: теория, алгоритмы, примеры применения*. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2019. 605 с.
4. Романова В.А., Балохонов Р.Р., Бородина А. и др. Применение подходов физической теории пластичности при моделировании квазистатической деформации поликристаллов в динамической постановке. *Вестник ПНИПУ. Механика*. 2023. №5. С. 57–73. DOI: 10.15593/perm.mech/2023.5.06.
5. Maugin G.A. The saga of internal variables of state in continuum thermo-mechanics (1893–2013). *Mechanics Research Communications*. 2015. Vol. 69. P. 79–86.
6. Follansbee P. *Principles, Experiments, and Applications of an Internal State Variable Constitutive Formulation*. Cham, Switzerland: Springer Nature, 2022. 525 p.
7. McDowell D.L. Internal state variable theory. *Handbook of Materials Modeling*. Springer, 2005. P. 1151–1169.
8. Horstemeyer M.F., Bammann D.J. Historical review of internal state variable theory for inelasticity. *International Journal of Plasticity*. 2010. Vol. 26. P. 1310–1334. <https://doi.org/10.1016/J.IJPLAS.2010.06.005>.
9. Hutchinson J.W. Bounds and self-consistent estimates for creep of polycrystalline materials. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. 1976. Vol. 348. No 1652. P. 101–127. DOI: 10.1098/rspa.1976.0027.
10. Asaro R.J., Needleman A. Texture development and strain hardening in rate dependent polycrystals. *Acta Metallurgical*. 1985. Vol. 33. No 6. P. 923–953. [http://dx.doi.org/10.1016/0001-6160\(85\)90188-9](http://dx.doi.org/10.1016/0001-6160(85)90188-9).
11. Швейкин А.И., Вшивкова А.А., Трусов П.В. О способах учета изменяющихся температурно-скоростных условий в многоуровневых конститутивных моделях для описания

деформирования металлов (аналитический обзор). *Физическая мезомеханика*. 2023. Т. 26. №6. С. 27–48. DOI: 10.55652/1683-805X_2023_26_6_27.

12. Vshivkova A.A., Shveykin A.I. Analysis of the influence of the parametric scalar factor in the viscoplastic equation for determining intragranular shear rates on the response in multilevel constitutive models of metals. *Russian Physics Journal*. 2023. Vol. 66. P. 835–843.

13. Hollenstein M., Jabareen M., Rubin M.B. Modeling a smooth elastic-inelastic transition with a strongly objective numerical integrator needing no iteration. *Computational Mechanics*. 2013. Vol. 52. P. 649–667.

14. Beyerlein I.J., Tome C.N. A dislocation-based constitutive law for pure Zr including temperature effects. *International Journal of Plasticity*. 2008. Vol. 24. Iss. 5. P. 867–895. DOI: 10.1016/j.ijplas.2007.07.017.

15. Knezevic M., McCabe R.J., Tome C.N., Lebensohn R.A., Chen S.R., Cady C.M., Gray G.T. III, Mihaila B. Modeling mechanical response and texture evolution of α -uranium as a function of strain rate and temperature using polycrystal plasticity. *International Journal of Plasticity*. 2013. Vol. 43. P. 70–84. DOI: 10.1016/j.ijplas.2012.10.011.

16. Forest S., Rubin M.B. A rate-independent crystal plasticity model with a smooth elastic-plastic transition and no slip indeterminacy. *European Journal of Mechanics – A/Solids*. 2016. Vol. 55. P. 278–288. DOI: 10.1016/j.euromechsol.2015.08.012.

17. Anand L. Single-crystal elasto-viscoplasticity: application to texture evolution in polycrystalline metals at large strains. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2004. Vol. 193(48). P. 5359–5383. DOI: 10.1016/j.cma.2003.12.068.

18. Farooq H., Cailletaud G., Forest S., Ryckelynck D. Crystal plasticity modeling of the cyclic behavior of polycrystalline aggregates under non-symmetric uniaxial loading: Global and local analyses. *International Journal of Plasticity*. 2020. Vol. 126. Article No 102619.

19. Bezverkhy D.S., Kondratev N.S. Identification of hardening parameters of two-level statistical model of polycrystal inelastic deformation. *Russian Physics Journal*. 2024. Vol. 67. No 4. P. 441–448. DOI: 10.1007/s1182-024-03142-z.

20. Bronkhorst C.A., Kalidindi S.R., Anand L. Polycrystalline plasticity and the evolution of crystallographic texture in FCC metals. *Philosophical Transactions A*. 1992. Vol. 341. P. 443–477. DOI: 10.1098/rsta.1992.0111.

