

УДК 539.3; 620.17

DOI: 10.32326/1814-9146-2026-88-1-20-30

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ УПРУГИХ МОДУЛЕЙ  
ПОЛИМЕРНЫХ МАТЕРИАЛОВ  
ПО МЕДЛЕННОСТЯМ БЕГУЩИХ ВОЛН  
В ОБРАЗЦАХ, ИЗГОТОВЛЕННЫХ МЕТОДОМ  
ПОСЛОЙНОГО НАПЛАВЛЕНИЯ\***

© 2026 г. **Голуб М.В.<sup>1</sup>, Арсенов М.А.<sup>1</sup>, Канищев К.К.<sup>1</sup>,  
Еремин А.А.<sup>1</sup>, Шилько С.В.<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>*Кубанский государственный университет, Краснодар, Российская Федерация*

<sup>2</sup>*Институт механики металлополимерных систем имени В.А. Белого  
НАН Беларуси, Гомель, Республика Беларусь*

m\_golub@inbox.ru

*Поступила в редакцию 06.10.2025*

Представлена методика определения упругих модулей термопластов на образцах в виде пластин, изготовленных методом послойного наплавления. Предлагаемый подход основан на анализе распространения бегущих упругих волн в образце и статистической обработке результатов решения соответствующей обратной коэффициентной задачи. С помощью лазерной доплеровской виброметрии в прямоугольных пластинах регистрировались скорости вертикальных колебаний точек их поверхности, возбуждаемых пьезоэлектрическим преобразователем, который был прикреплен к поверхности пластин с помощью цианоакрилатного клея. Для определения дисперсионных характеристик волн Лэмба по регистрируемым волновым сигналам применялся метод матричного пучка. Решение обратной задачи по определению значений упругих модулей выполнялось численно методом дифференциальной эволюции. При построении целевой функции использовалось свойство обращения фурье-символа матрицы Грина для однородного упругого слоя в бесконечность в точках, соответствующих измеренным волновым числам. Для повышения эффективности метода процедура выполнялась для нескольких линий, проходящих через центр источника колебаний. Проведен статистический анализ значений упругих модулей, восстановленных с использованием различных линий сканирования, получены оценки упругих характеристик материала и выполнено сравнение с результатами стандартизованных механических испытаний на одноосное растяжение. Таким образом, показана эффективность разработанной методики, которая может быть использована для определения и контроля упругих характеристик тонкостенных полимерных конструкций, изготовленных с использованием аддитивных технологий.

---

\* Выполнено при финансовой поддержке Кубанским научным фондом и ООО «Орто-Маркет» в рамках проекта № НТИП-25.1/8.

*Ключевые слова:* полимерные материалы, аддитивные технологии, упругие модули, бегущие упругие волны, обратная коэффициентная задача, численный анализ.

## **Введение**

Широкое распространение в инженерной практике изделий, изготовленных из полимерных материалов с помощью аддитивных технологий, в том числе методом послойного наплавления (FDM 3D-печать), требует детального теоретического и экспериментального изучения их напряженно-деформированного состояния при различных видах нагружения [1]. К примеру, значительный потенциал аддитивные технологии с использованием полимерных расходных материалов имеют при изготовлении медицинских изделий, включая протезы [2], а также при обратном инжиниринге пластиковых деталей в различных отраслях промышленности. Для прочностных расчетов необходимы как физически адекватные математические модели, описывающие механическое поведение таких изделий, так и экспериментальные данные об упругих свойствах используемых полимерных материалов.

Известно, что модули упругости материалов, получаемые при статическом растяжении образцов, изготовленных послойным наплавлением, могут существенно отличаться от аналогичных упругих параметров, восстановленных посредством стандартизованных неразрушающих испытаний образца по некоторым интегральным характеристикам (например, собственным частотам колебаний) или путем точечного ультразвукового зондирования объемными волнами [3]. В качестве альтернативного способа неразрушающего определения упругих характеристик FDM-изделий, дополняющего стандартные методики и занимающего промежуточное положение между интегральными вибрационными и точечными ультразвуковыми методами, может рассматриваться методика, в которой используются свойства бегущих упругих волн (нормальных мод) [4–7]. Дисперсионные характеристики последних (например, волновые числа или групповые скорости нормальных мод), для экспериментального определения которых достаточно измерить волновые сигналы в ограниченном наборе точек на поверхности образца, зависят не только от частоты колебаний и формы [8, 9], но и от упругих модулей материала [10]. Подтверждена высокая эффективность таких подходов для идентификации упругих характеристик металлов или волоконно-армированных композитных материалов на образцах в виде пластин [4, 6]. В то же время их применение для диагностики упругих свойств конструкций, изготовленных методами аддитивных технологий, в частности, FDM-печати, пока ограничено.

