

УДК 539.3:534.2

**КОЛЕБАНИЯ ТОНКОСТЕННОЙ УПРУГОЙ КОНСТРУКЦИИ
ИЗ НЕЗАМКНУТЫХ ОРТОТРОПНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ
ОБОЛОЧЕК СО СВОБОДНОЙ И ШАРНИРНО
ЗАКРЕПЛЕННОЙ ГРАНИЧНЫМИ ОБРАЗУЮЩИМИ**

Г.Р. Гулгазарян, Р.Д. Саакян

Ереван (Армения)

Исследован вопрос существования собственных колебаний тонкостенной упругой конструкции оболочечного типа, составленной из одинаковых ортотропных незамкнутых круговых бесконечных цилиндрических оболочек со свободной и шарнирно закрепленной граничными образующими, и оболочечной конструкции, составленной из одинаковых ортотропных незамкнутых круговых конечных цилиндрических оболочек со свободной и шарнирно закрепленной граничными образующими при наличии шарнирного закрепления Навье на граничных направляющих. С использованием системы уравнений соответствующей классической теории ортотропных цилиндрических оболочек для вышеуказанных оболочечных конструкций получены дисперсионные уравнения и асимптотические формулы для нахождения собственных частот возможных типов колебаний. Приведен механизм, с помощью которого расчленяются возможные типы колебаний. На примерах оболочечных конструкций, составленных из разного числа одинаковых ортотропных незамкнутых конечных цилиндрических оболочек, получены приближенные значения безразмерной характеристики собственной частоты и характеристики затухания соответственных форм колебаний.

Введение

Известно, что колебания в тонкостенной упругой оболочечной конструкции распространяются в виде преимущественно изгибных и преимущественно тангенциальных волн [1, 2]. У свободного края тонкостенных упругих конструкций оболочечного типа происходит трансформация волнового движения одного типа в другой. При трансформации волн с учетом геометрических и механических параметров оболочечной конструкции со свободным краем возникают сложные картины распределения частот собственных колебаний [3–6]. В настоящей работе получены дисперсионные уравнения для нахождения собственных частот возможных типов колебаний для тонкостенной упругой конструкции оболочечного типа, составленной из одинаковых ортотропных незамкнутых круговых бесконечных цилиндрических оболочек со свободной и шарнирно закрепленной граничными образующими, и оболочечной конструкции, составленной из ортотропных одинаковых незамкнутых круговых конечных цилиндрических оболочек со свободной и шарнирно закрепленной граничными образующими при наличии шарнирного закрепления Навье на граничных направляющих. Установлена асимптотическая связь между дисперсион-

ными уравнениями рассматриваемых задач и аналогичных задач для ортотропной пластинчатой тонкостенной конструкции (в частности, для аналогичных задач пластины-полосы и прямоугольной пластины). Доказывается также асимптотическая связь между дисперсионными уравнениями рассматриваемых задач и задач на собственные значения для тонкостенных упругих конструкций оболочечного типа, составленных из счетного числа одинаковых ортотропных незамкнутых круговых бесконечных цилиндрических оболочек со свободной граничной образующей, и тонкостенной упругой конструкции оболочечного типа, составленной из счетного числа одинаковых ортотропных незамкнутых круговых конечных цилиндрических оболочек со свободной граничной образующей при наличии шарнирного закрепления на боковых направляющих.

1. Основные уравнения и постановка краевых задач

Предполагается, что образующие ортогональны краю оболочечной конструкции. На срединной поверхности тонкостенной конструкции вводятся криволинейные координаты (α, β) ($-\infty < \alpha < \infty$, если составляющие цилиндрической оболочки бесконечны; $0 \leq \alpha \leq l$, если цилиндрические оболочки имеют длину l и $0 \leq \beta \leq \beta_0$), являющиеся соответственно длиной образующей и длиной дуги направляющей кривой (рис. 1 и 2).

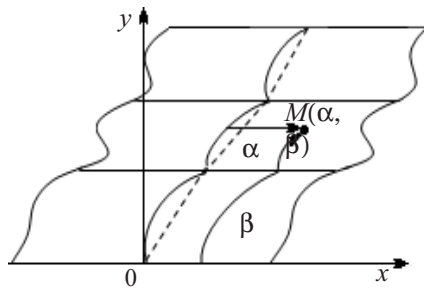


Рис. 1

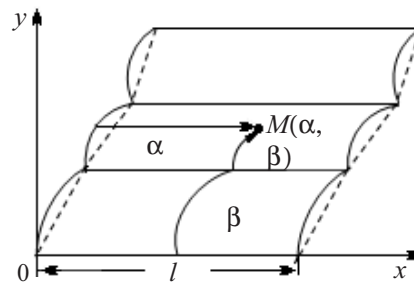


Рис. 2

Обозначим через s длину одной арки цилиндрической оболочки срединной поверхности. В частности, при $\beta_0 = s$ имеем цилиндрическую оболочку открытого профиля. Заметим, что в данной работе фактически рассматриваются цилиндрические оболочки, направляющие срединной поверхности которых представляют собой непрерывные незамкнутые кусочно-гладкие кривые. На линиях раздела цилиндрических оболочек кривизна направляющей кривой срединной поверхности имеет устранимые особенности. Строгое использование системы уравнений соответствующей классической теории ортотропных цилиндрических оболочек связано с введением промежуточных сопрягающих элементов, обеспечивающих непрерывность перемещений вектора точки срединной поверхности. Однако выполнение таких строгих сопряжений связано с произволом при задании вида сопрягающего элемента, что существенно усложняет расчеты, особенно при исследовании конструкций, состоящих из большого числа цилиндрических оболочек (см. [7], стр. 56). Исходя из этого, здесь вместо введения сопрягающих элементов кривизна направляющей кривой цилиндрической оболочки заменяется соответствующим рядом Фурье с периодом s и применяются динамические уравнения классической теории ортотропных цилиндрических оболочек [3, 8, 9]. Итак, в качестве исходных уравнений, описывающих колебания тонкостенной конструкции вышеуказанного типа, исполь-

