

УДК 539.3

DOI: 10.32326/1814-9146-2026-88-1-48-57

О ВЫПУЧИВАНИИ СЖАТОЙ УПРУГОЙ ПОЛОГОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С ДИСЛОКАЦИЯМИ И ДИСКЛИНАЦИЯМИ

© 2026 г.

Пешхоев И.М.

*Донской государственный технический университет,
Ростов-на-Дону, Российская Федерация*

peshkhoev@rambler.ru

Поступила в редакцию 30.09.2025

Исследуется задача о поведении равновесий сжатой упругой пологой прямоугольной в плане круговой цилиндрической оболочки. Оболочка находится под действием внутренних напряжений, которые вызваны полями непрерывно распределенных краевых дислокаций и клиновых дисклинаций. Сжимающая нагрузка равномерно распределена по криволинейным краям оболочки и действует параллельно образующей цилиндра. Рассмотрены граничные условия свободного защемления или шарнирного опирания краев оболочки. Получены нелинейные уравнения равновесия типа Кармана, при этом в правой части уравнения совместности деформаций появляется скалярная функция, которая называется функцией несовместности и зависит от плотности дислокаций и дисклинаций. Установлено, что при наличии источников напряжений решением системы уравнений является вектор-функция, компонентами которой являются прогиб и функция напряжений. Рассматривается также задача о слабом изгибе сжатой пологой оболочки с дислокациями и дисклинациями, которая решается разностным методом. В случае отсутствия полей дислокаций и дисклинаций нелинейная задача имеет тривиальное решение и после линеаризации возникает задача на собственные значения, которая определяет критические нагрузки потери устойчивости сжатой оболочки. Для решения проблемы собственных значений применяется вариационный метод в сочетании с разностным методом. Приведены результаты численных расчетов нескольких первых критических значений сжимающей нагрузки и построены графики компонентов соответствующих собственных вектор-функций. Для линейной задачи о равновесии сжатой оболочки с дислокациями и дисклинациями также приведены результаты численных расчетов и графики компонентов вектор-функций для заданных значений сжимающей нагрузки и функции несовместности.

Ключевые слова: упругая круговая пологая цилиндрическая оболочка, дислокации и дисклинации, критическая нагрузка.

Введение

Система уравнений равновесия для гибкой пластины с дислокациями и дисклинациями получена в статье Л.М. Зубова [1] в виде модификации уравнений Кармана.

В этой статье исследована задача о выпучивании мембраны под действием внутренних напряжений, вызванных наличием дефектов. В статье [2] исследованы бесконечно малые деформации для пластины из гиперупругих материалов с неоднородно распределенными напряжениями. В [3] применяется классическая модель Кирхгофа – Лява для исследования напряженного состояния тонкой линейно-упругой оболочки с изолированными и непрерывно распределенными дислокациями и дисклинациями, решены задачи для замкнутой сферической оболочки с дислокациями и дисклинациями. Публикация [4] посвящена исследованию изгиба трехслойной пластины под действием поверхностных и межфазных явлений с применением теории сдвиговой деформации пластины первого порядка и модели поверхностных напряжений Гуртина – Мердока. В [5] обсуждаются проблемы собственных напряжений, которые вызваны распределенными дислокациями и дисклинациями в полой твердой сфере из линейно-упругого изотропного микрополярного материала, а в [6] исследована задача о собственных напряжениях, которые вызваны распределенными краевыми и винтовыми дислокациями в полой нелинейно-упругой сфере. В статье [7] исследуются уравнения несовместности деформаций для нелинейных оболочек Кирхгофа – Лява и обсуждаются источники неоднородности, которые возникают из-за распределения топологических дефектов, таких как дислокации и дисклинации, и метрических аномалий, таких как точечные дефекты, термические деформации и биологический рост. В [8] исследуется потеря устойчивости и послекритическое поведение упругой пластины с дислокациями и дисклинациями под действием неравномерно распределенных по краям сжимающих усилий. Задача о ветвлении равновесий решается с помощью метода Ляпунова – Шмидта. Установлено, что при четных формах функции несовместности и четных формах распределения по краям сжимающих усилий наличие малой нормальной нагрузки не снижает несущую способность пластины. В [9] решается задача о потере устойчивости продольно сжатой удлиненной упругой прямоугольной пластины со свободными краями, содержащей источники внутренних напряжений в виде дислокаций и дисклинаций, лежащей на упругом основании. Критическая нагрузка, прогиб и функция напряжений ищутся в виде разложений по малому параметру, в качестве которого используется относительная ширина пластины. Для вычисления главных членов разложений критической нагрузки и прогиба по малому параметру получено уравнение равновесия сжатой балки на упругом основании. В [10] рассмотрена задача определения критических нагрузок прямоугольной ортотропной пластины на упругом основании, на которую действует сжимающее давление в двух направлениях параллельно сторонам прямоугольника равномерно распределенными по краям усилиями. Исследуется влияние величины сжимающей нагрузки вдоль одного направления на критическое значение сжимающей нагрузки вдоль другого направления. Если значение сжимающей нагрузки вдоль одного направления растёт, то снижается критическое значение потери устойчивости вдоль другого направления. В [11] построена теория, которая описывает нелинейное деформирование упругих оболочек Коссера с непрерывно распределенными дислокациями и дисклинациями. В статье [12] исследуются установившиеся колебания предварительно напряженной неоднородной круглой упругой пластины. Рассматривается осесимметричная постановка задачи в двух вариантах: вариационная и слабая. Для случая свободных колебаний шарнирно опертой по контуру пластины показано, что задача на собственные значения является самосопряженной и вполне определенной. В статье [13] для задачи о равновесии нормально нагруженной упругой по-

