

УДК 539.3

DOI: 10.32326/1814-9146-2025-88-1-31-47

**ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ
СФЕРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТИ В ОБРАЗЦАХ,
ИЗГОТОВЛЕННЫХ С ПОМОЩЬЮ АДДИТИВНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ,
И ВОССТАНОВЛЕНИЕ ПОЛЯ НАПРЯЖЕНИЙ
МЕТОДОМ «ЗАМОРАЖИВАНИЯ»***

© 2026 г.

Степанова Л.В., Любимов Е.А.

*Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, Самара, Российская Федерация*

stepanova.lv@ssau.ru, lyubimov.ea@ssau.ru

Поступила в редакцию 16.09.2025

Представлено экспериментальное обоснование возможности определения параметров сферической полости или включения в образце по данным испытаний на одноосное сжатие (или растяжение) образцов. Для экспериментальной идентификации параметров сферической полости по данным механических испытаний на сжатие (растяжение) с помощью аддитивных технологий была изготовлена серия образцов из оптически активных материалов (AnycubicABS-LikePRO 2 Clear) кубической формы со сферическими полостями. В исследовании с использованием моделей прозрачных дисков и образцов кубической формы со сферическими полостями, напечатанных на 3D-принтере, были изучены характеристики двойного лучепреломления при сжатии фотополимеров и испытаний на сжатие в замороженном состоянии при различных температурах и осевых нагрузках. Получены интерференционные картины (карты изохроматических линий с помощью метода цифровой фотоупругости) и распределения полей перемещений (методом корреляции цифровых изображений) на поверхности образца. На основе экспериментально найденных полей напряжений и перемещений на поверхности образца определены координаты центра сферической полости и ее радиус путем вычисления значений функционала взаимности и инвариантных интегралов взаимодействия. Для реализации метода «замораживания» напряжений и фиксации напряженных участков на напечатанной модели разработана полярископическая система, объединенная с высокотемпературной загрузочной камерой. После проведения испытаний пространственный образец, разрезанный на пластины, дает картины разности главных напряжений во внутренних сечениях образца (картины изохроматических полос в плоских пластинах, полученных посредством разрезания образца кубической формы со сферической полостью), что позволяет оценить параметры напряженно-деформированного состояния внутри образца с концентратором напряжений. Проведено сопоставление экспериментальных полей с конечно-элементными решениями, сравнение показало хорошую согласованность

* Выполнено при поддержке РНФ (проект №25-21-00272).

результатов. Разработана комплексная методика экспериментального определения механических полей в нагруженных телах с последующей идентификацией внутренних дефектов на основе интерференционно-оптических измерений, инвариантных интегралов взаимодействия, численных оценок для идентификации скрытых включений.

Ключевые слова: задача неразрушающего контроля, аддитивные технологии, 3D-печать, инвариантные интегралы механики, метод цифровой фотоупругости, метод «замораживания» напряжений, геометрическая обратная задача.

Введение

Одной из актуальных задач экспериментальной механики и, в целом, современной механики деформируемого твердого тела является диагностика внутренних дефектов в телах сложной формы, содержащих пустоты, включения, расслоения и зоны нарушенной структуры [1–7]. Прямое наблюдение таких дефектов, особенно в непрозрачных или композитных материалах, либо затруднено, либо требует дорогостоящих методов визуализации (например, томографии или ультразвукового сканирования) [1, 2]. Поэтому особую ценность приобретает подход, при котором информация о внутренней структуре восстанавливается на основе данных, полученных только с поверхности объекта, в частности, путем анализа полей перемещений или напряжений. Настоящая статья посвящена экспериментальному исследованию полей на поверхности и внутри образца со сферической полостью. Следует отметить, что в течение достаточно длительного времени такая верификация была невозможна. Однако современные технологии аддитивной печати предоставляют возможность изготовить образцы с внутренней полостью или включением. Но, несмотря на широкие возможности современной 3D-печати, многие вопросы, связанные с выбором материала и его свойствами, необходимыми для проведения эксперимента, например методом цифровой фотоупругости, являются открытыми. В целях экспериментальной верификации теоретического подхода, предложенного и развитого в [3–7], с помощью аддитивных технологий была изготовлена серия образцов из оптически активных материалов (AnycubicABS-LikePRO 2 Clear) (рис. 1).

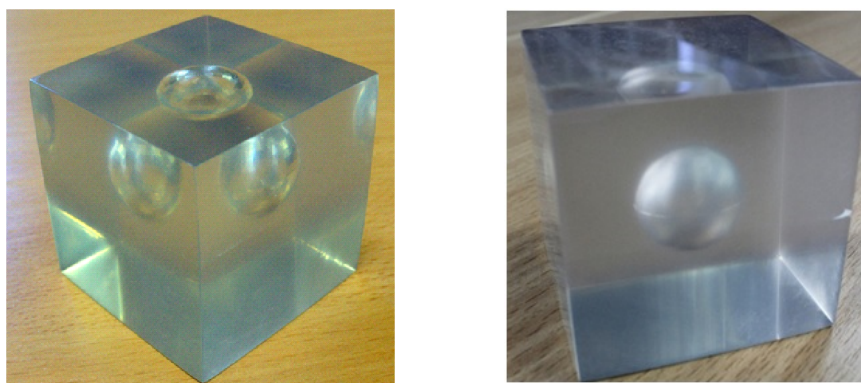


Рис. 1. Экспериментальные образцы кубической формы со сферической полостью

В настоящем исследовании для определения полей напряжений на поверхности образца был применен метод цифровой фотоупругости, позволяющий найти картины

изохроматических полос и изоклин [8–12]. Для определения перемещений использовался метод корреляции цифровых изображений. Мотивацией для выполнения большой серии опытов стала необходимость экспериментального обоснования теоретического подхода, развитого в [3–7], и аналитических оценок параметров сферической полости, полученных в этих работах. В [3–7] для определения параметров сферических, сфероидальных и эллипсоидальных полостей и жестких включений авторы опирались на теорему о взаимности работ и следующий из нее функционал взаимности и на свойство инвариантности поверхностных J_k -, L_k -, M -интегралов.