В настоящей статье обсуждается дальнейшее развитие методики определения упругих свойств слоистых материалов по экспериментально измеренным дисперсионным характеристикам бегущих волн [6, 7] и приводятся результаты ее применения для оценки упругих свойств полимерных материалов, используемых в FDM 3D-печати. Для прямоугольных пластин, изготовленных из пластиков PET-G и PLA, были измерены вертикальные скорости перемещений поверхности образца вдоль нескольких линий, проходящих через центр излучателя. Волновые пакеты в образцах возбуждались коротким прямоугольным импульсом, подаваемым на пьезоэлектрический преобразователь. Методом матричного пучка [11, 12] для каждой из выбранных линий сканирования вычислялись дисперсионные характеристики, которые затем использовались при решении обратной задачи двухступенчатым методом [7] с целевой функцией, основанной на использовании фурье-символа матрицы Грина для

рассматриваемого упругого волновода [4, 13]. Значения упругих модулей, найденные таким образом на основе бегущих упругих волн, сравнивались с результатами стандартизованных испытаний на одноосное растяжение.

## 1. Схема проведения экспериментальных исследований

На первом этапе из пластиков PET-G и PLA методом FDM-печати на двухэкструдерном принтере Raise3D E2 были изготовлены два образца в виде прямоугольных пластин размером  $150 \times 40 \times 3,2$  мм. В процессе печати устанавливались четыре направления заполнения:  $0, 90, 45$  и  $135^\circ$ . Печать осуществлялась на поверхности термостатированного стекла, нагретого до  $80^\circ\text{C}$  для PLA и до  $110^\circ\text{C}$  для PET-G. Диаметр используемого сопла  $0,4$  мм, а высота печатного слоя  $0,2$  мм, при этом сопло во время 3D-печати было нагрето до  $220^\circ\text{C}$  для PLA и до  $250^\circ\text{C}$  для PET-G.

Источником бегущих упругих волн в каждом из образцов служил квадратный пьезокерамический элемент со стороной  $10$  мм и толщиной  $0,4$  мм, который был прикреплен к поверхности пластин с помощью цианоакрилатного клея. Для возбуждения колебаний от генератора сигналов произвольной формы OWON XDG2030 на пьезоактуатор подавались электрические тональные посылки в форме прямоугольного импульса шириной  $2$  мкс, что обеспечивало достаточный частотный диапазон для последующего анализа.

Для удобства вводилась декартова система координат  $\mathbf{x} = \{x, y, z\}$ , оси которой параллельны сторонам пластины, а начало координат совпадает с центром пьезоэлектрического преобразователя (рис. 1).

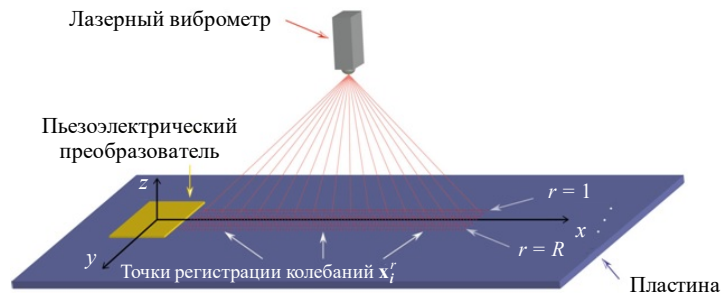


Рис. 1. Общая схема проведения эксперимента

Измерения вертикальных скоростей  $w_i^r(t_k)$  в моменты времени  $t_k$  выполнялись бесконтактным способом сканирующим лазерным доплеровским виброметром (усреднение по  $1500$  измерениям) в точках  $\mathbf{x}_i^r = \{x_i, y_r, 0\}, i = 1, 2, \dots, N, r = 1, 2, \dots, R$ , формирующих двумерный массив с равномерным шагом вдоль осей  $Ox$  и  $Oy$ . При этом не использовались светоотражающие покрытия, которые в дальнейшем могли бы исказить результаты восстановления упругих характеристик [14].

## 2. Обработка экспериментальных данных и решение обратной задачи

Для каждого одномерного массива точек  $\mathbf{x}^r$ , соответствующего в двумерном массиве точкам отрезка с номером  $r = 1, 2, \dots, R$ , параллельного оси  $Ox$ , методом матричного пучка [11, 12] выполняется демодуляция массива сигналов  $w_i^r(t_k)$  для каждой из  $M$  различных частот  $f_m (m = 1, 2, \dots, M)$  и определяются  $N_m$  медленнос-

тей бегущих упругих волн  $s_{mn}^r$ , присутствующих в волновых пакетах, возбуждаемых пьезоэлектрическим актуатором и распространяющихся вдоль оси  $Ox$ .