логой прямоугольной в плане круговой цилиндрической оболочки с дислокациями и дисклинациями построена система нелинейных уравнений равновесия на основе модифицированной системы нелинейных уравнений Кармана для гибкой пластинки с дислокациями и дисклинациями [1]. Для случая малых значений нормальной нагрузки и малых значений функции несовместности с помощью линеаризации построена линейная система уравнений равновесия. Рассмотрен пример применения метода Ньютона – Канторовича для решения нелинейной системы уравнений Кармана. В статье [14] сформулирована осесимметричная задача определения верхней (кинематической) границы несущей способности сферических пологих оболочек кольцевой в плане формы, внутренние отверстия которых закрыты жесткими вставками. Пластическое течение в фазах композиции определяется кусочно-линейными условиями текучести. Продемонстрировано, что с увеличением стрелы подъема пологой оболочки ее несущая способность более чем вдвое возрастает по сравнению с пластиной той же геометрии в плане и той же толщины.

В настоящей статье рассматривается задача об изгибе сжатой упругой пологой прямоугольной в плане круговой цилиндрической оболочки. Сжимающая нагрузка действует параллельно прямолинейным краям и равномерно распределена по криволинейным краям. Оболочка находится под действием внутренних напряжений, источниками которых являются поля непрерывно распределенных дислокаций и дисклинаций. Рассматриваются краевые условия шарнирного опирания и свободного защемления краев.

1. Постановка задачи

Пусть пологая круговая цилиндрическая прямоугольная в плане упругая оболочка находится под действием равномерно распределенных по криволинейным краям усилий P , действующих параллельно прямолинейным краям, а также испытывает внутренние напряжения, которые вызваны непрерывными полями краевых дислокаций и клиновых дисклинаций. Тогда систему уравнений равновесия оболочки можно записать в виде уравнений [13], которые следуют из модификации системы уравнений Кармана [15–17] для гибкой пластинки с дислокациями и дисклинациями [1]:

$$\Delta^2 F + \frac{Eh}{R} W_{xx} + \frac{Eh}{2} [W, W] = Eh\xi\mu, \quad D\Delta^2 W - \frac{F_{xx}}{R} [F, W] = 0, \quad |X| < a, \quad |Y| < b, \quad (1)$$

где Δ – оператор Лапласа; $[F, W] = F_{xx}W_{yy} - 2F_{xy}W_{xy} + F_{yy}W_{xx}$; $\mu(X, Y)$ – скалярная функция, которая выражает меру несовместности и зависит от плотности дислокаций и дисклинаций; $\xi > 0$ – числовой коэффициент; $W(X, Y)$ – прогиб; $F(X, Y)$ – функция напряжений; X, Y – прямоугольные координаты с началом в центре пластины; E – модуль Юнга; ν – коэффициент Пуассона; h – толщина оболочки; D – цилиндрическая жесткость; R – радиус кривизны оболочки по оси Y .

Рассмотрим краевые условия свободного защемления или подвижно шарнирного опирания краев оболочки:

$$\begin{cases} 1) W = W_x = 0, & 2) W = W_{xx} = 0; & F_{xy} = 0, F_{yy} = -P, & |X| = a; \\ 1) W = W_y = 0, & 2) W = W_{yy} = 0; & F_{xy} = 0, F_{xx} = 0, & |Y| = b. \end{cases} \quad (2)$$

Будем считать, что функция прогиба $W(X, Y)$ удовлетворяет условиям 1) или 2) в (2), сжимающая нагрузка P равномерно распределена по краям $X = \pm a$.