1. Геометрические обратные задачи. Подход, основанный на функционале взаимности и инвариантных J_k -, L_k -, M -интегралах

Пусть V – односвязная область в трехмерном пространстве R^3 ; G – подобласть в пространстве R^3 . Положим, что $\Omega = V/G$ – линейно упругое тело с модулем сдвига μ и коэффициентом Пуассона ν . Под G будем понимать дефект: полость, трещину или включение. В декартовых координатах $X = (X_1, X_2, X_3)$ решение краевой задачи для тела с дефектом обозначим как $\sigma_{ij}^{(f)}(X)$, $\varepsilon_{ij}^{(f)}(X)$, $u_i^{(f)}(X)$. В [3–7] для идентификации полостей и включений была использована идея, базирующаяся на принципе взаимности и интеграле взаимности:

$$RG^{(f)}(r) = \int_S [t_i^{(f)}(X)u_i^{(r)} - t_i^{(r)}(X)u_i^{(f)}] dS, \quad (1)$$

где символом (r) обозначены упругие поля $\sigma_{ij}^{(r)}$, $\varepsilon_{ij}^{(r)}$, $u_i^{(r)}$ в теле без дефекта (так называемые регулярные поля), занимающем объем V ; $t_i^{(r)} = \sigma_{ij}^{(r)}(X)n_j$ – вектор поверхностных усилий, действующий на замкнутой поверхности $S \subset \Omega$. Если внутри замкнутой поверхности S нет дефекта G , то $RG^{(f)}(r) = 0$, в противном случае величина $RG^{(f)}(r)$ отличается от нулевого значения и дает информацию о дефекте G . В случае, когда нагрузки $t_i^{(f)}$ и перемещения $u_i^{(f)}$ известны на поверхности тела ∂V , возможно положить, что $S = \partial V$ и значения функционала взаимности (1) могут быть вычислены для всех регулярных полей. Наряду с функционалом взаимности (1) для решения обратной геометрической задачи в линейной теории упругости могут быть использованы инвариантные интегралы [3–7]:

$$J_k = \int_S (Wn_k - t_j u_{j,k}) dS, \quad L_k = \int_S \varepsilon_{kij} (WX_j n_i + t_i u_j - t_p u_{p,i} X_j) dS, \quad k = 1, 2, 3, \quad (2)$$

$$M = \int_S \left(WX_i n_i - t_j u_{j,i} X_i - \frac{1}{2} t_i u_i \right) dS,$$

где приняты обозначения: S – замкнутая поверхность; σ_{ij} , ε_{ij} , u_i – поля напряжений, деформаций и перемещений в линейно упругом теле; $W = \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}/2$ – энергия упругой деформации единицы объема; ε_{kij} – символ Леви–Чивиты. Все не зависящие от пути интегралы обращаются в нуль, если внутри поверхности S нет дефектов. Если внутри замкнутой поверхности S присутствует дефект (полость, включение, трещина), то значения интегралов (2) дают информацию о дефекте. В силу свойства инвариантности не зависящие от пути интегралы могут быть использованы для решения геометрических обратных задач подобно функционалу взаимности (1). Вслед за [5] обозначим с помощью индекса (f) инвариантные интегралы, вычисленные для полей в теле с дефектом $u_i^{(f)}$: $J_k^{(f)}$, $L_k^{(f)}$, $M^{(f)}$. Наряду с инвариантными интегралами (2) можно

ввести в рассмотрение не зависящие от пути интегралы взаимодействия для суммы полей в теле с дефектом и регулярных полей согласно соотношениям [5]:

$$J_k^{(f)+(r)} = J_k^{(f)} + J_{k \text{ int}}^{(f)}(r), \quad L_k^{(f)+(r)} = L_k^{(f)} + L_{k \text{ int}}^{(f)}(r), \quad M^{(f)+(r)} = M^{(f)} + M_{\text{int}}^{(f)}(r), \quad (3)$$

где интегралы, описывающие взаимодействие между полями в теле с дефектом и регулярными полями, имеют вид [5]:

$$J_{k \text{ int}}^{(f)}(r) = \int_S (\sigma_{ij}^{(f)} \varepsilon_{ij}^{(f)} n_k - t_i^{(f)} u_{i,k}^{(r)} - t_i^{(r)} u_{i,k}^{(f)}) dS,$$

$$L_{k \text{ int}}^{(f)}(r) = \int_S \varepsilon_{kij} (\sigma_{mn}^{(f)} \varepsilon_{mn}^{(f)} X_j n_i + t_i^{(f)} u_j^{(r)} + t_i^{(r)} u_j^{(f)} - t_p^{(f)} u_{p,i}^{(r)} X_j - t_p^{(r)} u_{p,i}^{(f)} X_j) dS, \quad (4)$$

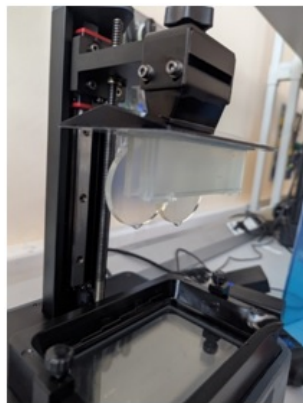
$$M_{\text{int}}^{(f)}(r) = \int_S \left(\sigma_{ij}^{(f)} \varepsilon_{ij}^{(f)} X_k n_k - t_i^{(f)} u_{i,k}^{(r)} X_k - t_i^{(r)} u_{i,k}^{(f)} X_k - \frac{1}{2} t_i^{(f)} u_i^{(r)} - \frac{1}{2} t_i^{(r)} u_i^{(f)} \right) dS.$$

Интегралы взаимодействия (4) также обладают свойством независимости от поверхности интегрирования, то есть инвариантны. Если приложенные нагрузки и перемещения известны на границе тела $S = \partial V$, то все напряжения, деформации и тензор дисторсии могут быть вычислены на границе. На границе $S = \partial V$ известны и все регулярные поля, поэтому все инвариантные интегралы (4) могут быть вычислены. Вычисленные с использованием экспериментальных данных инвариантные интегралы (4) дают возможность получения системы уравнений относительно параметров дефекта (радиуса сферической полости и координат центра сферической полости). На основании изложенного подхода в [5] были получены аналитические выражения для радиуса и координат центра сферической полости (и сферического включения). В качестве регулярных полей были использованы решения линейной теории упругости для линейно упругого пространства. Численно с использованием метода конечных элементов было показано, что аналитические оценки позволяют с хорошей точностью идентифицировать параметры сферического включения или полости. Тем не менее, полученное решение не было обосновано экспериментально в связи со сложностью изготовления образцов, ослабленных сферической полостью или включением. К настоящему времени, по сведениям авторов, не было предпринято попыток проведения подобной верификации и обоснования теоретических решений. Поэтому настоящая статья нацелена на экспериментальную идентификацию сферической полости в образце кубической формы при его нагружении сжатием и экспериментальной фиксацией поля напряжений на границе образца с помощью метода фотоупругости и поля перемещений на границе образца с помощью метода цифровой корреляции изображений. Целью статьи является разработка комплексной методики экспериментального определения механических полей в нагруженных телах с последующей идентификацией внутренних дефектов на основе интерференционно-оптических измерений, проведенных на образцах, изготовленных с помощью аддитивных технологий, и инвариантных интегралов взаимодействия (4).