зуются уравнения, которые соответствуют классической теории ортотропных цилиндрических оболочек, записанные в выбранных криволинейных координатах α, β [10]:

$$\begin{aligned}
& -B_{11} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \alpha^2} - B_{66} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \beta^2} - (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 u_2}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{B_{12}}{R} \frac{\partial u_3}{\partial \alpha} = \lambda u_1, \\
& -(B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 u_1}{\partial \alpha \partial \beta} - B_{66} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \alpha^2} - B_{22} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \beta^2} + B_{22} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{u_3}{R} \right) - \frac{\mu^4}{R} \left(4B_{66} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \left(\frac{u_2}{R} \right) + \right. \\
& \left. + B_{22} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \left(\frac{u_2}{R} \right) \right) - \frac{\mu^4}{R} \left(B_{22} \frac{\partial^3 u_3}{\partial \beta^3} + (B_{12} + 4B_{66}) \frac{\partial^3 u_3}{\partial \beta \partial \alpha^2} \right) = \lambda u_2, \quad (1.1) \\
& \mu^4 \left(B_{11} \frac{\partial^4 u_3}{\partial \alpha^4} + 2(B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^4 u_3}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + B_{22} \frac{\partial^4 u_3}{\partial \beta^4} \right) + \mu^4 \left(B_{22} \frac{\partial^3}{\partial \beta^3} \left(\frac{u_2}{R} \right) + \right. \\
& \left. + (B_{12} + 4B_{66}) \frac{\partial^3}{\partial \beta \partial \alpha^2} \left(\frac{u_2}{R} \right) \right) - \frac{B_{12}}{R} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha} - \frac{B_{22}}{R} \frac{\partial u_2}{\partial \beta} + \frac{B_{22}}{R^2} u_3 = \lambda u_3.
\end{aligned}$$

Здесь u_1, u_2, u_3 – проекции вектора смещений соответственно в направлениях α, β и нормали к поверхности оболочки; $R^{-1} = R^{-1}(\beta)$ – кривизна направляющей кривой срединной поверхности; $\mu^4 = h^2/12$ (h – толщина оболочки); $\lambda = \omega^2 \rho$, где ω – угловая частота собственных колебаний, ρ – плотность материала; B_{ij} – коэффициенты упругости.

Ряд Фурье кривизны направляющей кривой срединной поверхности такой оболочечной конструкции имеет постоянную сумму R^{-1} при $-\infty < \beta < \infty$, где R – радиус составляющих цилиндрических оболочек срединной поверхности. Обозначим $k = 2\pi n_0/l$, $n_0 \in N$, если конструкция составлена из одинаковых ортотропных незамкнутых круговых бесконечных цилиндрических оболочек, где l – произвольное положительное число, или $k = \pi/l$, если составляющие цилиндрической оболочки имеют длину l и $R^{-1} = kr_0/2$, где r_0 – безразмерный параметр. Рассматриваются следующие граничные условия:

$$\left. \frac{B_{12}}{B_{22}} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial u_2}{\partial \beta} - \frac{u_3}{R} \right|_{\beta=0} = 0, \quad \left. \frac{B_{12}}{B_{22}} \frac{\partial^2 u_3}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial \beta^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial u_2}{\partial \beta} \right|_{\beta=0} = 0, \quad (1.2)$$

$$\left. \frac{\partial u_2}{\partial \alpha} + \frac{\partial u_1}{\partial \beta} \right|_{\beta=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial^3 u_3}{\partial \beta^3} + \frac{B_{12} + 4B_{66}}{B_{22}} \frac{\partial^3 u_3}{\partial \beta \partial \alpha^2} + \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial \beta^2} + \frac{4B_{66}}{B_{22}} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \alpha^2} \right) \right|_{\beta=0} = 0;$$

$$\left. \frac{B_{12}}{B_{22}} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial u_2}{\partial \beta} - \frac{u_3}{R} \right|_{\beta=\beta_0} = u_1|_{\beta=\beta_0} = u_3|_{\beta=\beta_0} = \quad (1.3)$$

$$= \left. \frac{B_{12}}{B_{22}} \frac{\partial^2 u_3}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial \beta^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial u_2}{\partial \beta} \right|_{\beta=\beta_0} = 0;$$

$$u_i(\alpha + 2\pi/k, \beta) = u_i(\alpha, \beta), \quad i = \overline{1,3}; \quad (1.4)$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial u_1}{\partial \alpha} + \frac{B_{12}}{B_{11}} \left(\frac{\partial u_2}{\partial \beta} - \frac{u_3}{R} \right) \right|_{\alpha=0,l} &= u_2|_{\alpha=0,l} = u_3|_{\alpha=0,l} = \\ &= \frac{\partial^2 u_3}{\partial \alpha^2} + \frac{B_{12}}{B_{11}} \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial \beta^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial u_2}{\partial \beta} \right) \Big|_{\alpha=0,l} = 0. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Граничные условия (1.2)–(1.4) соответствуют конструкции оболочечного типа, составленной из одинаковых ортотропных незамкнутых круговых бесконечных цилиндрических оболочек: соотношения (1.2) выражают условия свободного края при $\beta = 0$, соотношения (1.3) – условия шарнирного закрепления при $\beta = \beta_0$, а условия (1.4) являются условиями волнообразности колебания, где $k = 2\pi n_0/l$, $n_0 \in \mathbb{N}$ (см. рис. 1). Граничные условия (1.2), (1.3), (1.5) соответствуют конструкции оболочечного типа, составленной из ортотропных одинаковых незамкнутых круговых конечных цилиндрических оболочек: соотношения (1.5) являются условиями шарнирного закрепления по граничным направляющим $\alpha = 0$ и $\alpha = l$, где $k = \pi/l$ (см. рис. 2).

Можно доказать, что задачи (1.1)–(1.4) и (1.1)–(1.3), (1.5) – самосопряженные и имеют неотрицательный дискретный спектр с предельной точкой на $+\infty$ ([11], стр. 362).