Задача определения соответствующего  $r$ -й линии сканирования конечномерного вектора  $\theta^r$ , составленного из упругих модулей материала (учитывая характер чередования направлений заполнения в процессе 3D-печати образцов, их упругие свойства предполагаются изотропными и описываются модулем Юнга  $E$  и коэффициентом Пуассона  $\nu$ ) и его плотности (при необходимости), решается с использованием найденных экспериментальных значений  $s_{mn}^r$  путем сведения к задаче оптимизации вида

$$\hat{\theta}^r = \arg \min_{\theta} g(\theta, s_{mn}^r). \quad (1)$$

Аналогично [4], при составлении функционала

$$g(\theta, s_{mn}^r) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^{N_m} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 |K_{ij}^{-1}(s_{mn}^r, f_m, \theta)|$$

используется фурье-образ матрицы Грина  $K_{ij}(s, f, \theta)$  для свободного изотропного упругого волновода со свойствами, задаваемыми компонентами вектора  $\theta$  [15, 16], на частоте  $f_m$  для медленности  $s$ . Для численного решения задачи оптимизации (1) используется метод дифференциальной эволюции, относящийся к классу стохастических алгоритмов [17].

### 3. Статистический анализ

Для получения оценки упругих модулей  $\hat{\theta}^r$  на основе данных о распространении упругих бегущих волн вдоль каждого луча  $\mathbf{x}^r$  используется массив начальных приближений таким образом, что для каждого значения компоненты вектора  $\theta$  учитывается набор равномерно расположенных точек в пределах интервала его возможного изменения. Численное решение задачи оптимизации для каждого заданного значения  $r$  при  $L = 100$  начальных приближений  $\tilde{\theta}_l^r$  дает  $L$  векторов  $\theta_l^r$  ( $l = 1, 2, \dots, L$ ). С использованием оценки центра группирования выборки из оценок  $\theta_l^r$  (моды или медианы) определяется вектор, содержащий результирующие оценки упругих модулей как компоненты вектора  $\hat{\theta}^r$  для линии с номером  $r$ .

Значения  $\hat{\theta}^r$  описывают «локальные» характеристики экспериментальных образцов, то есть усредненные значения упругих модулей вдоль соответствующих линий. Интегральные значения упругих модулей всей пластины могут быть вычислены усреднением значений по выборке, включающей в себя все значения  $\theta_l^r$ , либо на основе оценок выборок  $\hat{\theta}^r$  по каждой из компонент вектора. Для выбора оптимальной стратегии проводится соответствующий численный анализ.

На каждой из линий сканирования для каждого из  $L = 100$  начальных значений было получено множество оценок для искомым упругих параметров (модуля Юнга и коэффициента Пуассона). На рис. 2 приведены диаграммы размаха (box-plot), которые компактно изображают основные характеристики одномерных распределений для полученных оценок для каждого из упругих параметров. На этих графиках отображены шесть ключевых статистических показателей для всей выборки  $\{\hat{\theta}_l^r\}_{l=1}^R$  и для каждой из семи выборок  $\{\hat{\theta}_l^r\}$  ( $r = \overline{1, 7}$ ): минимальное значение (нижний «ус»), первый квартиль (нижняя граница прямоугольника), медиана (линия внутри), третий

квартиль (верхняя граница прямоугольника), максимальное значение (верхний «ус») и среднее значение (крестики).