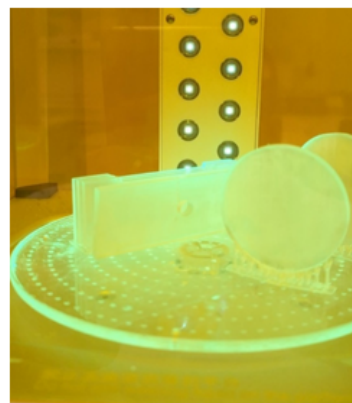
2. Изготовление образцов с помощью 3D-печати. Экспериментальная процедура

Развитие аддитивных технологий (3D-печати) вдохновило исследователей на переосмысление методов создания лабораторных моделей для изучения напряженно-деформированного состояния в твердых деформируемых телах. Одним из ключевых

примеров является цикл публикаций [13–15], где авторы продемонстрировали возможность создания фоточувствительных моделей с применением промышленной технологии PolyJet и материала VeroClear. Эти публикации не только подтвердили применимость 3D-печати в фотоупругих экспериментах, но и указали на важный момент: метод «замораживания» напряжений может быть реализован в фотополимерах, напечатанных аддитивно. Современные технологии 3D-печати предлагают широкий выбор подходов. Технология цифровой световой проекции (DLP – Digital Light Processing) представляет собой один из видов стереолитографической 3D-печати, при которой жидкий фотополимер отверждается по слоям с помощью проектора. В отличие от SLA-печати, где используется лазер, DLP применяет цифровой микрозеркальный чип (DMD), отражающий свет проектора в строго заданных участках слоя. Это обеспечивает высокую точность и однородность засветки, особенно на больших площадях. Одним из главных преимуществ DLP является высокая скорость печати, поскольку каждый слой отверждается одновременно во всем объеме, а не по контуру, как в случае с лазером. При этом сохраняется высокая разрешающая способность: принтеры на базе DLP могут достигать разрешения до 25–50 мкм по XU и 10–30 мкм по Z в зависимости от устройства и используемой оптики. В настоящем исследовании применялся принтер Anycubic Photon Ultra, обладающий разрешением 80 мкм и шагом по оси Z до 10 мкм. Такое разрешение оказалось достаточным для создания оптически точных образцов, пригодных для последующего анализа в полярископе. На рис. 2а показано оборудование, использованное для изготовления образцов (принтер Anycubic Photon Ultra), а на рис. 2б – образцы в форме пластины с круговым отверстием и круговые диски для проведения процедуры калибровки.



а)



б)

Рис. 2. Пример оборудования для производства образцов и полимеризация образцов в УФ камере после 3D-печати

На рис. 3 приведены картины изохроматических полос в диске, изготовленном с помощью 3D-печати и нагруженном силами 1,471, 1,716, 1,961 кН. По полученным значениям оптической постоянной f_{σ} для оптической константы определяем математическое ожидание и дисперсию $f_{\sigma} = 29,159 \pm 0,041$ Н/м.

После проведения процедуры калибровки были проведены испытания на образцах кубической формы с целью определения параметров сферической полости (рис. 4а) и получены картины изохроматических полос на гранях образца (рис. 4б).

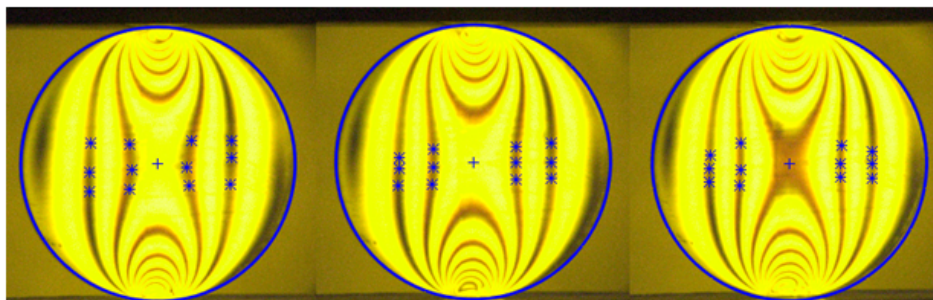
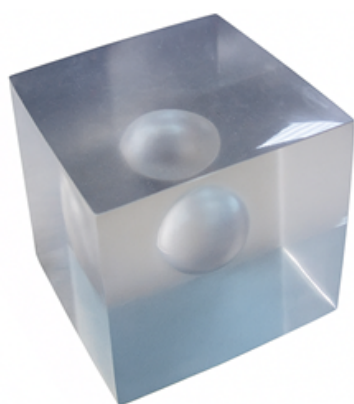
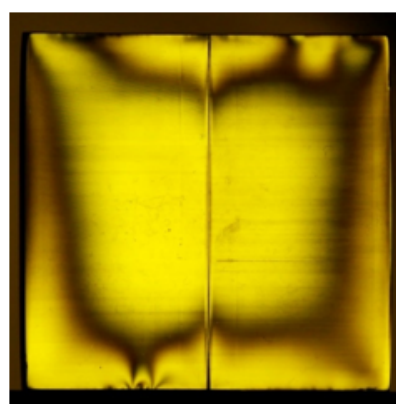


Рис. 3. Картина изохроматических полос в изготовленном с помощью 3D-печати круговом диске для проведения процедуры калибровки



а)



б)

Рис. 4. Образец с внутренней сферической полостью для испытаний на сжатие (*а*) и картина изохроматических полос на внешней грани куба (*б*)

Для определения полей напряжений на поверхности образца был применен метод цифровой фотоупругости, позволяющий найти картины изохроматических полос (см. рис. 3) и изоклин [8–21]. Для определения перемещений использовался метод корреляции цифровых изображений. На рис. 5 представлен экспериментальный образец с нанесенными точками для определения поля перемещений, на рис. 6 показаны результаты эксперимента, проведенного методом корреляции цифровых изображений (плоскость ортогональна плоскости приложения нагрузки).

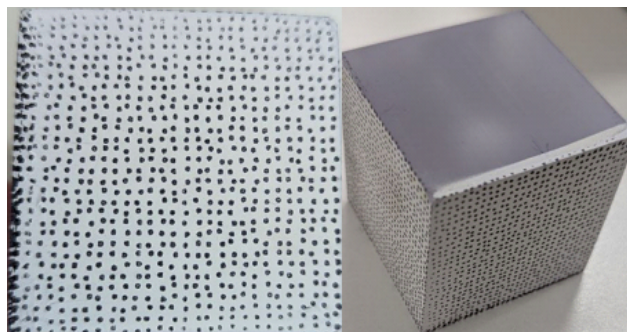


Рис. 5. Образец для испытаний методом корреляции цифровых изображений

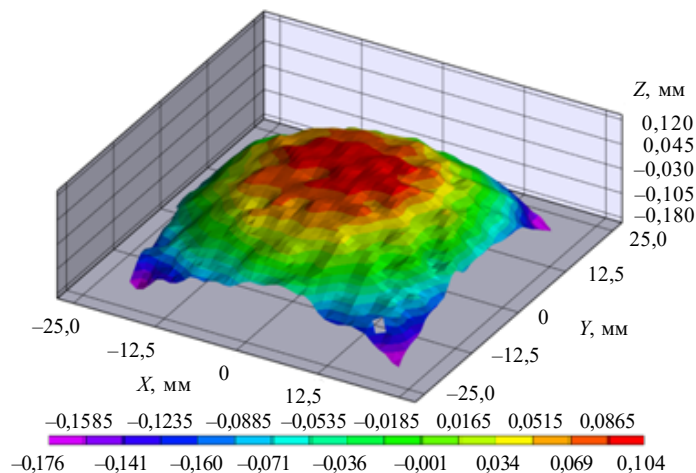


Рис. 6. Поле смещений грани кубического образца с внутренней сферической полостью при его сжатии