2. Вывод и анализ характеристических уравнений

В первом, втором и третьем уравнениях системы (1.1) (при постоянной кривизне R^{-1}) спектральный параметр λ формально заменим на $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ соответственно. Для последующих вычислений целесообразно систему уравнений (1.1) (с вышеуказанными изменениями) свести к системе уравнений

$$\begin{aligned} \left(\Gamma + \frac{\mu^4}{R^2} DG \right) u_1 &= \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(Au_3 + \mu^4 \frac{B_{22}(B_{12} + B_{66})}{B_{11}B_{66}} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} Lu_3 + \frac{\mu^4}{R^2} \frac{B_{12}B_{22}}{B_{11}B_{66}} Du_3 \right), \\ \left(\Gamma + \frac{\mu^4}{R^2} DG \right) u_2 &= \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \beta} (Bu_3 - \mu^4 LGu_3), \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \Gamma \Omega u_3 + \frac{1}{R^2} \left\{ \left(\Gamma - B \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} - \frac{B_{12}}{B_{22}} A \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right) u_3 + \mu^4 \left(DG\Omega + 2LB \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) u_3 + \right. \\ \left. + \frac{\mu^4}{R^2} \left(DB + \frac{B_{12}}{B_{11}} D \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right) u_3 - \mu^8 L^2 G \frac{\partial^2 u_3}{\partial \beta^2} \right\} = 0, \end{aligned}$$

где операторы $\Gamma, \Omega, A, B, G, D, L$ имеют вид:

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} + \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2 - 2B_{12}B_{66}}{B_{11}B_{66}} \frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + \frac{B_{22}}{B_{11}} \frac{\partial^4}{\partial \beta^4} + \\ &+ \left(\frac{\lambda_1}{B_{11}} + \frac{\lambda_2}{B_{66}} \right) \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \left(\frac{\lambda_1 B_{22}}{B_{11}B_{66}} + \frac{\lambda_2}{B_{11}} \right) \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + \frac{\lambda_1 \lambda_2}{B_{11}B_{66}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Omega &= \mu^4 \left(\frac{B_{11}}{B_{22}} \frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} + \frac{2(B_{12} + 2B_{66})}{B_{22}} \frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + \frac{\partial^4}{\partial \beta^4} \right) - \frac{\lambda_3}{B_{22}}, \\
A &= \frac{B_{12}}{B_{11}} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - \frac{B_{22}}{B_{11}} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + \frac{B_{12}}{B_{11}} \frac{\lambda_2}{B_{66}}, \quad D = \frac{4B_{66}}{B_{22}} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial \beta^2}, \\
B &= \frac{B_{22}}{B_{11}} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + \frac{B_{11} - B_{22} - B_{12}^2 - B_{12}B_{66}}{B_{11}B_{66}} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{B_{22}}{B_{11}} \frac{\lambda_1}{B_{66}}, \\
G &= \frac{B_{22}}{B_{66}} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{B_{22}}{B_{11}} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + \frac{B_{22}}{B_{11}} \frac{\lambda_1}{B_{66}}, \quad L = \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + \frac{B_{12} + 4B_{66}}{B_{22}} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}. \quad (2.2)
\end{aligned}$$

Решение системы (1.1) ищем в виде

$$(u_1, u_2, u_3) = (u_{cn} \cos kn\alpha, v_{sn} \sin kn\alpha, \sin kn\alpha) \exp(k\chi\beta), \quad n = \overline{1, +\infty}, \quad (2.3)$$

где n – волновое число; u_{cn}, v_{sn} – неопределенные коэффициенты; χ – неопределенный коэффициент затухания. При этом условия (1.4) и (1.5) выполняются автоматически и поставленные задачи решаются аналогичным образом, придавая параметру k разные значения. Подставляя (2.3) в (2.1), получим

$$\left(c_n + \frac{r_0^2}{4} a^2 g_n d_n \right) u_{cn} = \frac{r_0 n}{2} \left\{ a_n + a^2 \frac{B_{22}(B_{12} + B_{66})}{B_{11}B_{66}} \chi^2 l_n + \frac{r_0^2}{4} a^2 \frac{B_{22}B_{12}}{B_{11}B_{66}} d_n \right\}, \quad (2.4)$$

$$\left(c_n + \frac{r_0^2}{4} a^2 g_n d_n \right) v_{sn} = \frac{r_0 \chi}{2} \{ b_n - a^2 g_n l_n \}, \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned}
R_{mn} c_n + \frac{r_0^2}{4} \left\{ c_n - b_n \chi^2 + \frac{B_{12}}{B_{22}} n^2 a_n + a^2 (R_{mn} g_n d_n + 2\chi^2 l_n b_n) + \right. \\
\left. + \frac{r_0^2}{4} a^2 d_n \left(b_n - \frac{B_{12}}{B_{11}} n^2 \right) - a^4 \chi^2 g_n l_n^2 \right\} = 0, \quad (2.6)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_n = \frac{B_{22}}{B_{11}} \chi^4 - \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2 - 2B_{12}B_{66}}{B_{11}B_{66}} n^2 \chi^2 + \left(\frac{B_{22}}{B_{11}} \eta_1^2 + \frac{B_{66}}{B_{11}} \eta_2^2 \right) \chi^2 + \\
+ \left(n^2 - \frac{B_{66}}{B_{11}} \eta_1^2 \right) (n^2 - \eta_2^2), \quad a_n = - \left(\frac{B_{22}}{B_{11}} \chi^2 + \frac{B_{12}}{B_{11}} n^2 - \frac{B_{12}}{B_{11}} \eta_2^2 \right),
\end{aligned}$$

$$b_n = \frac{B_{22}}{B_{11}} \chi^2 - \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2 - B_{12}B_{66}}{B_{11}B_{66}} n^2 + \frac{B_{22}}{B_{11}} \eta_1^2, \quad l_n = \chi^2 - \frac{B_{12} + 4B_{66}}{B_{22}} n^2, \quad (2.7)$$

$$g_n = \frac{B_{22}}{B_{11}} \chi^2 - \frac{B_{22}}{B_{66}} n^2 + \frac{B_{22}}{B_{11}} \eta_1^2, \quad d_n = \chi^2 - \frac{4B_{66}}{B_{22}} n^2, \quad a^2 = \mu^4 k^2,$$

$$R_{mn} = a^2 \left(\chi^4 - \frac{2(B_{12} + 2B_{66})n^2}{B_{22}} \chi^2 + \frac{B_{11}}{B_{22}} n^4 \right) - \frac{B_{66}}{B_{22}} \eta_3^2, \quad \eta_i^2 = \frac{\lambda_i}{B_{66}k^2}, \quad i = \overline{1, 3}.$$

Предположим, что χ_j , $j = \overline{1,4}$, являются попарно различными нулями уравнения (2.6) с неположительными действительными частями, тогда $\chi_5 = -\chi_1$, $\chi_6 = -\chi_2$, $\chi_7 = -\chi_3$, $\chi_8 = -\chi_4$ также являются попарно различными нулями уравнения (2.6).