21. Швейкин А.И., Вшивкова А.А., Трусов П.В. Двухуровневая конститутивная модель металла с комплексным учетом изменяющихся температурно-скоростных условий. *Физическая мезомеханика*. 2024. Т. 27. №2. С. 50–68. DOI: 10.55652/1683-805X_2024_27_2_50-68.

References

1. Panin V.E., Egorushkin V.E., Panin A.V. Fizicheskaya mezomekhanika deformiruемого tverdogo tela kak mnogourovnevoy sistema. I. Fizicheskie osnovy mnogourovnevo podkhoda [Physical mesomechanics of a deformable solid as a multilevel system. I. Physical foundations of the multilevel approach]. *Fizicheskaya mezomekhanika [Physical Mesomechanics]*. 2006. Vol. 9. No 3. P. 9–22 (In Russian).

2. Roters F., Eisenlohr P., Hantcherli L., Tjahjanto D.D., Bieler T.R., Raabe D. Overview of constitutive laws, kinematics, homogenization and multiscale methods in crystal plasticity finite-element modeling: Theory, experiments, applications. *Acta Mater*. 2010. Vol. 58. Iss. 4. P. 1152–1211. DOI: 10.1016/j.actamat.2009.10.058.

3. Trusov P.V., Shveykin A.I. *Mnogourovnevyye modeli mono- i polikristallicheskiy materialov: teoriya, algoritmy, primery primeniya [Multilevel Models of Mono- and Polycrystalline Materials: Theory, Algorithms, Application Examples]*. Novosibirsk. SO RAN Publ. 2019. 605 p. (In Russian).

4. Romanova V.A., Balokhonov R.R., Borodina A., et al. Primenenie podkhodov fizicheskoy teorii plastichnosti pri modelirovani kvazistaticheskoy deformatsii polikristallov v dinamicheskoy postanovke [Crystal plasticity finite-element simulations for quasistatic deformation of polycrystals in terms of explicit dynamics]. *Vestnik Permskogo natsionalnogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mekhanika [PNRPU Mechanics Bulletin]*. 2023. No 5. P. 57–73 (In Russian).