В соответствии с оптико-механическим законом Вертгейма разность главных напряжений $\sigma_1 - \sigma_2$ связана с оптическими характеристиками (порядком изохроматической полосы N и оптической постоянной материала f_σ) соотношением

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{Nf_\sigma}{d}, \quad \sigma_1 - \sigma_2 = \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2}, \quad (5)$$

d – толщина пластины. Ключом к количественному расчету напряжений является интерпретация фазы фотоупругой полосы и получение параметров изоклин и изохром. При восстановлении поля напряжений использовались методы пошагового фазового сдвига и алгоритмы фазового развертывания [22–24]. Метод пошагового фазового сдвига базируется на регистрации нескольких интерференционных картин полос с изменением фазы на известную величину. Параметры изоклин и изохром были определены с использованием четырех- и шестиступенчатых методов пошагового фазового сдвига соответственно. Используя четырехступенчатый метод фазового сдвига, можно установить параметр изоклины θ , который указывает направление главного напряжения и может быть записан в виде

$$\theta = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{I_2 - I_3}{I_2 - I_4}, \quad (6)$$

где I_1, I_2, I_3, I_4 – набор измеренных интенсивностей с четырьмя различными фазовыми сдвигами δ .

Таблица 1

Расположение углов и интенсивность света на каждом этапе четырехступенчатого метода фазового сдвига

Номер регистрации в испытании	α	β	Интенсивность света (освещенность)
1	0	$\pi/2$	$I_1 = I_b + (1/2)I_a \sin^2(\delta/2)(1 - \sin 4\theta)$
2	$\pi/8$	$5\pi/8$	$I_2 = I_b + I_a \sin^2(\delta/2)\sin^2 2\theta$
3	$\pi/4$	$3\pi/4$	$I_3 = I_b + (1/2)I_a \sin^2(\delta/2)(1 + \sin 4\theta)$
4	$3\pi/8$	$7\pi/8$	$I_4 = I_b + I_a \sin^2(\delta/2)\cos^2 2\theta$

Здесь α и β представляют собой углы поляризации поляризатора и анализатора соответственно; I_a и I_b – интенсивности модулированного и фонового света соответственно; θ – параметр изоклины; δ представляет собой изохроматическую фазу; I_1, I_2, I_3, I_4 – интенсивности света при различных фазовых сдвигах. Параметр изоклины θ определяется из уравнения (6). Параметр фазы δ вычисляется с помощью шестишагового метода по формуле

$$\delta = \operatorname{arctg} \frac{(I_5 - I_3) \sin 2\theta_v + (I_4 - I_6) \cdot 2\theta_v}{I_1 - I_2}, \quad (7)$$

где θ_v – фаза изоклины, изменяющаяся в диапазоне $[-\pi/2, \pi/2]$.

Таблица 2

**Расположение углов и интенсивность света на каждом этапе
шестиступенчатого метода фазового сдвига**

Номер регистрации в испытании	δ	β	Интенсивность света (освещенность)
5	0	$\pi/4$	$I_1 = I_b + (1/2)I_a(1 - \cos \delta)$
6	0	$3\pi/4$	$I_2 = I_b + (1/2)I_a(1 + \cos \delta)$
7	0	0	$I_3 = I_b + (1/2)I_a(1 + \sin \delta \sin 2\theta)$
8	$\pi/4$	$\pi/4$	$I_4 = I_b + (1/2)I_a(1 - \sin \delta \cos 2\theta)$
9	$\pi/2$	$\pi/2$	$I_5 = I_b + (1/2)I_a(1 - \sin \delta \sin 2\theta)$
10	$3\pi/4$	$3\pi/4$	$I_6 = I_b + (1/2)I_a(1 + \sin \delta \cos 2\theta)$

Здесь $\mu = \pi/4$ – угол наклона первой четвертьволновой пластины, а δ и β – углы наклона второй четвертьволновой пластины и анализатора соответственно. После определения угла наклона θ_v касательное напряжение находится по формуле $\tau = \delta f_\sigma / (4\pi d) \sin 2\theta_v$. После определения поля напряжений методом фотоупругости и поля перемещений и деформаций методом корреляции цифровых изображений можно оценить значения инвариантных интегралов взаимодействия (4) и найти параметры сферической полости. Оказалось, что в рассматриваемом случае радиус сферической полости и ее координаты находятся с точностью до $\varepsilon = 10^{-4}$, что дает основание утверждать, что представленный подход позволяет экспериментально решать геометрические обратные задачи.

3. Метод «замораживания» напряжений

Количественная визуализация напряжений в трехмерных твердых телах имеет важное значение для решения различных инженерных задач, однако ее сложно достичь с помощью традиционных экспериментальных методов. Метод «замораживания» напряжений является эффективным методом определения полей внутренних напряжений. Однако трудности, связанные с созданием сложных 3D-моделей, препятствуют распространению этого метода. Метод, сочетающий аддитивное производство или 3D-печать, прозрачные фотополимеры, пригодные для печати, и методы замороженного прессования, предлагает новый подход к решению этих проблем [13–16, 24]. В ходе выполнения экспериментов на 3D-модели оказалось, что применяемый полимерный материал предоставляет возможность реализовать процедуру метода «замораживания» напряжений. Метод «замораживания» напряжений был предложен в середине XX века как способ сохранения напряженного состояния в

объемных телах для последующего анализа [14, 15, 24, 25]. Изначально он использовался при работе с полимерными моделями. Несмотря на трудоемкость и технологические сложности, метод давал уникальную возможность изучать поля напряжений во всем объеме, а не только на поверхности [5]. С развитием вычислительных методов (конечно-элементных методов) он утратил популярность, однако в последние годы метод вновь обретает актуальность [14, 15, 24, 25]. Это связано с появлением доступных 3D-принтеров, фотополимеров, фото- и температурно-чувствительных материалов, цифровых полярископов и систем автоматизированного проектирования (САПР), что существенно снизило трудозатраты на его реализацию [14, 15, 24, 25]. Метод заключается в том, что напряжения, возникающие в объемной модели под нагрузкой, сохраняются в материале путем изменения его физического состояния. Как правило, это достигается нагревом образца до температуры стеклования, его механическим нагружением и последующим охлаждением до комнатной температуры. После остывания внутренние напряжения остаются «замороженными» в структуре модели, что позволяет разрезать ее на тонкие пластинки и исследовать внутреннее напряженное состояние в каждой пластине методом цифровой фотоупругости [12, 13]. Алгоритм работы метода замораживания [13–16, 24, 25] заключается в выполнении следующих шагов: 1) изготовление прозрачного фотоупругого образца, чаще всего с использованием литья (эпоксидного клея ЭДП или эпоксидной смолы ЭД-20), но в случае данного подхода с применением аддитивных технологий (фотополимерной смолы); 2) нагрев образца до температуры, при которой полимер приобретает пластичность (выше точки стеклования; в случае эксперимента, приведенного выше, $\tau = 110$ °С); 3) выдержка в ненагруженном состоянии, приложение внешней нагрузки и последующая выдержка в нагруженном состоянии; 4) медленное охлаждение до комнатной температуры с сохранением нагрузки; 5) разрезание образца на тонкие пластины (до 10 мм); 6) анализ напряженного состояния в сечениях с помощью цифровой фотоупругости (проведение наблюдений в поляризационно-проекторной установке). Интерференционные полосы (изохромы) анализировались качественно – по форме и симметрии – и количественно через определение порядка полос в различных точках. По известной зависимости между порядком полос, толщиной образца и оптической чувствительностью материала можно восстановить разность главных напряжений (5). Далее полученное распределение сравнивалось с теоретическими расчетами и расчетами методом конечных элементов (МКЭ). Особое внимание уделялось локации максимальных градиентов порядка полос, которые указывали на положение и влияние включения на поле напряжений.