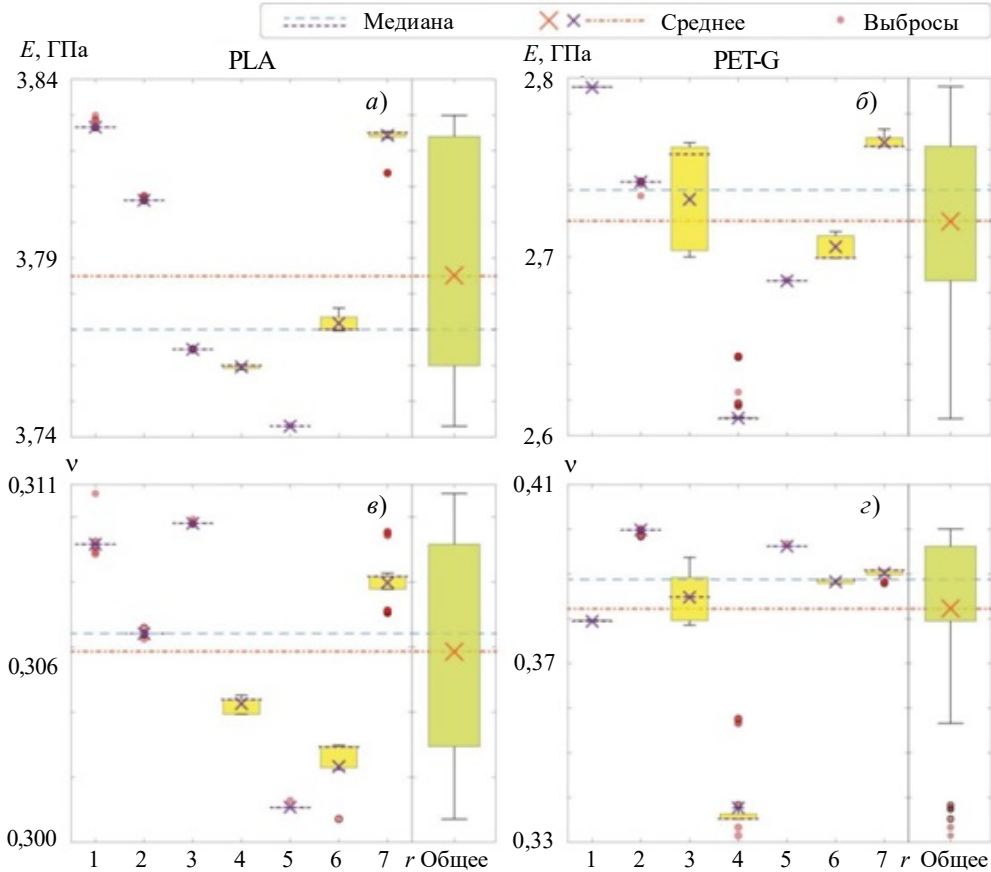


Рис. 2. Статистические показатели для выборок оценок  $\hat{\theta}_i^r$  при численном решении обратной задачи для пластиков PLA (а, в) и PET-G (б, з)

Анализ результатов показывает, что для обоих образцов, изготовленных из пластиков PET-G и PLA, ширина диапазона, содержащего все получаемые оценки модуля Юнга, не превосходит 0,2 ГПа (см. рис. 2а, б), что можно считать показателем достаточно высокой точности метода. Аналогичный диапазон для коэффициента Пуассона в случае PLA составляет 0,01 (см. рис. 2в), в то время как для пластины из PET-G (см. рис. 2з) явно выделяются результаты для четвертой линии, которые, по-видимому, могут быть отнесены к выбросам. Сравнительный анализ экспериментальных дисперсионных кривых с теоретическими, рассчитанными в предположении, что  $\theta$  равен оценочным значениям  $\hat{\theta}$ , показывает их хорошую корреляцию с экспериментально полученными медленностями даже при высокой степени зашумленности, наблюдаемой при исследовании материала PET-G.

#### 4. Определение упругих модулей

По диаграммам размаха (см. рис. 2) можно видеть, что оценки для каждой из линий сканирования лежат в очень узких диапазонах, что говорит о точности

«локальных» оценок упругих свойств. Для интегральной оценки упругих модулей материала всей пластины были выбраны две характеристики – среднее значение и медиана по обобщенной выборке, включающей в себя данные по всем линиям сканирования. В случае PLA-пластика среднее и медиана для коэффициента Пуассона (см. рис. 2б) практически совпадают, а для модуля Юнга (см. рис. 2а) медиана дает более низкое и более корректное значение, смещенное к оценкам, полученным по большему числу линий сканирования. Преимущество интегральной оценки по медиане также видно для материала PET-G, поскольку эта оценка менее чувствительна к ошибочным оценкам вдоль четвертой линии.

Получение интегральной оценки путем обобщения локальных оценок может служить предметом отдельного исследования, поскольку последние обладают собственной ценностью, указывающей на неоднородность материала и нарушения режима его аддитивного изготовления. Тем не менее, при достаточной однородности тестируемых образцов предпочтительной интегральной оценкой упругих модулей является значение медианы, определенное по всем расчетным данным. Для получения наилучшей оценки оптимальным решением видится использование многомерной медианы [18], алгоритм оценки которой основан на последовательном удалении выпуклых многоугольников из множества точек. Соответствующие результаты проиллюстрированы на рис. 3, где также приведены оценки плотности ядра распределения как для всей выборки  $\{\hat{\theta}_i^r\}_{r=1}^R$ , так и для каждой из  $R = 7$  выборок  $\{\hat{\theta}_i^r\}$  ( $r = 1, 2, \dots, R$ ). В результате были получены треугольные области (медианные области), внутри которых находятся оптимальные медианные значения.