5. Maugin G.A. The saga of internal variables of state in continuum thermo-mechanics (1893–2013). *Mech. Res. Commun.* 2015. Vol. 69. P. 79–86.
6. Follansbee P. *Principles, Experiments, and Applications of an Internal State Variable Constitutive Formulation*. Cham, Switzerland. Springer Nature. 2022. 525 p.
7. McDowell D.L. Internal state variable theory. *Handbook of Materials Modeling*. Springer. 2005. P. 1151–1169.
8. Horstemeyer M.F., Bammann D.J. Historical review of internal state variable theory for inelasticity. *Int. J. Plast.* 2010. Vol. 26. P. 1310–1334. <https://doi.org/10.1016/j.IJPLAS.2010.06.005>.
9. Hutchinson J.W. Bounds and self-consistent estimates for creep of polycrystalline materials. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. 1976. Vol. 348. No 1652. P. 101–127. DOI: 10.1098/rspa.1976.0027.
10. Asaro R.J., Needleman A. Texture development and strain hardening in rate dependent polycrystals. *Acta Metall.* 1985. Vol. 33. No 6. P. 923–953. [http://dx.doi.org/10.1016/0001-6160\(85\)90188-9](http://dx.doi.org/10.1016/0001-6160(85)90188-9).
11. Shveykin A.I., Vshivkova A.A., Trusov P.V. O sposobakh ucheta izmenyayushchikhsya temperaturno-skorostnykh usloviy v mnogourovnevnykh konstitutivnykh modelyakh dlya opisaniya deformirovaniya metallov (analiticheskiy obzor) [Methods of accounting for temperature and strain rate variation in multilevel constitutive models of metal deformation (analytical review)]. *Fizicheskaya mezomekhanika [Phys. Mesomech]*. 2023. Vol. 26. No 6. P. 27–48 (In Russian).
12. Vshivkova A.A., Shveykin A.I. Analysis of the influence of the parametric scalar factor in the viscoplastic equation for determining intragranular shear rates on the response in multilevel constitutive models of metals. *Russ. Phys. J.* 2023. Vol. 66. P. 835–843.
13. Hollenstein M., Jabareen M., Rubin M.B. Modeling a smooth elastic-inelastic transition with a strongly objective numerical integrator needing no iteration. *Comput. Mech.* 2013. Vol. 52. P. 649–667.
14. Beyerlein I.J., Tome C.N. A dislocation-based constitutive law for pure Zr including temperature effects. *Int. J. Plast.* 2008. Vol. 24. Iss. 5. P. 867–895. DOI: 10.1016/j.ijplas.2007.07.017.
15. Knezevic M., McCabe R.J., Tome C.N., Lebensohn R.A., Chen S.R., Cady C.M., Gray G.T. III, Mihaila B. Modeling mechanical response and texture evolution of γ -uranium as a function of strain rate and temperature using polycrystal plasticity. *Int. J. Plast.* 2013. Vol. 43. P. 70–84. DOI:10.1016/j.ijplas.2012.10.011.
16. Forest S., Rubin M.B. A rate-independent crystal plasticity model with a smooth elastic-plastic transition and no slip indeterminacy. *Eur. J. Mech. A-Solid*. 2016. Vol. 55. P. 278–288. DOI: 10.1016/j.euromechsol.2015.08.012.
17. Anand L. Single-crystal elasto-viscoplasticity: application to texture evolution in polycrystalline metals at large strains. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 2004. Vol. 193(48). P. 5359–5383. DOI: 10.1016/j.cma.2003.12.068.
18. Farooq H., Cailletaud G., Forest S., Ryckelynck D. Crystal plasticity modeling of the cyclic behavior of polycrystalline aggregates under non-symmetric uniaxial loading: Global and local analyses. *Int. J. Plast.* 2020. Vol. 126. Article No 102619.
19. Bezverkhy D.S., Kondratev N.S. Identification of hardening parameters of two-level statistical model of polycrystal inelastic deformation. *Russ. Phys. J.* 2024. Vol. 67. No 4. P. 441–448. DOI: 10.1007/s11182-024-03142-z.
20. Bronkhorst C.A., Kalidindi S.R., Anand L. Polycrystalline plasticity and the evolution of crystallographic texture in FCC metals. *Philosophical Transactions A*. 1992. Vol. 341. P. 443–477. DOI: 10.1098/rsta.1992.0111.
21. Shveykin A.I., Vshivkova A.A., Trusov P.V. Dvukhurovnevaya konstitutivnaya model metalla s kompleksnym uchetom izmenyayushchikhsya temperaturno-skorostnykh usloviy [Two-level constitutive model of metal with a comprehensive account of temperature and strain rate changes]. *Fizicheskaya mezomekhanika [Phys. Mesomech.]*. 2024. Vol. 27. No 2. P. 50–68 (In Russian).

**ON THE ISSUE OF DETERMINING THE POWER PARAMETER
IN THE HUTCHINSON EQUATION IN ELASTIC-VISCOPLASTIC MODELS
OF CRYSTALLITE DEFORMATION***

Vshivkova A.A., Shveykin A.I.

Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russian Federation

vshivkova.anastasiya@yandex.ru

Received by the Editor 2025/06/11

Currently, constitutive models of metals and their alloys, created within the framework of a multi-level approach based on crystal plasticity, are widely used. One of the key equations of models of this class is the Hutchinson equation for determining shear rates on slip systems. In this paper, the power parameter influence on the results obtained using a face-centered cubic metal two-level statistical model was investigated. It was assumed that the scalar factor (prefactor) in the Hutchinson equation is proportional to the intensity of the strain rate. The popular formulation of the hardening law was used, based on the concept of a gradual increase in the density of defects (mainly forest dislocations) that impede the movement of dislocations, until a state is reached in which the processes of annihilation and reproduction of dislocations balance each other. It is shown that with numerical stability of calculations, the power parameter has virtually no effect on the response, so it can be set arbitrarily, only requiring that the calculations stability be ensured. A study of the conditions for ensuring the numerical implementation stability of the model was conducted, and the existence of a certain critical value of the exponent was established, at which the stability of the numerical implementation is violated when using the explicit Euler integration scheme. It was found that this critical value depends on the integration step and a number of model parameters (critical stress, shear moduli). Assuming that only one slip system is active and there are no rotations, a theoretical estimate of the exponent in Hutchinson's law critical value is obtained for the Euler scheme, which is in satisfactory agreement with the computational experiments results.

Keywords: crystal plasticity, multilevel material models, elastic-viscoplasticity, Hutchinson equation, numerical stability.

* The study was carried out with a financial support from the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation as part of the state task in the laboratory of multilevel structural and functional materials modeling, project No FSNM-2024-0002.