Результаты испытаний, полученные методом «замораживания» напряжений, представлены на рис. 7–10, где показаны интерференционные картины полос (изохром) в каждом из сечений кубического образца.

Для количественного анализа интерференционной картины использовались классические принципы фотоупругости, где порядок изохром N связан с разностью главных напряжений через оптическую чувствительность материала (5). На основе цифровых изображений, полученных при наблюдении в круговом полярископе, определялись участки максимальных градиентов, зоны концентрации напряжений и области влияния внутренней сферической полости. Контуры изохром интерпретировались как изолинии, что позволило выделить зоны повышенной разности главных напряжений и потенциальные локализации дефектов. Эти данные впоследствии сопоставлялись с расчетными величинами в программном пакете ANSYS, реализую-

шем МКЭ. В расчетной модели использовалась геометрия, соответствующая напечатанному образцу: прозрачный куб с заданной сферической полостью в центре. Заданные граничные условия соответствовали условиям одноосного сжатия, реализованным в натурном эксперименте. Для описания материала модели использовались усредненные механические параметры фотополимерной смолы, уточненные по данным производителя и по проведенным экспериментам. Расчет проводился в рамках линейной теории упругости, а поля главных напряжений и их разности сравнивались с распределениями, полученными из анализа изохромат.

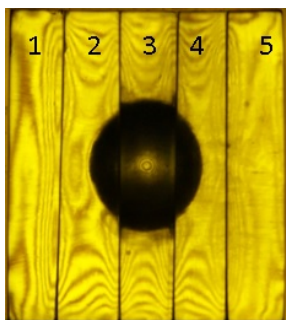


Рис. 7. Нумерация пластинок при просвете на поляризационно-оптической установке ППУ-7

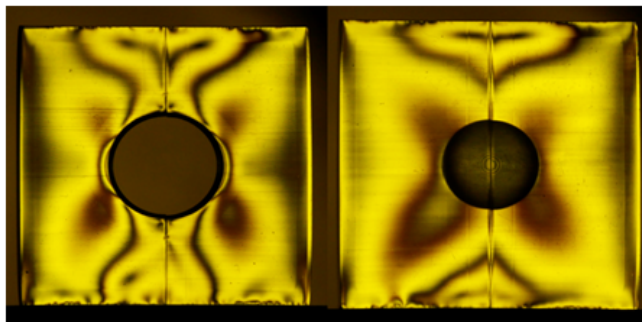


Рис. 8. Интерференционные картины для 3-й и 4-й пластин образца

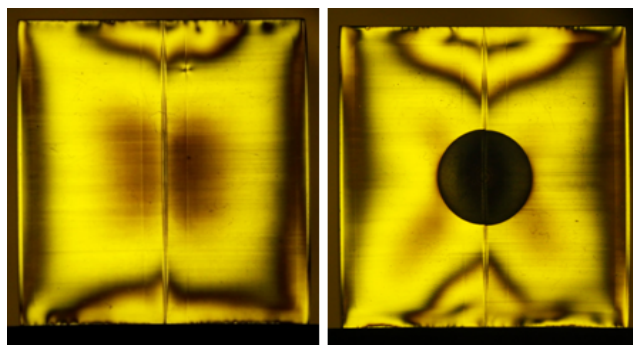


Рис. 9. Интерференционные картины для 1-й и 2-й пластин образца

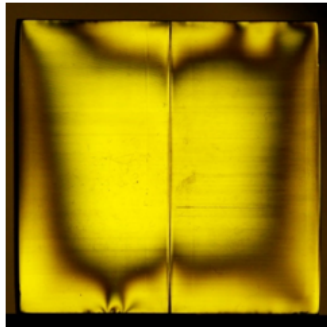


Рис. 10. Интерференционная картина для 5-й пластины образца

На рис. 11 показаны картины изохроматических полос в срединном сечении куба (а) и распределение напряжений по Мизесу в конечно-элементной модели (б). Видно, что линии равных значений интенсивности напряжений в экспериментальном и численном решениях находятся в хорошем соответствии между собой.

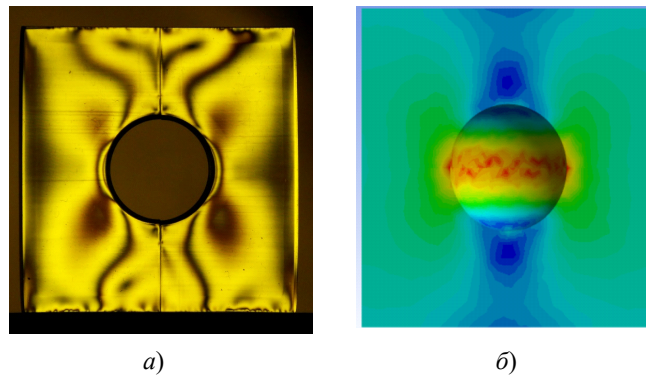


Рис. 11. Поле изохроматических полос в третьей пластине (а) и распределение интенсивности напряжений в пакете ANSYS (б)

На рис. 12 приведены картина изохроматических полос в кубике со сферической полостью (срединное сечение) (а) и результаты цифровой обработки интерференционной картины полос в образце с центральной сферической полостью (б); зеленым цветом показан скелетон изображения (автоматически определенные точки с наименьшей освещенностью, которые далее использовались в расчетах).