Пусть $(u_1^{(j)}, u_2^{(j)}, u_3^{(j)})$, $j = \overline{1,8}$, – нетривиальные решения вида (2.3) системы (1.1) при $\chi = \chi_j$, $j = \overline{1,8}$, соответственно. Представляя решение задач (1.1)–(1.4) и (1.1)–(1.3), (1.5) в виде $u_i = \sum_{j=1}^8 w_j u_i^{(j)}$, $i = \overline{1,3}$, и учитывая граничные условия (1.2), (1.3), получим систему уравнений:

$$\sum_{j=1}^8 \frac{M_{ij}^{(n)} w_j}{c_n^{(j)} + 0,25a^2 r_0^2 g_n^{(j)} d_n^{(j)}} = 0, \quad i = \overline{1,8}, \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} M_{1j}^{(n)} &= -\frac{B_{12}}{B_{22}} n^2 a_n^{(j)} + \chi_j^2 b_n^{(j)} - c_n^{(j)} - \frac{r_0^2}{4} a^2 d_n^{(j)} \left(b_n^{(j)} - \frac{B_{12}}{B_{11}} n^2 \right) - a^2 \chi_j^2 l_n^{(j)} b_n^{(j)}, \\ M_{2j}^{(n)} &= -\chi_j \left\{ a_n^{(j)} + b_n^{(j)} + a^2 l_n^{(j)} \left(\frac{B_{12} B_{22}}{B_{11} B_{66}} \chi_j^2 + \frac{B_{22}}{B_{66}} n^2 - \frac{B_{22}}{B_{11}} \eta_1^2 \right) + a^2 \frac{r_0^2}{4} \frac{B_{12} B_{22}}{B_{11} B_{66}} d_n^{(j)} \right\}, \\ M_{3j}^{(n)} &= \left(\chi_j^2 - \frac{B_{12}}{B_{22}} n^2 \right) c_n^{(j)} + \frac{r_0^2}{4} \left(\chi_j^2 b_n^{(j)} + \frac{4B_{12} B_{66}}{B_{22}^2} a^2 n^4 g_n^{(j)} \right), \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$M_{4j}^{(n)} = \chi_j \left\{ l_n^{(j)} c_n^{(j)} + \frac{r_0^2}{4} b_n^{(j)} d_n^{(j)} \right\}, \quad M_{5j}^{(n)} = M_{1j}^{(n)} \exp(z_j), \quad M_{6j}^{(n)} = M_{3j}^{(n)} \exp(z_j),$$

$$M_{7j}^{(n)} = \left\{ a_n^{(j)} + a^2 \frac{B_{22}(B_{12} + B_{66})}{B_{11} B_{66}} \chi_j^2 l_n^{(j)} + \frac{r_0^2}{4} a^2 \frac{B_{12} B_{22}}{B_{11} B_{66}} d_n^{(j)} \right\} \exp(z_j),$$

$$M_{8j}^{(n)} = (c_n^{(j)} + 0,25r_0^2 a^2 g_n^{(j)} d_n^{(j)}) \exp(z_j), \quad z_j = k\chi_j \beta_0, \quad j = \overline{1,8}.$$

Здесь индекс j означает, что соответствующая функция взята при $\chi = \chi_j$, $j = \overline{1,8}$. Чтобы система (2.8) имела нетривиальное решение, необходимо и достаточно, чтобы

$$\text{Det} \left\| M_{ij}^{(n)} \right\|_{i,j=1}^8 = 0. \quad (2.10)$$

Численный анализ уравнения (2.10) показывает, что значение определителя $\text{Det} \left\| M_{ij}^{(n)} \right\|_{i,j=1}^8$ приравняется к нулю или становится малым числом, когда любые два χ – корни уравнения (2.6) – становятся близкими друг к другу. Это сильно усложняет расчеты и может привести к появлению ложных решений. Оказывается, что множитель, при котором определитель становится равным нулю, можно выделить. Для этого введем обозначения:

$$x_j = \chi_j / n, \quad j = \overline{1,8}; \quad \eta_{in} = \eta_i / n, \quad i = \overline{1,3}; \quad \varepsilon_n = r_0 / (2n),$$

$$[z_i z_j] = (\exp(z_i) - \exp(z_j)) / (z_i - z_j) kn \beta_0,$$

$$[z_i z_j z_k] = ([z_i z_j] - [z_i z_k]) / (z_j - z_k) kn \beta_0,$$

$$[z_1 z_2 z_3 z_4] = ([z_1 z_2 z_3] - [z_1 z_2 z_4]) / (z_3 - z_4) kn \beta_0, \quad (2.11)$$

$$\sigma_1 = \sigma_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4,$$

$$\sigma_2 = \sigma_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4 + x_2 x_3 + x_2 x_4 + x_3 x_4,$$

$$\sigma_3 = \sigma_3(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + x_1 x_3 x_4 + x_2 x_3 x_4,$$

$$\sigma_4 = \sigma_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 x_2 x_3 x_4, \quad \bar{\sigma}_k = \sigma_k(x_1, x_2, x_3, 0),$$

$$\bar{\bar{\sigma}}_k = \sigma_k(x_1, x_2, 0, 0), \quad k = \overline{1, 4}.$$

При этом $\bar{\sigma}_4 = \bar{\bar{\sigma}}_4 = \bar{\bar{\sigma}}_3 = 0$. Пусть f_m , $m = \overline{1, 6}$, является симметрическим многочленом m -й степени от переменных x_1, x_2, x_3, x_4 . Известно, что этот многочлен выражается через элементарные симметрические многочлены единственным образом [12]. Обозначая

$$\begin{aligned} f_m &= f_m(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4), \quad \bar{f}_m = f_m(\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \bar{\sigma}_3, 0), \quad \bar{\bar{f}}_m = f_m(\bar{\bar{\sigma}}_1, \bar{\bar{\sigma}}_2, 0, 0), \quad m = \overline{1, 6}, \\ f_1 &= \sigma_1, \quad f_2 = \sigma_1^2 - \sigma_2, \quad f_3 = \sigma_1^3 - 2\sigma_1\sigma_2 + \sigma_3, \\ f_4 &= \sigma_1^4 - 3\sigma_1^2\sigma_2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1\sigma_3 - \sigma_4, \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\bar{f}_5 = \bar{\sigma}_1^5 - 4\bar{\sigma}_1^3\bar{\sigma}_2 + 3\bar{\sigma}_1\bar{\sigma}_2^2 + 3\bar{\sigma}_1^2\bar{\sigma}_3 - 2\bar{\sigma}_2\bar{\sigma}_3, \quad \bar{\bar{f}}_6 = \bar{\bar{\sigma}}_1^6 - 5\bar{\bar{\sigma}}_1^4\bar{\bar{\sigma}}_2 + 6\bar{\bar{\sigma}}_1^2\bar{\bar{\sigma}}_2^2 - \bar{\bar{\sigma}}_2^3,$$