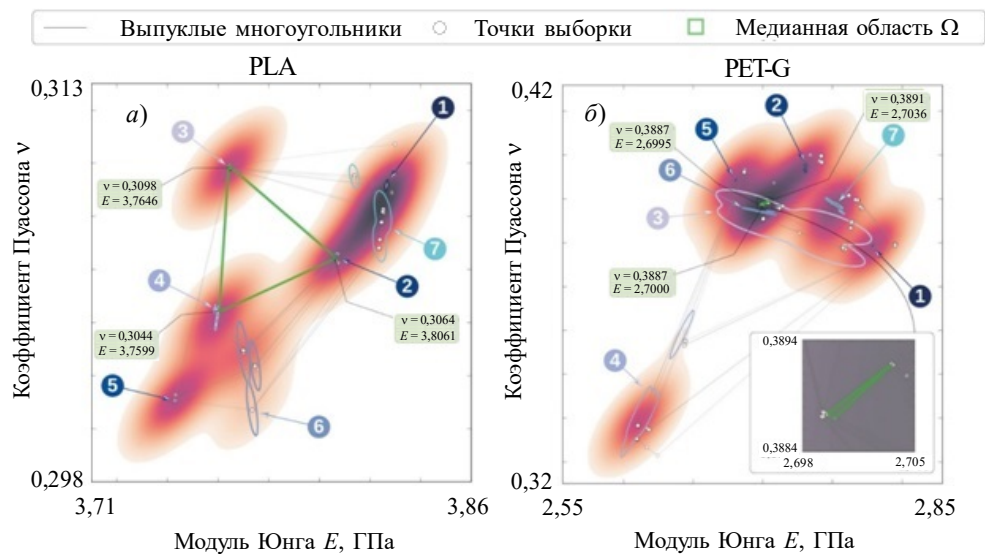


Рис. 3. Распределение оценок  $\hat{\theta}_i^r$ , оценка плотности ядра, медианная область и соответствующие выпуклые многоугольники для пластиков PLA (а) и PET-G (б)

В таблице 1 представлены значения модуля упругости материалов, полученные при статических механических испытаниях на растяжение с помощью экстензометра ( $E_e$ ) и рассчитанные в программном обеспечении Merlin машины Инстрон 5567 по перемещениям подвижной траверсы на начальном участке диаграммы деформирования ( $E_m$ ). Как и ожидалось, измерения по перемещениям подвижной траверсы

дают заниженные значения модуля упругости исследованных пластиков и величина этой погрешности растет с увеличением модуля упругости. Тем не менее, расхождение между оценками этой упругой характеристики, полученными предлагаемым методом ( $E$ ) и методом одноосного статического растяжения ( $E_e$ ), не превышает 0,5 ГПа. Более заметным является отклонение статического и динамического значений коэффициента Пуассона  $\nu$ , что в определенной мере объясняется технологической анизотропией материала образцов, получаемых методом FDM-печати. При этом каждый формируемый слой является системой закрытопористых ячеек [19], для которой характерен пониженный коэффициент Пуассона в плоскости измерения.

Таблица 1

**Сопоставление значений упругих характеристик для исследуемых образцов из пластиков PET-G и PLA**

Вид пластика	Предлагаемый метод	Метод одноосного статического растяжения			Предлагаемый метод
	Модуль Юнга $E$ , ГПа	Модуль Юнга $E_e$ , ГПа	Модуль Юнга $E_m$ , ГПа	Коэффициент Пуассона $\nu$	
PET-G	2,720	2,254	1,659	0,20	0,3823
PLA	3,775	3,444	2,254	0,18	0,3068

### Заключение

Приведенные результаты указывают, что оптимальной стратегией определения значения каждого из упругих модулей исследованных полимерных материалов представляется использование медианных значений по всей выборке, включающей в себя оценки для всех линий. Это позволяет нивелировать влияние небольшого количества ошибочных результатов, обусловленных локальными поверхностными и внутренними дефектами пластин, а также погрешностью измерений. При большой дисперсии оценок для различных линий сканирования можно предполагать наличие множественных локальных неоднородностей различного происхождения и, следовательно, применение этого метода, скорее всего, приведет к существенной ошибке в оценке упругих модулей. Предложенный подход может быть адаптирован и использован для исследования упругих свойств отдельных разнородных слоев тонкостенных композитов. Представляет интерес применение метода для контроля качества адгезионных соединений и структурного анализа композиционных материалов, включая исследования когезионной прочности, разрушения и залечивания дефектов (несплошностей) материала, к которым чувствительны упругие волны [20, 21].

### Список литературы

1. Varsavas S.D., Michalec P., Arbeiter F. A comprehensive study on thermoplastic elastomers for additive manufacturing of leg prosthesis. *Next Materials*. 2025. Vol. 8. Article No 100700. <https://doi.org/10.1016/j.nxmte.2025.100700>.
2. Almonte A.J., Cansaya C.E., Flores E.V., Silva Y.L., Medina N.O., Corrales P.A. Implementation and evaluation of a low-cost prototype fixed suspension foot prosthesis built in additive printing. *International Journal of Mechanical Engineering and Robotics Research*. 2025. Vol. 14. Iss. 1. P. 39–47. <https://doi.org/10.18178/ijmer.14.1.39-47>.
3. Pszczółkowski B., Nowak K.W., Rejmer W., Bramowicz M., Dzadz L., Galecki R. A comparative analysis of selected methods for determining Young's modulus in polylactic acid samples manufactured with the FDM method. *Materials*. 2021. Vol. 15. Iss. 1. P. 149–1 – 149–11. <https://doi.org/10.3390/ma15010149>.