Чтобы перейти к задаче с однородными краевыми условиями, введем замену

$F = \Phi - PY^2/2$. Тогда функция Φ удовлетворяет условиям $\Phi_{XY} = \Phi_{YX} = 0$ при $|X| = a$, $\Phi_{XY} = \Phi_{XX} = 0$ при $|Y| = b$. Учитывая, что эти условия эквивалентны более простым условиям $\Phi = \Phi_X = 0$ при $|X| = a$ и $\Phi = \Phi_Y = 0$ при $|Y| = b$, применим для перехода к безразмерным переменным формулы: $X = ax$, $Y = ay$, $D = Eh^3/\gamma^2$, $\gamma^2 = 12(1 - \nu^2)$, $W(X, X) = w(x, y)h/\gamma$, $\Phi(X, Y) = Df(x, y)$, $P = Dp/a^2$, $R = ra^2\gamma/h$, $\mu = \bar{\mu}h^2/(\gamma^2 a^4)$. Тогда из (1), (2) получим систему нелинейных уравнений с краевыми условиями в области $\Omega = \{(x, y): |x| < 1, |y| < b/a\}$:

$$\Delta^2 w - f_{xx}/r = [f, w] + pw_{xx} = 0, \quad \Delta^2 f + w_{xx}/r + [w, w]/2 = \xi\bar{\mu}, \quad (3)$$

$$1) w = w_n = 0, \quad 2) w = w_{nn} = 0, f = f_n = 0 \text{ на границе области } \Omega. \quad (4)$$

Здесь оператор Лапласа Δ и скобки Кармана $[f, w]$ действуют по переменным x, y , а индекс n показывает направление нормали к границе области Ω .

2. Метод решения

Введем гильбертовы пространства: E^2 – замыкание множества вектор-функций $\mathbf{f} = (f_1, f_2)$, $\mathbf{g} = (g_1, g_2)$ с нормой, определяемой скалярным произведением $\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle_{E^2} = \iint_{\Omega} (f_1 g_1 + f_2 g_2) dx dy$; E^1 – замыкание линейного множества бесконечно дифференцируемых в прямоугольной области Ω вектор-функций $\mathbf{u} = (w, f)$, $\mathbf{v} = (w_1, f_1)$, удовлетворяющих краевым условиям (4) на границе области Ω , с конечной нормой, порожденной скалярным произведением

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{E^1} = \sum_{i+j \leq 4} \langle \partial^{i+j} \mathbf{u} / \partial x^i \partial y^j, \partial^{i+j} \mathbf{v} / \partial x^i \partial y^j \rangle_{E^2}.$$

Предполагая, что функция $\bar{\mu}(x, y)$ является достаточно гладкой в области Ω , представим краевую задачу (3), (4) в виде нелинейного операторного уравнения

$$\mathbf{M}\mathbf{u} = \left(\Delta^2 w - \frac{f_{xx}}{r} + pw_{xx} - [w, f], \Delta^2 f + \frac{w_{xx}}{r} + \frac{[w, w]}{2} - \bar{\mu} \right) = (0, 0), \quad (5)$$

$$\mathbf{u} = (w, f) \in E^1.$$

Применяя результаты И.И. Воровича [18] и Н.Ф. Морозова [19], можно показать, что оператор \mathbf{M} действует из E^1 в E^2 .

В случае отсутствия полей дислокаций и дисклинаций нелинейная задача (5) имеет тривиальное решение $\mathbf{u} = (w, f) = (0, 0)$ и в результате линеаризации относительно тривиального решения приводится к краевой задаче на собственные значения с краевыми условиями (4):

$$\Delta^2 w - \frac{f_{xx}}{r} = -pw_{xx}, \quad \Delta^2 f + \frac{w_{xx}}{r} = 0. \quad (6)$$

Задача (6) решается вариационным методом [20] в сочетании с разностным методом [21]. Введем линейные операторы

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \left(\Delta^2 w - \frac{f_{xx}}{r}, \Delta^2 f + \frac{w_{xx}}{r} \right), \quad \mathbf{B}\mathbf{u} = (-w_{xx}, 0), \quad \mathbf{u} = (w_{xx}, f).$$

Тогда задача на собственные значения (6) имеет вид $\mathbf{A}\mathbf{u} = p\mathbf{B}\mathbf{u}$. Учитывая второе уравнение из системы (6), используя интегрирование по частям и формулы Грина, можно записать

$$\langle \mathbf{A}\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle_{E^2} = \iint_{\Omega} \left(\Delta^2 w - \frac{f_{xx}}{r} \right) w dx dy = \iint_{\Omega} (\Delta w)^2 dx dy - \iint_{\Omega} \left(\frac{f_{xx}}{r} \right) w dx dy,$$

$$\langle \mathbf{B}\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle_{E^2} = -\iint_{\Omega} w_{xx} w dx dy = \iint_{\Omega} (w_x)^2 dx dy > 0.$$