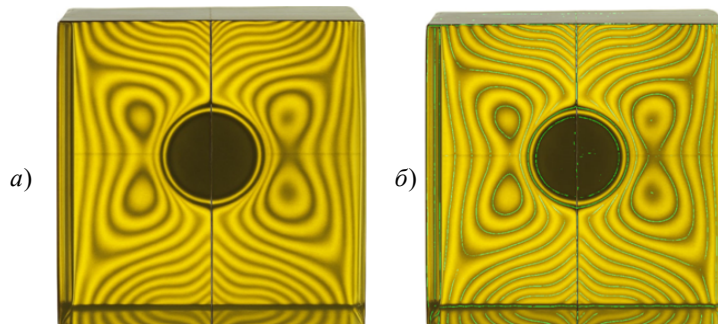


Рис. 12. Картина изохроматических полос (а) и результаты цифровой обработки интерференционной картины (б)

Сравнение экспериментального и численного решений показало близость геометрии и расположений областей с максимальной разностью главных напряжений. Визуально интервалы между изохромами в экспериментальной картине коррелировали с градиентом напряжений в расчетной модели. Это подтвердило не только корректность эксперимента, но и работоспособность подхода, основанного на наблюдении за оптическим откликом тела при одноосном нагружении [5]. Важно отметить, что описанная методика идентификации параметров дефекта – на основе инвариантных интегралов взаимодействующих полей – ранее существовала исключительно как теоретически обоснованный подход и численно реализованный алгоритм в МКЭ-пакетах (в публикациях Р.В. Гольдштейна, Е.И. Шифрина и П.С. Шушпанникова [3–7]). В настоящей статье методика впервые получила экспериментальное подтверждение на физической модели, что указывает на экспериментальную применимость методики при идентификации скрытой полости или включения и существенно расширяет возможности ее практического применения в инженерной диагностике.

Заключение

С применением 3D-печати были изготовлены прозрачные фотоупругие модели, на основе явления двойного лучепреломления построены поля напряжений методом «замораживания» напряжений, предложена и апробирована методика экспериментального решения обратных геометрических задач – задач идентификации внутренних дефектов по данным механических испытаний.

В настоящем исследовании: 1) разработана методика изготовления образцов из оптически чувствительных материалов с помощью 3D-аддитивных технологий; 2) подготовлены образцы кубической формы со сферической полостью для решения задачи идентификации внутренних дефектов в образце; 3) проведена большая серия экспериментов на одноосное сжатие образцов со сферической полостью для определения напряженного состояния в образце с помощью интерференционно-оптических методов механики (метода фотоупругости); 4) получена картина изохроматических полос в плоских пластинах после разрезания образца кубической формы со сферической полостью; 5) реализована технология метода «замораживания» напряжений на образцах, изготовленных с помощью 3D-печати, позволяющая определить напряжения внутри пространственного образца путем нахождения напряжений в плоских сечениях кубического образца со сферической полостью после разрезания его на плоские пластины; 6) показано, что с помощью образцов, изготовленных посредством 3D-печати, можно получить экспериментальные картины интерференционных полос хорошего качества; 7) развит экспериментальный метод количественной оценки изменения напряжений в трехмерных телах по всей глубине образца с помощью технологии 3D-печати, методов «замороженных» напряжений и фотоупругих испытаний; 8) показано, что метод фотоупругости, позволяющий найти напряженное состояние в образце, может быть дополнен измерениями полей перемещений и деформаций на поверхности образца с помощью метода корреляций цифровых изображений.

Подход представляет собой перспективный метод неразрушающего контроля, сочетающий физический эксперимент, цифровую визуализацию и численный анализ. Он может быть применен для диагностики внутренних дефектов, а в дальнейшем адаптирован для применения в инженерной практике при анализе сложных конструкций.

Список литературы

1. Cui C., Wang Q., Ma W. Mechanical properties and crack evolution of rock-like specimens with random spherical defects under uniaxial compression. *Engineering Failure Analysis*. 2025. Vol. 180. Article No 109857. <https://doi.org/10.1016/j.engfailanal.2025.109857>.
2. Zhou Y., Shi X., Zhang Y. Defects and its inverse problems in 1D and 2D materials. *Materials Science and Engineering: B*. 2024. Vol. 307. Article No 117516. <https://doi.org/10.1016/j.mseb.2024.117516>.
3. Шушпанников П.С. Метод идентификации дефектов в линейно упругих телах по данным статических испытаний. *Дисс. канд. физ.-мат. наук*. Специальность 01.02.04 «Механика деформируемого твердого тела». Москва, ИПМ им. А.Ю. Ишлинского РАН. 2012. 192 с.
4. Капцов А.В., Шифрин Е.И., Шушпанников П.С. Определение параметров плоской эллиптической трещины в изотропном линейно упругом теле по результатам одного испытания на одноосное растяжение. *Изв. РАН. МТТ*. 2012. № 4. С. 71–88.
5. Goldstein R.V., Shifrin E.I., Shushpannikov P.S. Application of invariant integrals to elastostatic inverse problems. *Comptes Rendus Mécanique*. 2008. Vol. 336. No 1-2. P. 108–117. DOI: 10.1016/j.crme.2007.11.002.
6. Goldstein R.V., Shifrin E.I., Shushpannikov P.S. Application of invariant integrals to the problems of defect identification. *International Journal of Fracture*. 2007. Vol. 147. No 1–4. P. 45–54. DOI: 10.1007/s10704-007-9125-y.
7. Ustinov K.B., Shushpannikov P.S. Stress concentrations caused by ellipsoidal inclusions; asymptotics and ranges of applicability. *12th International Conference on Fracture 2009, ICF-12*. Ottawa, ON, 12–17 July. 2009. Vol. 8. P. 6043–6052.
8. Анисимов Г.С., Степанова Л.В. Экспериментальное определение полей у вершины трещины: метод голографической интерферометрии и метод корреляции цифровых изображений. *Вестник ПНИПУ. Механика*. 2024. №3. С. 39–56. DOI: 10.15593/perm.mech/2024.3.03.
9. Степанова Л.В., Семенов Д.А., Анисимов Г.С. Применение метода голографической интерферометрии для реконструкции ряда М. Уильямса поля напряжений у вершины трещины. *Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия*. 2023. Т. 29. №1. С. 15–46. DOI: 10.18287/2541-7525-2023-29-1-15-46.
10. Лихачев А.В., Табанюхова М.В. Новый алгоритм обработки данных метода фотоупругости. *Вестник ТГУ. Математика и механика*. 2022. № 79. С. 100–110. DOI: 10.17223/19988621/79/9.
11. Ju Y., Xing D., Wang S., Ren Z., Wan C. Visualizing the full-field stress and plastic zones in arch tunnel surrounding rocks embedded with roadway-scale discontinuities using 3D printed transparent models and stress freezing techniques. *Tunnelling and Underground Space Technology*. 2025. Vol. 163. Article No 106772. <https://doi.org/10.1016/j.tust.2025.106772>.
12. Kosygin A.N., Kosygina L.N., Usacheva V.N. One example of image digital processing of experimental data obtained by the method of photoelasticity. *Journal of Physics: Conference Series: Applied Mathematics, Computational Science and Mechanics: Current Problems*. Voronezh, 11–13 Nov. 2019. Bristol, UK: Institute of Physics Publishing, 2020. Article No 012144. DOI: 10.1088/1742-6596/1479/1/012144.
13. Степанова Л.В. *Цифровая фотоупругость и ее применение для задач механики разрушения*. Самара: Самарский ун-т, 2021. 68 с.
14. Yang Ju, Zhangyu Ren, Xuan Hu, Yingdong Zhang, Huimin Xie, Fu-pen Chiang. Critical phase-transition temperature for freezing stress in thermo-sensitive photopolymers used for visualizing stress fields in solids. *Optics and Lasers in Engineering*. 2021. Vol. 139. Article No 106458. <https://doi.org/10.1016/j.optlaseng.2020.106458>.
15. Ju Y., Song J., Wan C., Liu P., Tian Y. Quantitative visualization of 3D stress field evolution during hydraulic fracturing in reservoir rocks using 3D-printed models and digital photoelasticity techniques. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*. 2025. Vol. 139. Pt. A. Article No 105071. <https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2025.105071>.
16. Ju Y., Guo W., Ren Z., Zheng J., Mao L., Hu X., Liu P. Experimental study on mechanical