4. Lu L., Charron E., Glushkov E., Glushkova N., Bonello B., Julien F.H., Gogneau N., Tchernycheva M., Boyko O. Probing elastic properties of nanowire-based structures. *Applied Physics Letters*. 2018. Vol. 113. Iss. 16. Article No 161903. <https://doi.org/10.1063/1.5045665>.
5. Delory A., Lemoult F., Eddi A., Prada C. Guided elastic waves in a highly-stretched soft plate. *Extreme Mechanics Letters*. 2023. Vol. 61. Article No 102018. <https://doi.org/10.1016/j.eml.2023.102018>.
6. Eremin A.A., Glushkov E.V., Glushkova N.V., Lammering R. Evaluation of effective elastic properties of layered composite fiber-reinforced plastic plates by piezoelectrically induced guided waves and laser Doppler vibrometry. *Composite Structures*. 2015. Vol. 125. P. 449–458. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.02.029>.
7. Golub M.V., Doroshenko O.V., Arsenov M.A., Eremin A.A., Gu Y., Bareiko I.A. Improved unsupervised learning method for material-properties identification based on mode separation of ultrasonic guided waves. *Computation*. 2022. Vol. 10. Iss. 6. P. 93-1 – 93-15. <https://doi.org/10.3390/computation10060093>.
8. Su Z., Ye L. Lamb wave-based quantitative identification of delamination in CF/EP composite structures using artificial neural algorithm. *Composite Structures*. 2004. Vol. 66. Iss. 1–4. P. 627–637. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2004.05.011>.
9. Wilde M.V., Golub M.V., Eremin A.A. Experimental observation of theoretically predicted spectrum of edge waves in a thick elastic plate with facets. *Ultrasonics*. 2019. Vol. 98. P. 88–93. <https://doi.org/10.1016/j.ultras.2019.05.009>.
10. Burger R., Heilig M., Grosse C.U., Wu D. Material parameter inversion using cross-entropy optimization based on Lamb wave dispersion spectra. *NDT & E International*. 2025. Vol. 153. Article No 103345. <https://doi.org/10.1016/j.ndteint.2025.103345>.
11. Hua Y., Sarkar T. Matrix pencil method for estimating parameters of exponentially damped/undamped sinusoids in noise. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*. 1990. Vol. 38. Iss. 5. P. 814–824. <https://doi.org/10.1109/29.56027>.
12. Schöpfer F., Binder F., Wöstehoff A., Schuster T., von Ende S., Föll S., Lammering R. Accurate determination of dispersion curves of guided waves in plates by applying the matrix pencil method to laser vibrometer measurement data. *CEAS Aeronautical Journal*. 2013. Vol. 4. Iss. 1. P. 61–68. <https://doi.org/10.1007/s13272-012-0055-7>.
13. Арсёнов М.А., Голуб М.В., Дорошенко О.В., Ерёмин А.А., Глушков Е.В., Глушкова Н.В. Программный комплекс SIMPLE для определения упругих свойств материалов в ламинатах с помощью бегущих волн. *Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование»*. 2025. Т. 18. №2. С. 66–78. <https://doi.org/10.14529/mmp250206>.
14. Eremin A.A., Wilde M.V., Golub M.V., Pleshkov V.N. Influence of retroreflective films on the behaviour of elastic guided waves measured with laser Doppler vibrometry. *Measurement*. 2022. Vol. 190. Article No 110572. <https://doi.org/10.1016/j.measurement.2021.110572>.
15. Бабешко В.А., Глушков Е.В., Глушкова Н.В. Методы построения матриц Грина для стратифицированного упругого полупространства. *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 1987. Т. 27. №1. С. 93–101.
16. Бабешко В.А., Глушков Е.В., Зинченко Ж.Ф. *Динамика неоднородных линейно-упругих сред*. М.: Наука, 1989. 344 с.
17. Storn R., Price K. Differential evolution – A simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces. *Journal of Global Optimization*. 1997. Vol. 11. Iss. 4. P. 341–359. <https://doi.org/10.1023/a:1008202821328>.
18. Vardi Y., Zhang C.-H. The multivariate L1-median and associated data depth. *Proceedings of the National Academy of Sciences*. 2000. Vol. 97. Iss. 4. P. 1423–1426. <https://doi.org/10.1073/pnas.97.4.1423>.
19. Shil'ko S., Konyok D. Numerical and experimental study of auxetic closed-cell foams. *Computational Methods in Science and Technology*. 2004. Vol. 10. Iss. 2. P. 197–202. <https://doi.org/10.12921/cmst.2004.10.02.197-202>.
20. Golub M.V., Doroshenko O.V., Fomenko S.I. Effective spring boundary conditions for modelling wave propagation through a damaged interface between dissimilar orthotropic media. *European Journal of Mechanics – A/Solids*. 2025. Vol. 111. Article No 105564. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2024.105564>.