Из результатов [20] следует, что оператор \mathbf{B} положительно определен, а оператор \mathbf{A} формально самосопряжен и ограничен снизу, поэтому задача $\mathbf{A}\mathbf{u} = p\mathbf{B}\mathbf{u}$ приводится к задаче минимизации функционала [20]:

$$J(\mathbf{u}) = \frac{\langle \mathbf{A}\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle_{E^2}}{\langle \mathbf{B}\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle_{E^2}}. \quad (7)$$

В [8, 9] обоснован и применен метод минимизации функционала (7) для задач определения критических значений сжимающей нагрузки, при которых теряет устойчивость сжатая упругая прямоугольная пластина, а также сжатая упругая ортотропная пластина [10]. Отметим, что в этих случаях критическим значениям сжимающей нагрузки отвечает собственная функция, выражающая форму прогиба пластины, при этом функция напряжений равна нулю. Наряду с нелинейной задачей (5) рассмотрим также задачу о слабом изгибе сжатой пологой оболочки, тогда в уравнении (5) будут отсутствовать нелинейные слагаемые [15]:

$$\mathbf{M}_0 \mathbf{u} = \left(\Delta^2 w - \frac{f_{xx}}{r} + p w_{xx}, \Delta^2 f + \frac{w_{xx}}{r} - \bar{\mu} \right) = (0, 0), \quad \mathbf{u} = (w, f) \in E^1. \quad (8)$$

Здесь функции w и f удовлетворяют краевым условиям (4). Задача (8) решается разностным методом [21].

3. Результаты численных расчетов

Пример 1. Для задачи на собственные значения (6) в области $\Omega = \{(x, y): 0 < x < 1, 0 < y < b/a\}$ с краевыми условиями 1) из (4) при $a = 1, b = 1/2$ вариационно-разностным методом (методом минимизации функционала (7) [8, 19]) получены значения первых двух собственных значений $p_1 = 309,4; p_2 = 317,9$ и вычислены значения соответствующих им собственных вектор-функций $\mathbf{u}_1 = (w_1, f_1), \mathbf{u}_2 = (w_2, f_2)$. На рис. 1 приведены графики прогибов $w_1(x, y), w_2(x, y)$, а на рис. 2 – графики функций напряжений $f_1(x, y), f_2(x, y)$. Собственные вектор-функции нормированы по норме $\|\mathbf{u}_k\| = \max \{|w_k(x, y)|, |f_k(x, y)|\}$ при $0 < x < 1, 0 < y < b/a$.

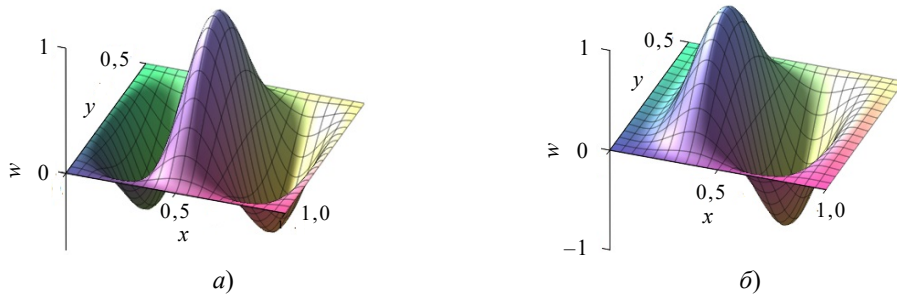


Рис. 1. Графики функций прогибов: а) $w_1(x, y)$, б) $w_2(x, y)$

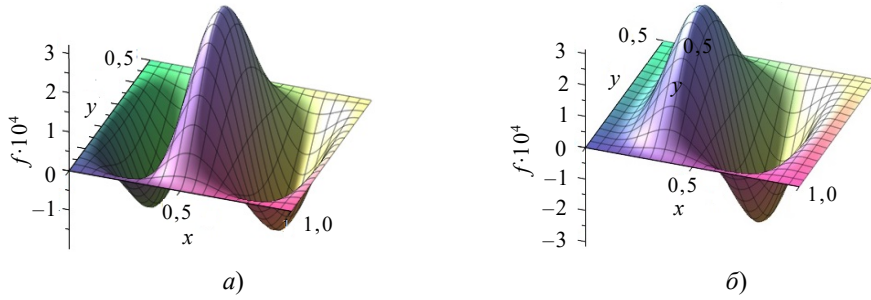


Рис. 2. Графики функций напряжений: а) $f_1(x, y)$, б) $f_2(x, y)$

Пример 2. Для линейной задачи (6) с краевыми условиями 1) из (4) в области $\Omega = \{(x, y): 0 < x < 1, 0 < y < b/a\}$ при $a = 1, b = 1/2$ разностным методом найдены прогиб $w(x, y)$ и функция напряжений $f(x, y)$, представленные графиками на рис. 3. При этом были заданы значения сжимающей нагрузки $p = 309 < p_1 = 309,4$ и функции несовместности $\bar{\mu}(x, y) = 200$ (равномерное распределение полей дислокаций и дисклинаций). Форма прогиба $w(x, y)$ на рис. 3а совпадает с формой прогиба первой собственной функции $w_1(x, y)$ на рис. 1а, но функция напряжений на рис. 3б существенно отличается от функции напряжений на рис. 1б.