и выполняя элементарные действия над столбцами определителя (2.10), получим

$$\text{Det} \| M_{ij}^{(n)} \|_{i,j=1}^8 = n^{36} K^2 \exp(-z_1 - z_2 - z_3 - z_4) \text{Det} \| m_{ij} \|_{i,j=1}^8, \quad (2.13)$$

$$K = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)(x_3 - x_4),$$

$$m_{11} = Hx_1^6 + d_1x_1^4 + d_2x_1^2 + d_3, \quad m_{12} = H\bar{f}_5 + d_1\bar{f}_3 + d_2\bar{f}_1, \quad m_{13} = H\bar{f}_4 + d_1\bar{f}_2 + d_2,$$

$$m_{14} = Hf_3 + d_1f_1, \quad m_{21} = Tx_1^5 + d_4x_1^3 + d_5x_1,$$

$$m_{22} = T\bar{f}_4 + d_4\bar{f}_2 + d_5, \quad m_{23} = Tf_3 + d_4f_1,$$

$$m_{24} = Tf_2 + d_4, \quad m_{31} = Fx_1^6 + d_6x_1^4 + d_7x_1^2 + d_8, \quad m_{32} = F\bar{f}_5 + d_6\bar{f}_3 + d_7\bar{f}_1,$$

$$m_{33} = F\bar{f}_4 + d_6\bar{f}_2 + d_7, \quad m_{34} = Ff_3 + d_6f_1, \quad m_{41} = Fx_1^7 + d_9x_1^5 + d_{10}x_1^3 + d_{11}x_1,$$

$$m_{42} = F\bar{f}_6 + d_9\bar{f}_4 + d_{10}\bar{f}_2 + d_{11}, \quad m_{43} = F\bar{f}_5 + d_9\bar{f}_3 + d_{10}\bar{f}_1, \quad m_{44} = Ff_4 + d_9f_2 + d_{10},$$

$$m_{i5} = (-1)^{i+1} m_{i1} \exp(z_1),$$

$$m_{i8} = (-1)^{i+1} (m_{i4} \exp(z_4) + m_{i3} [z_3 z_4] + m_{i2} [z_2 z_3 z_4] + m_{i1} [z_1 z_2 z_3 z_4]),$$

$$m_{i6} = (-1)^{i+1} (m_{i2} \exp(z_2) + m_{i1} [z_1 z_2]),$$

$$m_{i7} = (-1)^{i+1} (m_{i3} \exp(z_3) + m_{i2} [z_2 z_3] + m_{i1} [z_1 z_2 z_3]),$$

$$\begin{aligned}
m_{5j} &= m_{1j+4}, \quad m_{5j+4} = m_{1j}, \quad m_{6j} = m_{3j+4}, \quad m_{6j+4} = m_{3j}, \quad i = \overline{1,4}, \quad j = \overline{1,4}, \\
n_{71} &= Sx_1^4 + g_1x_1^2 + g_2, \quad n_{72} = Sf_3 + g_1f_1, \quad n_{73} = Sf_2 + g_1, \quad n_{74} = Sf_1, \\
n_{81} &= Qx_1^4 + g_3x_1^2 + g_4, \quad n_{82} = Qf_3 + g_3f_1, \quad n_{83} = Qf_2 + g_3, \quad n_{84} = Qf_1, \\
m_{i1} &= n_{i1} \exp(z_1), \quad m_{i4} = n_{i4} \exp(z_4) + n_{i3}[z_3z_4] + n_{i2}[z_2z_3z_4] + n_{i1}[z_1z_2z_3z_4], \\
m_{i2} &= n_{i2} \exp(z_2) + n_{i1}[z_1z_2], \quad m_{i3} = n_{i3} \exp(z_3) + n_{i2}[z_2z_3] + n_{i1}[z_1z_2z_3], \\
m_{i5} &= n_{i1}, \quad m_{i6} = n_{i2}, \quad m_{i7} = n_{i3}, \quad m_{i8} = n_{i4}, \quad i = 7, 8; \\
H &= -a^2n^2 \frac{B_{22}}{B_{11}}, \quad T = -a^2n^2 \frac{B_{12}B_{22}}{B_{11}B_{66}}, \quad F = \frac{B_{22}}{B_{11}}, \\
S &= a^2n^2 \frac{B_{22}(B_{12} + B_{66})}{B_{11}B_{66}}, \quad Q = \frac{B_{22}}{B_{11}}(1 + a^2n^2\varepsilon_n^2); \\
d_1 &= a^2n^2 \left(\frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2 + 4B_{66}^2}{B_{11}B_{66}} - \frac{B_{22}}{B_{11}}\eta_{1n}^2 - \varepsilon_n^2 \frac{B_{22}}{B_{11}} \right), \\
d_2 &= -\frac{B_{66}}{B_{11}}\eta_{2n}^2 - a^2n^2 \frac{B_{12} + 4B_{66}}{B_{22}} \left(\frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2 - B_{12}B_{66}}{B_{11}B_{66}} - \frac{B_{22}}{B_{11}}\eta_{1n}^2 \right) + \\
&\quad + a^2n^2\varepsilon_n^2 \left(\frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2 + 4B_{66}^2}{B_{11}B_{66}} - \frac{B_{22}}{B_{11}}\eta_{1n}^2 \right), \\
d_3 &= -(1 - \eta_{2n}^2 + 4a^2n^2\varepsilon_n^2) \left(\frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2}{B_{11}B_{22}} - \frac{B_{66}}{B_{11}}\eta_{1n}^2 \right), \\
d_4 &= a^2n^2 \left(\frac{B_{12}^2 - B_{11}B_{22} + 4B_{12}B_{66}}{B_{11}B_{66}} + \frac{B_{22}}{B_{11}}\eta_{1n}^2 - \varepsilon_n^2 \frac{B_{22}B_{12}}{B_{11}B_{66}} \right), \\
d_5 &= 4a^2n^2\varepsilon_n^2 \frac{B_{12}}{B_{11}} - \frac{B_{12}}{B_{11}}\eta_{2n}^2 + a^2n^2 \frac{B_{12} + 4B_{66}}{B_{22}} \left(\frac{B_{22}}{B_{66}} - \frac{B_{22}}{B_{11}}\eta_{1n}^2 \right) + \\
&\quad + \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2}{B_{11}B_{66}} - \frac{B_{22}}{B_{11}}\eta_{1n}^2, \quad d_6 = \frac{B_{22}}{B_{11}}\varepsilon_n^2 - \\
&\quad - \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2 - B_{12}B_{66}}{B_{11}B_{66}} + \frac{B_{22}}{B_{11}}\eta_{1n}^2 + \frac{B_{66}}{B_{11}}\eta_{2n}^2, \\
d_7 &= (1 - \eta_{2n}^2) \left(1 - \frac{B_{66}}{B_{11}}\eta_{1n}^2 \right) + \frac{B_{12}}{B_{22}} \left(\frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2 - 2B_{12}B_{66}}{B_{11}B_{66}} - \frac{B_{22}}{B_{11}}\eta_{1n}^2 - \frac{B_{66}}{B_{11}}\eta_{2n}^2 \right) + \\
&\quad + \varepsilon_n^2 \left(4a^2n^2 \frac{B_{12}B_{66}}{B_{11}B_{22}} - \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2 - B_{12}B_{66}}{B_{11}B_{66}} + \frac{B_{22}}{B_{11}}\eta_{1n}^2 \right),
\end{aligned} \tag{2.14}$$