21. Mori N., Iwata Y., Hayashi T., Matsuda N. Viscoelastic wave propagation and resonance in a metal-plastic bonded laminate. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 2022. Vol. 30. Iss. 18. P. 3803–3816. <https://doi.org/10.1080/15376494.2022.2084191>.

### References

1. Varsavas S.D., Michalec P., Arbeiter F. A comprehensive study on thermoplastic elastomers for additive manufacturing of leg prosthesis. *Next Materials*. 2025. Vol. 8. Article No 100700. <https://doi.org/10.1016/j.nxmte.2025.100700>.
2. Almonte A.J., Cansaya C.E., Flores E.V., Silva Y.L., Medina N.O., Corrales P.A. Implementation and evaluation of a low-cost prototype fixed suspension foot prosthesis built in additive printing. *International Journal of Mechanical Engineering and Robotics Research*. 2025. Vol. 14. Iss. 1. P. 39–47. <https://doi.org/10.18178/ijmerr.14.1.39-47>.
3. Pszczółkowski B., Nowak K.W., Rejmer W., Bramowicz M., Dzadz L., Galecki R. A comparative analysis of selected methods for determining Young's modulus in polylactic acid samples manufactured with the FDM method. *Materials*. 2021. Vol. 15. Iss. 1. P. 149-1 – 149-11. <https://doi.org/10.3390/ma15010149>.
4. Lu L., Charron E., Glushkov E., Glushkova N., Bonello B., Julien F.H., Gogneau N., Tchernycheva M., Boyko O. Probing elastic properties of nanowire-based structures. *Appl. Phys. Lett.* 2018. Vol. 113. Iss. 16. Article No 161903. <https://doi.org/10.1063/1.5045665>.
5. Delory A., Lemoult F., Eddi A., Prada C. Guided elastic waves in a highly-stretched soft plate. *Extreme Mechanics Letters*. 2023. Vol. 61. Article No 102018. <https://doi.org/10.1016/j.eml.2023.102018>.
6. Eremin A.A., Glushkov E.V., Glushkova N.V., Lammering R. Evaluation of effective elastic properties of layered composite fiber-reinforced plastic plates by piezoelectrically induced guided waves and laser Doppler vibrometry. *Compos. Struct.* 2015. Vol. 125. P. 449–458. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.02.029>.
7. Golub M.V., Doroshenko O.V., Arsenov M.A., Eremin A.A., Gu Y., Bareiko I.A. Improved unsupervised learning method for material-properties identification based on mode separation of ultrasonic guided waves. *Computation*. 2022. Vol. 10. Iss. 6. P. 93-1 – 93-15. <https://doi.org/10.3390/computation10060093>.
8. Su Z., Ye L. Lamb wave-based quantitative identification of delamination in CF/EP composite structures using artificial neural algorithm. *Compos. Struct.* 2004. Vol. 66. Iss. 1–4. P. 627–637. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2004.05.011>.
9. Wilde M.V., Golub M.V., Eremin A.A. Experimental observation of theoretically predicted spectrum of edge waves in a thick elastic plate with facets. *Ultrasonics*. 2019. Vol. 98. P. 88–93. <https://doi.org/10.1016/j.ultras.2019.05.009>.
10. Burger R., Heilig M., Grosse C.U., Wu D. Material parameter inversion using cross-entropy optimization based on Lamb wave dispersion spectra. *NDT & E International*. 2025. Vol. 153. Article No 103345. <https://doi.org/10.1016/j.ndteint.2025.103345>.
11. Hua Y., Sarkar T. Matrix pencil method for estimating parameters of exponentially damped/undamped sinusoids in noise. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*. 1990. Vol. 38. Iss. 5. P. 814–824. <https://doi.org/10.1109/29.56027>.
12. Schöpfer F., Binder F., Wöstehoff A., Schuster T., von Ende S., Föll S., Lammering R. Accurate determination of dispersion curves of guided waves in plates by applying the matrix pencil method to laser vibrometer measurement data. *CEAS Aeronautical Journal*. 2013. Vol. 4. Iss. 1. P. 61–68. <https://doi.org/10.1007/s13272-012-0055-7>.
13. Arsenov M.A., Golub M.V., Doroshenko O.V., Eremin A.A., Glushkov E.V., Glushkova N.V. Programmnyy kompleks SIMPLE dlya opredeleniya uprugikh svoystv materialov v laminatakh s pomoshchyu begushchikh voln [Software package simple for elastic material properties characterization in laminates using guided waves]. *Vestnik Yuzhno-Uralskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya "Matematicheskoe modelirovanie i programmirovaniye"* [Bulletin of the South Ural State University. Ser. Mathematical Modelling, Programming & Computer Software]. 2025. Vol. 18. No 2. P. 66–78 (In Russian).
14. Eremin A.A., Wilde M.V., Golub M.V., Pleshkov V.N. Influence of retroreflective films on

the behaviour of elastic guided waves measured with laser Doppler vibrometry. *Measurement*. 2022. Vol. 190. Article No 110572. <https://doi.org/10.1016/j.measurement.2021.110572>.