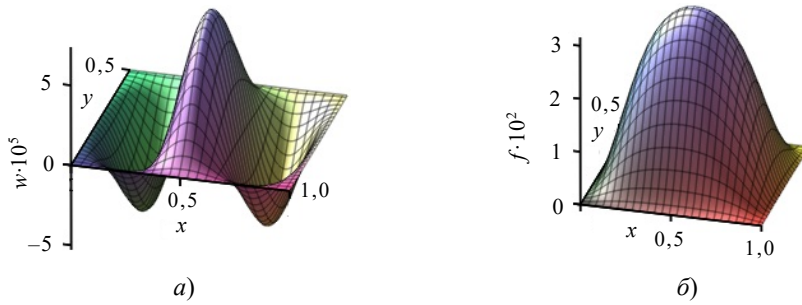


Рис. 3. Графики: а) прогиб $w(x, y)$, б) функции напряжений $f(x, y)$

В задаче были найдены прогиб и функция напряжений при $p = 310, 311, \dots, 350$ и неизменных значениях функции несовместности $\bar{\mu}(x, y) = 200$. Функция напряжений оставалась такой же, как на рис. 3б. Прогиб при $p = 310$ имел форму, как на рис. 3а, а при значении $p = 311$ имел форму, как на рис. 4а, и эта форма постепенно изменялась до формы, изображенной на рис. 4б при $p = 350$. Это объясняется влиянием дислокаций и дисклинаций.

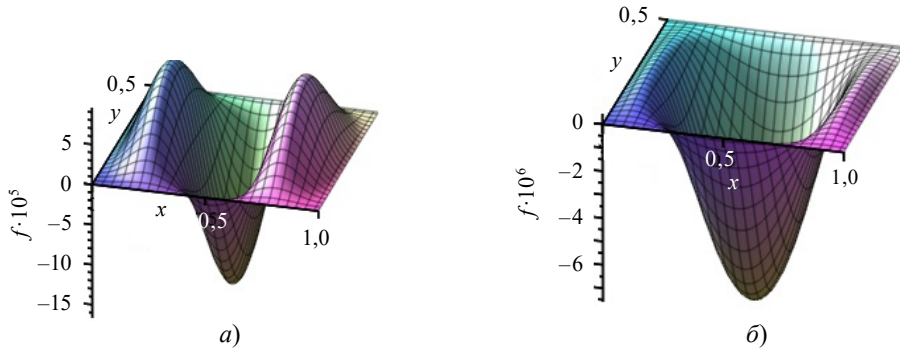


Рис. 4. Графики функции прогиба: а) при $p = 311$, б) при $p = 350$

Пример 3. Для задачи (8) с краевыми условиями 2) из (4) в области $\Omega = \{(x, y): 0 < x < 1, 0 < y < b/a\}$ при $b/a = 1/2, r = 10, p = 300, \bar{\mu}(x, y) = 100$ на рис. 5 представлены прогиб $w(x, y)$ и функция напряжений $f(x, y)$.

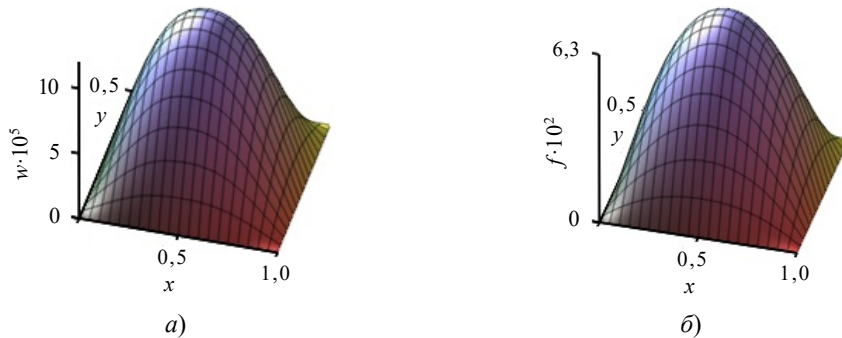


Рис. 5. Графики: а) прогиб $w(x, y)$, б) функции напряжений $f(x, y)$

Заключение

Установлено, что наличие полей непрерывно распределенных краевых дислокаций и клиновых дисклинаций в сжатой пологой оболочке сопутствуют ненулевые прогиб и функция напряжений. При отсутствии дислокаций и дисклинаций для сжатой оболочки возникает задача о критических нагрузках потери устойчивости: при достаточно малых значениях сжимающей нагрузки оболочка сохраняет нулевое равновесие, а при достижении критического значения оболочка теряет устойчивость – появляется прогиб и в отличие от сжатой пластины функция напряжений не равна нулю. Приведены результаты численных расчетов и графики компонентов вектор-функции для различных случаев краевых условий.