$$\begin{aligned}
d_8 &= -\frac{B_{12}}{B_{22}} \left(1 - \frac{B_{66}}{B_{11}} \eta_{1n}^2 \right) (1 - \eta_{2n}^2 + 4a^2 n^2 \varepsilon_n^2), \\
d_9 &= \frac{B_{22}}{B_{11}} \varepsilon_n^2 - \frac{B_{11} B_{22} - B_{12}^2 - B_{12} B_{66} + 4B_{66}^2}{B_{11} B_{66}} + \frac{B_{22}}{B_{11}} \eta_{1n}^2 + \frac{B_{66}}{B_{11}} \eta_{2n}^2, \\
d_{10} &= (1 - \eta_{2n}^2) \left(1 - \frac{B_{66}}{B_{11}} \eta_{1n}^2 \right) + \frac{B_{12} + 4B_{66}}{B_{22}} \left(\frac{B_{11} B_{22} - B_{12}^2 - 2B_{12} B_{66}}{B_{11} B_{66}} - \frac{B_{22}}{B_{11}} \eta_{1n}^2 - \right. \\
&\quad \left. - \frac{B_{66}}{B_{11}} \eta_{2n}^2 \right) - \varepsilon_n^2 \left(\frac{B_{11} B_{22} - B_{12}^2 - B_{12} B_{66} + 4B_{66}^2}{B_{11} B_{66}} - \frac{B_{22}}{B_{11}} \eta_{1n}^2 \right), \\
d_{11} &= 4\varepsilon_n^2 \left(\frac{B_{11} B_{22} - B_{12}^2 - B_{12} B_{66}}{B_{11} B_{22}} - \frac{B_{66}}{B_{11}} \eta_{1n}^2 \right) - \frac{B_{12} + 4B_{66}}{B_{22}} (1 - \eta_{2n}^2) \left(1 - \frac{B_{66}}{B_{11}} \eta_{1n}^2 \right), \\
g_1 &= a^2 n^2 \varepsilon_n^2 \frac{B_{12} B_{22}}{B_{11} B_{66}} - a^2 n^2 \frac{(B_{12} + B_{66})(B_{12} + 4B_{66})}{B_{11} B_{66}} - \frac{B_{22}}{B_{11}}, \\
g_2 &= -\frac{B_{12}}{B_{11}} (1 - \eta_{2n}^2 + 4a^2 n^2 \varepsilon_n^2), \quad g_3 = \frac{B_{22}}{B_{11}} (1 + 4a^2 n^2 \varepsilon_n^2) \eta_{1n}^2 + \frac{B_{66}}{B_{11}} \eta_{2n}^2 - \\
&\quad - a^2 n^2 \varepsilon_n^2 \frac{B_{11} B_{22} + 4B_{66}^2}{B_{11} B_{66}} - \frac{B_{11} B_{22} - B_{12}^2 - 2B_{12} B_{66}}{B_{11} B_{66}}, \\
g_4 &= \left(1 - \frac{B_{66}}{B_{11}} \eta_{1n}^2 \right) (1 - \eta_{2n}^2) - 4a^2 n^2 \varepsilon_n^2 \frac{B_{66}}{B_{22}} \left(\frac{B_{22}}{B_{11}} \eta_{1n}^2 - \frac{B_{22}}{B_{66}} \right).
\end{aligned}$$

Уравнение (2.10) эквивалентно уравнению

$$\text{Det} \| m_{ij} \|_{i,j=1}^8 = 0. \quad (2.15)$$

С учетом возможных соотношений между λ_1 , λ_2 и λ_3 уравнение (2.15) определяет частоты соответствующих типов колебаний.

Замечание 1. При $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$ уравнение (2.6) является характеристическим уравнением для системы (1.1); уравнение (2.15) при $k = 2\pi n_0 / l$, $n_0 \in N$, является дисперсионным уравнением задачи (1.1)–(1.4), а при $k = \pi / l$ – дисперсионным уравнением задачи (1.1)–(1.3), (1.5) соответственно.

3. Асимптотика дисперсионного уравнения (2.15) при $r_0 \rightarrow 0$

В этом пункте при использовании предыдущих формул будем предполагать, что $\eta_{1n} = \eta_{2n} = \eta_{3n} = \eta_n = \eta / n$. С учетом этого заметим, что при $r_0 \rightarrow 0$ уравнение (2.6) преобразуется в совокупность уравнений:

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{B_{22}}{B_{11}} \chi^4 - \frac{B_{11} B_{22} - B_{12}^2 - 2B_{12} B_{66}}{B_{11} B_{66}} n^2 \chi^2 + \frac{B_{22} + B_{66}}{B_{11}} \eta^2 \chi^2 + \left(n^2 - \frac{B_{66}}{B_{11}} \eta^2 \right) \times \\
&\quad \times (n^2 - \eta^2) = 0, \quad (3.1)
\end{aligned}$$

$$R_{nm} = a^2 \left(\chi^4 - \frac{2(B_{12} + 2B_{66})n^2}{B_{22}} \chi^2 + \frac{B_{11}n^4}{B_{22}} \right) - \frac{B_{66}}{B_{22}} \eta^2 = 0. \quad (3.2)$$

Предельный переход $r_0 \rightarrow 0$ здесь понимается в том смысле, что фиксируя хорду арки в оболочечной конструкции с радиусом R , можно перейти к цилиндрической оболочке радиуса R' , кратного R : $R' = mR$ и к пределу $r'_0 = r_0/m \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$.