and optical properties of printable photopolymer used for visualising hidden structures and stresses in rocks. *Optical Materials*. 2021. Vol. 111. Article No 110691. <https://doi.org/10.1016/j.optmat.2020.110691>.

17. Ju Y., Xing D., Ren Z., Wang S., Wang K. Optical quantification and characterization of 3D stress fields and plastic zones around arch tunnel models using stress freezing and 3D printing techniques. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*. 2025. Vol. 189. Article No 106088. <https://doi.org/10.1016/j.ijrmms.2025.106088>.

18. Shins K., Ramesh K. Numerical and photoelastic investigation of the effect of material cracks on interfacial cracks. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*. 2025. Vol. 138. Article No 104980. <https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2025.104980>.

19. Anand C., Ramesh K., Natarajan S. Photoelastic verification of certain recommendations for numerical modelling of fracture using the phase field method. *Optics and Lasers in Engineering*. 2024. Vol. 180. Article No 108319. <https://doi.org/10.1016/j.optlaseng.2024.108319>.

20. Anand C., Natarajan S., Ramesh K. Simulating isochromatic fringes from finite element results of FEniCS. *Experimental Techniques*. 2024. Vol. 48. P. 171–175. <https://doi.org/10.1007/s40799-023-00639-z>.

21. Vivekanandan A., Ramesh K. Photoelastic analysis of crack terminating at an arbitrary angle to the bimaterial interface under four point bending. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*. 2023. Vol. 127. Article No 104075. <https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2023.104075>.

22. Гужов В.И., Поздняков В.И., Серебрякова Е.Е. Получение разности фазовых полей при использовании метода пошагового фазового сдвига. *Научный вестник НГТУ*. 2019. Т. 74. №1. С. 157–166. DOI 10.17212/1814-1196-2019-1-157-166.

23. Гужов В.И., Ильиных С.П. *Оптические измерения. Компьютерная интерферометрия*. М.: Изд-во Юрайт, 2025. 258 с.

24. Ju Y., Xing D., Ren Z., Mao L., Wan C., Wang K. Experimental characterization of full-field stress, plastic zones, and failure mechanisms of subsurface tunnels using 3D printed transparent models. *Engineering Failure Analysis*. 2025. Vol. 181. Article No 109979. <https://doi.org/10.1016/j.engfailanal.2025.109979>.

25. Guo W., Ju Y., Chen C., Zhang Y., Fu G. Quantification of the stress field associated with mixed-mode I/II crack initiation considering the pre-existing weak interlayers: A photoelastic experimental study using 3D printed transparent models. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*. 2025. Vol. 138. Article No 104926. <https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2025.104926>.

References

1. Cui C., Wang Q., Ma W. Mechanical properties and crack evolution of rock-like specimens with random spherical defects under uniaxial compression. *Engineering Failure Analysis*. 2025. Vol. 180. Article No 109857. <https://doi.org/10.1016/j.engfailanal.2025.109857>.

2. Zhou Y., Shi X., Zhang Y. Defects and its inverse problems in 1D and 2D materials. *Mater. Sci. Eng., B*. 2024. Vol. 307. Article No 117516. <https://doi.org/10.1016/j.mseb.2024.117516>.

3. Shushpannikov P.S. Metod identifikatsii defektov v lineyno uprugikh telakh po dannym staticheskikh ispytaniy [Method of identifying defects in linearly elastic bodies according to static test data]. *Diss. kand. fiz.-mat. nauk [Cand. Sci. (Engineering). Dissertation]*. Specialty 01.0.2.04 “Mechanics of deformable solids”. Moscow, IPM n.a. A.Yu. Ishlinskogo RAN. 2012. 192 p. (In Russian).

4. Kaptsov A.V., Shifrin E.I., Shushpannikov P.S. Identification of parameters of a plane elliptic crack in an isotropic linearly elastic body from the results of a single uniaxial tension test. *Mechanics of Solids*. 2012. Vol. 47. No 4. P. 433–447.

5. Goldstein R.V., Shifrin E.I., Shushpannikov P.S. Application of invariant integrals to elastostatic inverse problems. *Comptes Rendus Mécanique*. 2008. Vol. 336. No 1-2. P. 108–117. DOI: 10.1016/j.crme.2007.11.002.

6. Goldstein R.V., Shifrin E.I., Shushpannikov P.S. Application of invariant integrals to the problems of defect identification. *Int. J. Fract.* 2007. Vol. 147. No 1–4. P. 45–54. DOI: 10.1007/s10704-007-9125-y.

7. Ustinov K.B., Shushpannikov P.S. Stress concentrations caused by ellipsoidal inclusions;

asymptotics and ranges of applicability. *12th International Conference on Fracture 2009, ICF-12*. Ottawa, ON. 12–17 July 2009. Vol. 8. P. 6043–6052.

8. Anisimov G.S., Stepanova L.V. Eksperimentalnoe opredelenie poley u vershiny treshchiny: metod golograficheskoy interferometrii i metod korrelyatsii tsifrovyykh izobrazheniy [Experimental determination of crack-tip fields holographic interferometry method and digital image correlation method]. *Vestnik Permskogo natsionalnogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mekhanika [PNRPU Mechanics Bulletin]*. 2024. No 3. P. 39–56. DOI: 10.15593/perm.mech/2024.3.03 (In Russian).

9. Stepanova L.V., Semenov D.A., Anisimov G.S. Primenenie metoda golograficheskoy interferometrii dlya rekonstruktsii ryada M. Uilyamsa polya napryazheniy u vershiny treshchiny [Application of holography method for the restoration of the Williams series near the crack tip]. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya [Vestnik of Samara University. Natural Science Series]*. 2023. Vol. 29. No 1. P. 15–46 (In Russian).

10. Likhachev A.V., Tabanyukhova M.V. Novyy algoritm obrabotki dannykh metoda fotouprugosti [A new processing algorithm for photoelasticity method data]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]*. 2022. No 79. P. 100–110 (In Russian).