Список литературы

1. Зубов Л. М. Уравнения Кармана для упругой пластинки с дислокациями и дисклинациями. *Доклады РАН*. 2007. Т. 412. №3. С. 343–346.
2. Altenbach H., Eremeyev V.A. On the effective stiffness of plates made of hyperelastic materials with initial stresses. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2010. Vol. 45. Iss. 10. P. 976–981. DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2010.04.007.
3. Zubov L., Derezin S. Elastic shells, dislocations, and disclinations. In: *Encyclopedia of Continuum Mechanics*. Eds. H. Altenbach, A. Öchsner. Berlin–Heidelberg: Springer, 2018. P. 1–7. https://doi.org/10.1007/978-3-662-53605-6_198-1.
4. Altenbach H., Eremeyev V.A. Bending of a three-layered plate with surface stresses. In: *Analysis and Modelling of Advanced Structures and Smart Systems*. Eds. H. Altenbach, E. Carrera, G. Kulikov. Singapore: Springer, 2018. P. 1–10. https://doi.org/10.1007/978-981-10-6895-9_1.
5. Zelenina A.A., Zubov L.M. Spherically symmetric deformations of micropolar elastic medium with distributed dislocations and disclinations. In: *Advanced in Mechanics of Microstructured Media and Structures. Series: Advanced Structured Materials*. Vol. 87. Eds. F. dell Isola, V.A. Eremeyev, A.V. Porubov. Cham: Springer, 2018. P. 357–369.
6. Goloveshkina E.V., Zubov L.M. Eigenstresses in a nonlinearly elastic sphere with distributed dislocations. In: *New Achievements in Continuum Mechanics and Thermodynamics. Series: Advanced Structured Materials*. Vol. 108. Eds. B. Abali, H. Altenbach, F. dell Isola et al. Cham: Springer International Publishing, 2019. P. 137–155. DOI:10.1007/978-3-030-13307-8_11.

7. Roychowdhury Ayan, Gupta Anurag. Dislocations, disclinations, and metric anomalies as sources of global strain incompatibility in thin shells. In: *Shell Structures: Theory and Applications*. Vol. 4. Eds. W. Pietraszkiewicz, W. Witkowski. CRC Press, 2018. P. 153–156. DOI: 10.1201/9781315166605-31.
8. Peshkhoev I.M., Stolyar A.M. Buckling of the nonuniformly compressed plate with dislocations and disclinations. In: *Analysis of Shells, Plates, and Beams*. Vol. 134. Eds. H. Altenbach, N. Chinchaladze, R. Kienzler, W. Müller. Cham: Springer, 2020. P. 345–366. https://doi.org/10.1007/978-3-030-47491-1_18.
9. Пешхоев И.М. Асимптотика критических нагрузок сжатой узкой пластины с внутренними напряжениями. *Проблемы прочности и пластичности*. 2021. Т. 83. №2. С. 227–234. DOI: <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2021-83-2-227-234>.
10. Peshkhoev I.M., Sobol B.V. Critical loads of uniformly compressed orthotropic rectangular plate on an elastic base. *Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don)*. 2022. Vol. 22. No 3. P. 214–223. <https://doi.org/10.23947/2687-1653-2022-22-3-214-223>.
11. Zubov L.M., Karyakin M.I. Large strains of a spherical shell with distributed dislocations and disclinations. In: *Sixty Shades of Generalized Continua. Advanced Structured Materials*. Vol. 170. Eds. H. Altenbach, A. Berezovski, F. dell'Isola, A. Porubov. Cham: Springer, 2023. P. 727–745. https://doi.org/10.1007/978-3-031-26186-2_45.
12. Ватульян А.О., Недин Р.Д. Об одной задаче оптимизации для преднапряженной пластины с переменной жесткостью. *Проблемы прочности и пластичности*. 2024. Т. 86. №2. С. 202–214. [https:// DOI: 10.32326/1814-9146-2024-86-2-202-214](https://doi.org/10.32326/1814-9146-2024-86-2-202-214).
13. Пешхоев И.М. Равновесие нормально нагруженной упругой полой цилиндрической оболочки с дислокациями и дисклинациями. *Проблемы прочности и пластичности*. 2024. Т. 86. №3. С. 321–329. [https:// DOI: 10.32326/1814-9146-2024-86-3-321-329](https://doi.org/10.32326/1814-9146-2024-86-3-321-329).
14. Янковский А.П. Определение верхней границы несущей способности осесимметричных армированных пологих оболочек, контактирующих с несжимаемой жидкостью. *Прикладная математика и механика*. 2025. Т. 89. Вып. 2. С. 192–223. DOI: 10.31857/S0032823525020046.
15. Timoshenko S.P., Woinowsky-Krieger S. *Theory of Plates and Shells*. New York: McGraw-Hill, 1959. 595 p.
16. Vashizu K. *Variational Methods in Elasticity and Plasticity*. Oxford–New York–Toronto–Sydney–Frankfurt: Elsevier and Technology, 1982. 630 p.
17. Ciarlet P.G., Rabier P. *Les equations de von Karman*. Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag, 1980. 202 p.
18. Vorovich I.I. *Nonlinear Theory of Shallow Shells*. New York: Springer, 1999. 390 p.
19. Морозов Н.Ф. К нелинейной теории тонких пластин. *Доклады АН СССР*. 1957. Т. 114. №5. С. 968–671.
20. Михлин С.Г. *Вариационные методы в математической физике*. М.: Наука, 1970. 512 с.
21. Самарский А.А., Андреев В.Б. *Разностные методы для эллиптических уравнений*. М.: Наука, 1976. 352 с.