Уравнения (3.1), (3.2) являются характеристическими уравнениями для уравнений планарных и изгибных колебаний пластины соответственно [3, 9]; χ/n – корни уравнений (3.1) и (3.2) с неположительными действительными частями, обозначим через y_1, y_2 и y_3, y_4 соответственно. Разделим обе части уравнения (2.6) на $a^2 n^8 B_{22} / B_{11}$ и запишем в следующем виде:

$$(x^2 - y_1^2)(x^2 - y_2^2)(x^2 - y_3^2)(x^2 - y_4^2) + \varepsilon_n^2 P_n(x^2) + \varepsilon_n^4 \bar{d}_n \frac{B_{11}}{B_{22}} \left(\bar{b}_n - \frac{B_{12}}{B_{11}} \right) = 0, \quad (3.3)$$

$$P_n(x^2) = \frac{B_{22}}{B_{66}} A^2 \left\{ \frac{B_{22}}{B_{11}} (x^2 - y_1^2)(x^2 - y_2^2) - \bar{b}_n x^2 + \frac{B_{12}}{B_{22}} \bar{a}_n - \right. \quad (3.4)$$

$$\left. - a^4 n^4 x^2 \bar{g}_n \bar{l}_n^2 + a^4 n^4 (x^2 - y_3^2)(x^2 - y_4^2) \bar{g}_n \bar{d}_n + 2a^2 n^2 x^2 \bar{b}_n \bar{l}_n \right\}, \quad x = \chi/n,$$

$$\bar{a}_n = - \left(\frac{B_{22}}{B_{11}} x^2 + \frac{B_{12}}{B_{11}} - \frac{B_{12}}{B_{11}} \eta_n^2 \right), \quad \bar{b}_n = \frac{B_{22}}{B_{11}} x^2 - \frac{B_{11} B_{22} - B_{12}^2 - B_{12} B_{66}}{B_{11} B_{66}} + \frac{B_{22}}{B_{11}} \eta_n^2,$$

$$\bar{l}_n = x^2 - \frac{B_{12} + 4B_{66}}{B_{22}}, \quad \bar{d}_n = x^2 - \frac{4B_{66}}{B_{22}},$$

$$\bar{g}_n = \frac{B_{22}}{B_{11}} x^2 - \frac{B_{22}}{B_{66}} + \frac{B_{22}}{B_{11}} \eta_n^2, \quad A^2 = \frac{B_{66}}{B_{22} a^2 n^2}.$$

Заметим, что при

$$\varepsilon_n \ll 1, \quad y_i \neq y_j, \quad i \neq j, \quad (3.5)$$

x^2 – корни уравнения (3.3) можно представить в виде

$$x_i^2 = y_i^2 + \alpha_i^{(n)} \varepsilon_n^2 + \beta_i^{(n)} \varepsilon_n^4 + \dots, \quad i = \overline{1, 4}. \quad (3.6)$$

$$\alpha_i^{(n)} = P_n(y_i^2) / \left(\prod_{j=1, j \neq i}^4 (y_j^2 - y_i^2) \right), \quad i = \overline{1, 4}. \quad (3.7)$$

При условии (3.5), используя (2.9), (3.6) и тот факт, что

$$M_{3j}^{(n)} / n^6 = M_{4j}^{(n)} / n^7 = M_{6j}^{(n)} / n^6 = M_{8j}^{(n)} / n^4 = O(\varepsilon_n^2), \quad j = 1, 2, \quad (3.8)$$

уравнение (2.15) можно привести к виду:

$$\begin{aligned} & \text{Det} \left\| m_{ij} \right\|_{i,j=1}^8 = \\ & = - \frac{B_{22}^4}{B_{11}^4} N(\eta_n) N_0(\eta_n) \{ (1 - \eta_n^2) K_{30}^2(\eta_n) \bar{L}_0(\eta_n) \bar{G}_0(\eta_n) + O(\varepsilon_n^2) \} = 0, \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned}
N(\eta_n) &= (y_1 + y_3)(y_2 + y_3)(y_1 + y_4)(y_2 + y_4), \\
N_0(\eta_n) &= (y_1 + y_2)(y_3 + y_4)N(\eta_n), \\
\bar{L}_0(\eta_n) &= K_{20}(\eta_n)(1 - \exp(2(z_1 + z_2))) + \\
&+ (y_1 + y_2)K_{21}(\eta_n)(\exp(z_1) + \exp(z_2))[z_1 z_2], \\
\bar{G}_0(\eta_n) &= K_{10}(\eta_n)(1 - \exp(2(z_3 + z_4))) + \\
&+ (y_3 + y_4)K_{11}(\eta_n)(\exp(z_3) + \exp(z_4))[z_3 z_4], \tag{3.10}
\end{aligned}$$

$$K_{2i}(\eta_n) = (1 - \eta_n^2) \left(\frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2}{B_{22}B_{66}} - \eta_n^2 \right) + (-1)^{1-i} \eta_n^2 y_1 y_2,$$

$$K_{1i}(\eta_n) = y_3^2 y_4^2 + (-1)^i 4 \frac{B_{66}}{B_{22}} y_3 y_4 - \left(\frac{B_{12}}{B_{22}} \right)^2,$$

$$K_{30}(\eta_n) = N_1(\eta_n) + a^2 n^2 N_2(\eta_n) + a^4 n^4 N_3(\eta_n),$$

$$z_j = y_j k n \beta_0, \quad j = \overline{1, 4}, \quad i = 0, 1,$$

$$N_1(\eta_n) = \frac{B_{66}(B_{12} + B_{22})}{B_{11}^2} \eta_n^2 - \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2}{B_{11}^2},$$