15. Babeshko V.A., Glushkov E.V., Glushkova N.V. Methods of constructing Green's matrix of a stratified elastic half-space. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 1987. Vol. 27. Iss. 1. P. 60–65. DOI: [https://doi.org/10.1016/0041-5553\(87\)90119-4](https://doi.org/10.1016/0041-5553(87)90119-4).

16. Babeshko V.A., Glushkov E.V., Zinchenko Zh.F. *Dinamika neodnorodnykh lineynopruprigikh sred [Dynamics of Inhomogeneous Linear Elastic Media]*. Moscow. Nauka Publ. 1989. 344 p. (In Russian).

17. Storn R., Price K. Differential evolution – A simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces. *Journal of Global Optimization*. 1997. Vol. 11. Iss. 4. P. 341–359. <https://doi.org/10.1023/a:1008202821328>.

18. Vardi Y., Zhang C.-H. The multivariate L1-median and associated data depth. *Proceedings of the National Academy of Sciences*. 2000. Vol. 97. Iss. 4. P. 1423–1426. <https://doi.org/10.1073/pnas.97.4.1423>.

19. Shil'ko S., Konyok D. Numerical and experimental study of auxetic closed-cell foams. *Computational Methods in Science and Technology*. 2004. Vol. 10. Iss. 2. P. 197–202. <https://doi.org/10.12921/cmst.2004.10.02.197-202>.

20. Golub M.V., Doroshenko O.V., Fomenko S.I. Effective spring boundary conditions for modelling wave propagation through a damaged interface between dissimilar orthotropic media. *European Journal of Mechanics – A/Solids*. 2025. Vol. 111. Article No 105564. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2024.105564>.

21. Mori N., Iwata Y., Hayashi T., Matsuda N. Viscoelastic wave propagation and resonance in a metal-plastic bonded laminate. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 2022. Vol. 30. Iss. 18. P. 3803–3816. <https://doi.org/10.1080/15376494.2022.2084191>.

#### **DETERMINATION OF ELASTIC MODULI OF POLYMER MATERIALS USING SLOWNESSES OF GUIDED WAVES IN SAMPLES MANUFACTURED BY FUSED DEPOSITION MODELING\***

**Golub M.V.<sup>1</sup>, Arsenov M.A.<sup>1</sup>, Kanishchev K.K.<sup>1</sup>, Eremin A.A.<sup>1</sup>, Shil'ko S.V.<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>*Kuban State University, Krasnodar, Russian Federation*

<sup>2</sup>*V.A. Belyi Metal-Polymer Research Institute of National Academy of Sciences of Belarus,  
Gomel, Belarus*

[m\\_golub@inbox.ru](mailto:m_golub@inbox.ru)

*Received by the Editor 2025/10/06*

This paper presents a method for determining the elastic moduli of thermoplastics using plate-shaped specimens fabricated by fused deposition modeling (FDM 3D printing). The proposed approach is based on the analysis of guided elastic wave propagation in the sample and the statistical processing of the results of the corresponding inverse coefficient problem solution. Laser Doppler vibrometry was used to register the velocities of vertical vibrations on the surface of the rectangular plate, which were excited by a piezoelectric transducer glued at the surface via cyanoacrylate. The matrix pencil method was applied to the recorded wave signals to determine dispersion characteristics of Lamb waves. The inverse coefficient problem for elastic moduli was solved numerically using the differential evolution method. The objective function was constructed utilizing the property that the Fourier symbol of the Green's matrix for a homogeneous elastic layer tends to infinity at the points corresponding to the measured wavenumbers. To increase the efficiency of the method, the procedure is performed for several

---

\*The research is carried out with the financial support of the Kuban Science Foundation, Ortho-Market LLC in the framework of the project Num. NTIP-25.1/8.

lines starting from the center of the source of vibration. Statistical analysis of the elastic moduli recovered using different scan lines was conducted, providing estimates of the elastic properties of the material. A comparison with the results of standardized uniaxial tensile mechanical tests was performed. Therefore, the effectiveness of the developed method for determining and monitoring the elastic characteristics of thin-walled polymer structures manufactured using additive technologies is demonstrated.

*Keywords:* polymer materials, additive manufacturing, elastic moduli, guided elastic waves, inverse coefficient problem, numerical analysis.