References

1. Zubov L.M. Von Karman equations for an elastic plate with dislocations and disclinations *Doklady Physics*. 2007. Vol. 52. No 1. P. 67–70.
2. Altenbach H., Eremeyev V.A. On the effective stiffness of plates made of hyperelastic materials with initial stresses. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2010. Vol. 45. Iss. 10. P. 976–981. DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2010.04.007.
3. Zubov L., Derezin S. Elastic shells, dislocations, and disclinations. In: *Encyclopedia of Continuum Mechanics*. Eds. H. Altenbach, A. Öchsner. Berlin. Heidelberg. Springer. 2018. P. 1–7. https://doi.org/10.1007/978-3-662-53605-6_198-1.
4. Altenbach H., Eremeyev V.A. Bending of a three-layered plate with surface stresses. In: *Analysis and Modelling of Advanced Structures and Smart Systems*. Eds. H. Altenbach, E. Carrera, G. Kulikov. Singapore. Springer. 2018. P. 1–10. https://doi.org/10.1007/978-981-10-6895-9_1.

5. Zelenina A.A., Zubov L.M. Spherically symmetric deformations of micropolar elastic medium with distributed dislocations and disclinations. In: *Advanced in Mechanics of Microstructured Media and Structures. Series: Advanced Structured Materials*. Vol. 87. Eds. F. dell Isola, V.A. Eremeyev, A.V. Porubov. Cham. Springer. 2018. P. 357–369.
6. Goloveshkina E.V., Zubov L.M. Eigenstresses in a nonlinearly elastic sphere with distributed dislocations. In: *New Achievements in Continuum Mechanics and Thermodynamics. Series: Advanced Structured Materials*. Vol. 108. Eds. B. Abali, H. Altenbach, F. dell Isola et al. Cham. Springer International Publishing. 2019. P. 137–155. DOI:10.1007/978-3-030-13307-8_11.
7. Roychowdhury Ayan, Gupta Anurag. Dislocations, disclinations, and metric anomalies as sources of global strain incompatibility in thin shells. In: *Shell Structures: Theory and Applications*. Vol. 4. Eds. W. Pietraszkiewicz, W. Witkowski. CRC Press. 2018. P. 153–156. DOI: 10.1201/9781315166605-31.
8. Peshkhoev I.M., Stolyar A.M. Buckling of the nonuniformly compressed plate with dislocations and disclinations. In: *Analysis of Shells, Plates, and Beams*. Vol. 134. Eds. H. Altenbach, N. Chinchaladze, R. Kienzler, W. Müller. Cham. Springer. 2020. P. 345–366. https://doi.org/10.1007/978-3-030-47491-1_18.
9. Peshkhoev I.M. Asimptotika kriticheskikh nagruzok szhatoy uzkoj plastiny s vnutrennimi napryazheniyami [Asymptotics of critical loads of a compressed narrow elastic plate with internal stresses]. *Problemy prochnosti i plastichnosti [Problems of Strength and Plasticity]*. 2021. Vol. 83. No 2. P. 227–234 (In Russian).
10. Peshkhoev I.M., Sobol B.V. Critical loads of uniformly compressed orthotropic rectangular plate on an elastic base. *Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don)*. 2022. Vol. 22. No 3. P. 214–223. <https://doi.org/10.23947/2687-1653-2022-22-3-214-223>.
11. Zubov L.M., Karyakin M.I. Large strains of a spherical shell with distributed dislocations and disclinations. In: *Sixty Shades of Generalized Continua. Advanced Structured Materials*. Vol. 170. Eds. H. Altenbach, A. Berezovski, F. dell Isola, A. Porubov. Cham. Springer. 2023. P. 727–745. https://doi.org/10.1007/978-3-031-26186-2_45.
12. Vatulyan A.O., Nedin R.D. Ob odnoy zadache optimizatsii dlya prednapryazhennoy plastiny s peremennoy zhestkostyu [On an optimization problem for a prestressed plate with variable stiffness]. *Problemy prochnosti i plastichnosti [Problems of Strength and Plasticity]*. 2024. Vol. 86. No 2. P. 202–214 (In Russian).
13. Peshkhoev I.M. Ravnovesie normalno nagruzhennoy uprugoy pologoy tsilindricheskoy obolochki s dislokatsiyami i disklinatsiyami [Equilibrium of a normally loaded elastic shallow cylindrical shell with dislocations and disclinations]. *Problemy prochnosti i plastichnosti [Problems of Strength and Plasticity]*. 2024. Vol. 86. No 3. P. 321–329 (In Russian).