11. Ju Y., Xing D., Wang S., Ren Z., Wan C. Visualizing the full-field stress and plastic zones in arch tunnel surrounding rocks embedded with roadway-scale discontinuities using 3D printed transparent models and stress freezing techniques. *Tunnelling and Underground Space Technology*. 2025. Vol. 163. Article No 106772. <https://doi.org/10.1016/j.tust.2025.106772>.

12. Kosygin A.N., Kosygina L.N., Usacheva V.N. One example of image digital processing of experimental data obtained by the method of photoelasticity. *Journal of Physics: Conference Series: Applied Mathematics, Computational Science and Mechanics: Current Problems*. Voronezh, 11–13 Nov. 2019. Bristol, UK. Institute of Physics Publishing. 2020. Article No 012144. DOI: 10.1088/1742-6596/1479/1/012144.

13. Stepanova L.V. *Tsifrovaya fotouprugost i ee primeneniye dlya zadach mekhaniki razrusheniya [Digital Photoelasticity and its Applications to Fracture Mechanics Problems]*. Samara. Samara university Publ. 2021. 68 p. (In Russian).

14. Yang Ju, Zhangyu Ren, Xuan Hu, Yingdong Zhang, Huimin Xie, Fu-pen Chiang, Critical phase-transition temperature for freezing stress in thermo-sensitive photopolymers used for visualizing stress fields in solids. *Optics and Lasers in Engineering*. 2021. Vol. 139. Article No 106458. <https://doi.org/10.1016/j.optlaseng.2020.106458>.

15. Ju Y., Song J., Wan C., Liu P., Tian Y. Quantitative visualization of 3D stress field evolution during hydraulic fracturing in reservoir rocks using 3D-printed models and digital photoelasticity techniques. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*. 2025. Vol. 139. Pt. A. Article No 105071. <https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2025.105071>.

16. Ju Y., Guo W., Ren Z., Zheng J., Mao L., Hu X., Liu P. Experimental study on mechanical and optical properties of printable photopolymer used for visualising hidden structures and stresses in rocks. *Opt. Mater.* 2021. Vol. 111. Article No 110691. <https://doi.org/10.1016/j.optmat.2020.110691>.

17. Ju Y., Xing D., Ren Z., Wang S., Wang K. Optical quantification and characterization of 3D stress fields and plastic zones around arch tunnel models using stress freezing and 3D printing techniques. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*. 2025. Vol. 189. Article No 106088. <https://doi.org/10.1016/j.ijrmms.2025.106088>.

18. Shins K., Ramesh K. Numerical and photoelastic investigation of the effect of material cracks on interfacial cracks. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*. 2025. Vol. 138. Article No 104980. <https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2025.104980>.

19. Anand C., Ramesh K., Natarajan S. Photoelastic verification of certain recommendations for numerical modelling of fracture using the phase field method. *Opt. Lasers Eng.* 2024. Vol. 180. Article No 108319. <https://doi.org/10.1016/j.optlaseng.2024.108319>.

20. Anand C., Natarajan S., Ramesh K. Simulating isochromatic fringes from finite element results of FEniCS. *Experimental Techniques*. 2024. Vol. 48. P. 171–175. <https://doi.org/10.1007/s40799-023-00639-z>.

21. Vivekanandan A., Ramesh K. Photoelastic analysis of crack terminating at an arbitrary

angle to the bimaterial interface under four point bending. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*. 2023. Vol. 127. Article No 104075. <https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2023.104075>.

22. Guzhov V.I., Pozdnyakov V.I., Serebryakova E.E. Poluchenie raznosti fazovykh poley pri ispolzovanii metoda poshagovogo fazovogo sdviga [Obtaining phase difference by using the step-by-step phase shift method]. *Nauchnyy vestnik Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta [Science Bulletin of the NSTU]*. 2019. Vol 74. No 1. P. 157–166 (In Russian).

23. Guzhov V.I., Ilinykh S.P. *Opticheskie izmereniya. Kompyuternaya interferometriya [Optical Measurements. Computer Interferometry]*. Moscow. Yurayt Publ. 2025. 258 p. (In Russian).

24. Ju Y., Xing D., Ren Z., Mao L., Wan C., Wang K. Experimental characterization of full-field stress, plastic zones, and failure mechanisms of subsurface tunnels using 3D printed transparent models. *Eng. Fail. Anal.* 2025. Vol. 181. Article No 109979. <https://doi.org/10.1016/j.engfailanal.2025.109979>.

25. Guo W., Ju Y., Chen C., Zhang Y., Fu G. Quantification of the stress field associated with mixed-mode I/II crack initiation considering the pre-existing weak interlayers: A photoelastic experimental study using 3D printed transparent models. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*. 2025. Vol. 138. Article No 104926. <https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2025.104926>.

EXPERIMENTAL DETERMINATION OF SPHERICAL CAVITY PARAMETERS IN SAMPLES PRODUCED USING ADDITIVE TECHNOLOGIES AND RESTORATION OF THE STRESS FIELD BY A “FREEZING” METHOD*

Stepanova L.V., Lyubimov E.A.

*Samara National Research University named after Academician S.P. Korolev,
Samara, Russian Federation*

stepanova.lv@ssau.ru, lyubimov.sa@ssau.ru

Received by the Editor 2025/09/16

An experimental substantiation of the possibility of determining the parameters of a spherical cavity or inclusion based on the data of uniaxial compression (or tension) tests of samples is presented. For experimental identification of spherical cavity parameters based on mechanical compression (tension) tests using additive 3D printing technologies, a series of cubic shaped samples with spherical cavities made of optically active materials (Anycubic ABS-Like PRO 2 Clear) was produced. In a study using models of transparent disks and cubic samples with spherical cavities printed on a 3D printer, the characteristics of double refraction during compression of photopolymers and compression tests in the frozen state at various temperatures and axial loads were investigated. Interference patterns (maps of isochromatic lines using the digital photoelasticity method) on the sample surface and the distribution of displacement fields (using the digital image correlation method) were obtained. Based on experimentally found stress and displacement fields on the sample surface, the coordinates of the center of a spherical cavity and its radius are determined by calculating the values of the reciprocity functional and invariant interaction integrals found from experimental fields. To implement the method of “freezing” stresses and fixing stressed areas on the printed model, a polaroscopic system combined with a high-temperature loading chamber has been developed. After testing, the spatial sample is cut into plates, which give interference patterns of the difference in the main stresses in the inner sections of the sample: patterns of isochromatic bands in flat plates obtained by cutting a cubic sample with a spherical cavity are found, which makes it possible

* The research was supported by Russian Science Foundation (grant No 25-21-00272).

to estimate the parameters of the stress-strain state inside the sample with a stress concentrator. A comparison of experimental fields with finite element solutions was carried out, and the comparison showed good consistency of the results. A comprehensive technique has been developed for the experimental determination of mechanical fields in loaded bodies, followed by the identification of internal defects based on interference-optical measurements, invariant interaction integrals, and numerical estimates for the identification of hidden inclusions.

Keywords: non-destructive testing problem, additive technologies, 3D printing, invariant integrals of mechanics, digital photoelasticity method, stress freezing method, geometric inverse problem.