14. Yankovskii A.P. Opredelenie verkhney granitsy nesushchey sposobnosti osesimmetrichnykh armirovannykh pologikh obolochek, kontaktiruyushchikh s neszhimaemoy zhidkostyu [Determination of the upper limit of the bearing capacity of axisymmetric reinforced shallow shells in contact with an incompressible fluid]. *Prikladnaya matematika i mekhanika [Applied Mathematics and Mechanics]*. 2025. Vol. 89. Iss. 2. P. 192–223 (In Russian).
15. Timoshenko S.P., Woinowsky-Krieger S. *Theory of Plates and Shells*. New York. McGraw-Hill. 1959. 595 p.
16. Vashizu K. *Variational Methods in Elasticity and Plasticity*. Oxford. New York. Toronto. Sydney. Frankfurt. Elsevier and Technology. 1982. 630 p.
17. Ciarlet P.G., Rabier P. *Les equations de von Karman*. Berlin. Heidelberg. New York. Springer-Verlag. 1980. 202 p.
18. Vorovich I.I. *Nonlinear Theory of Shallow Shells*. New York. Springer. 1999. 390 p.
19. Morozov N.F. K nelineynoy teorii tonkikh plastin [On the non-linear theory of thin plates]. *Doklady AN SSSR [Doklady Physics]*. 1957. Vol. 114. No 5. P. 968–671 (In Russian).
20. Mikhlin S.G. *Variatsionnye metody v matematicheskoy fizike [Variational Methods in Mathematical Physics]*. Moscow. Nauka Publ. 1970. 512 p. (In Russian).
21. Samarskiy A.A., Andreev V.B. *Raznostnye metody dlya ellipticheskikh uravneniy [Finite Difference Methods for Elliptic Equations]*. Moscow. Nauka Publ. 1976. 352 p. (In Russian).

**ON THE BUCKLING OF A COMPRESSED ELASTIC SHALLOW
CYLINDRICAL SHELL WITH DISLOCATIONS AND DISCLINATIONS**

Peshkhoev I.M.

Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russian Federation

peshkhoev@rambler.ru

Received by the Editor 2025/09/30

This paper examines the behavior of equilibria in a compressed, elastic, shallow, circular cylindrical shell with a rectangular planform. The shell is subject to internal stresses caused by fields of continuously distributed edge dislocations and wedge disclinations. The compressive load is uniformly distributed over the curved edges of the shell and acts parallel to the cylinder's generatrix. Boundary conditions for free clamping or pinned support of the shell edges are considered. Nonlinear equilibrium equations of the Karman type are derived. A scalar function, called the incompatibility function, appears on the right-hand side of the deformation compatibility equation and depends on the density of dislocations and disclinations. It is established that in the presence of stress sources, the solution to the system of equations is a vector function whose components are the deflection and the stress function. The problem of weak bending of a compressed shallow shell with dislocations and disclinations is also considered and solved using a difference method. In the absence of dislocation and disclination fields, the nonlinear problem has a trivial solution, and after linearization, an eigenvalue problem arises, which determines the critical buckling loads of a compressed shell. To solve the eigenvalue problem, a variational method is used in combination with a difference method. The results of numerical calculations for the first few critical values of the compressive load are presented, and graphs of the components of the corresponding eigenvector functions are plotted. For the linear equilibrium problem of a compressed shell with dislocations and disclinations, the results of numerical calculations and graphs of the components of the vector functions for given values of the compressive load and the incompatibility function are also presented.

Keywords: elastic circular shallow cylindrical shell, dislocations and disclinations, critical load.