$$\begin{aligned}
N_2(\eta_n) &= \left(\frac{B_{22}B_{12} + B_{12}B_{66} + B_{22}B_{66}}{B_{11}^2} \eta_n^2 - \right. \\
&- \left. \frac{B_{11}B_{22}B_{12} + B_{11}B_{22}B_{66} - B_{12}^3 - 3B_{12}^2B_{66} - 4B_{12}B_{66}^2}{B_{66}B_{11}^2} \right) \times \\
&\times \left(\frac{B_{22} + B_{66}}{B_{22}} \eta_n^2 - \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2 - 2B_{12}B_{66}}{B_{22}B_{66}} \right) - \\
&- 2 \left(1 - \frac{B_{66}}{B_{11}} \eta_n^2 \right) \left(\frac{2B_{12} + 4B_{66}}{B_{11}} - \frac{B_{12}}{B_{11}} \eta_n^2 \right), \\
N_3(\eta_n) &= - \frac{B_{22}(B_{12} + B_{66})}{B_{11}B_{66}} \left(1 - \frac{B_{66}}{B_{11}} \eta_n^2 \right) \left\{ (1 - \eta_n^2) \left(\frac{B_{11}}{B_{22}} - \frac{B_{66}}{B_{22}} \eta_n^2 \right) - \right. \\
&- \left. \frac{B_{12} + 4B_{66}}{B_{22}} \left(\frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2 - 2B_{12}B_{66}}{B_{22}B_{66}} - \frac{B_{22} + B_{66}}{B_{22}} \eta_n^2 \right) + \left(\frac{B_{12} + 4B_{66}}{B_{22}} \right)^2 \right\}.
\end{aligned}$$

Из (3.9) следует, что при $r_0/(2n) \rightarrow 0$ уравнение (2.15) распадается на уравнения

$$\bar{G}_0(\eta_n) = 0, \tag{3.11}$$

$$\bar{L}_0(\eta_n) = 0, \quad (3.12)$$

$$K_{30}(\eta_n) = 0. \quad (3.13)$$

Уравнения (3.11), (3.12) являются дисперсионными уравнениями изгибных и планарных колебаний аналогичной задачи для ортотропной пластины-полосы со свободными и шарнирно закрепленными краями ($k = 2\pi n_0 / l$) или прямоугольной пластинки со свободной и тремя шарнирно закрепленными сторонами ($k = \pi / l$).

Если y_1, y_2 и y_3, y_4 являются корнями уравнений (3.1) и (3.2) с отрицательными действительными частями соответственно, то при $n\beta_0 \rightarrow \infty$ уравнение (2.15) преобразуется в уравнение

$$\begin{aligned} \text{Det} \|m_{ij}\|_{i,j=1}^8 &= -\frac{B_{22}^4}{B_{11}^4} N(\eta_n) N_0(\eta_n) \times \\ &\times \left\{ (1 - \eta_n^2) K_{10}(\eta_n) K_{20}(\eta_n) K_{30}^2(\eta_n) + O(\varepsilon_n^2) + \sum_{j=1}^4 O(\exp(z_j)) \right\} = 0. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Из (3.14) следует, что при $r_0 / (2n) \rightarrow 0$ и $n\beta_0 \rightarrow \infty$ дисперсионное уравнение (2.15) распадается на уравнения

$$K_{10}(\eta_n) = y_3^2 y_4^2 + 4 \frac{B_{66}}{B_{22}} y_3 y_4 - \left(\frac{B_{12}}{B_{22}} \right)^2 = 0, \quad (3.15)$$

$$K_{20}(\eta_n) = (1 - \eta_n^2) \left(\frac{B_{11} B_{22} - B_{12}^2}{B_{22} B_{66}} - \eta_n^2 \right) - \eta_n^2 y_1 y_2 = 0, \quad (3.16)$$

$$K_{30}(\eta_n) = N_1(\eta_n) + a^2 n^2 N_2(\eta_n) + a^4 n^4 N_3(\eta_n) = 0. \quad (3.17)$$

Уравнения (3.15) и (3.16) являются дисперсионными уравнениями изгибных и планарных колебаний полубесконечной ортотропной пластинки со свободным краем ($k = 2\pi n_0 / l$) или полубесконечной ортотропной пластинки-полосы со свободным торцом при наличии шарнирного закрепления на боковых краях ($k = \pi / l$) соответственно [3, 9]. Уравнение (3.17) является следствием того, что используется система уравнений соответствующей классической теории ортотропных цилиндрических оболочек. Следовательно, при малых ε_n и больших $n\beta_0$ приближенными значениями корней уравнения (2.15) являются корни уравнения (3.15)–(3.17).

4. Асимптотика дисперсионного уравнения (2.15) при $\beta_0 \rightarrow \infty$

В этом пункте во всех формулах, выведенных ранее, будем предполагать, что χ_1, χ_2, χ_3 и χ_4 (корни уравнения (2.6)) имеют отрицательные действительные части. Тогда уравнение (2.15) можно привести к виду

$$\text{Det} \|m_{ij}\|_{i,j=1}^8 = \text{Det} \|m_{ij}\|_{i,j=1}^4 \cdot \text{Det} \|m_{ij}\|_{i,j=5}^8 + \sum_{j=1}^4 O(\exp(k\chi_j \beta_0)) = 0. \quad (4.1)$$

Из (4.1) следует, что при $\beta_0 \rightarrow \infty$ уравнение (2.15) распадается на уравнения

$$\text{Det} \|m_{ij}\|_{i,j=1}^4 = 0, \quad \text{Det} \|m_{ij}\|_{i,j=5}^8 = 0. \quad (4.2)$$

Первое уравнение в (4.2) при $n \in N$ определяет частоты всевозможных локализо-

ванных собственных колебаний у свободной образующей оболочечной конструкции, составленной из счетного числа одинаковых ортотропных незамкнутых бесконечных цилиндрических оболочек ($k = 2\pi n_0 / l$), или частоты всевозможных локализованных собственных колебаний у свободной образующей оболочечной конструкции, составленной из счетного числа одинаковых ортотропных незамкнутых конечных цилиндрических оболочек ($k = \pi / l$) при наличии шарнирного закрепления Навье на боковых краях. Заметим, что при $r_0 / (2n) \rightarrow 0$ имеем [3, 9]:

$$\text{Det} \|m_{ij}\|_{i,j=1}^4 = \frac{B_{22}^2}{B_{11}^2} N(\eta_n) \{K_{10}(\eta_n) K_{20}(\eta_n) K_{30}(\eta_n) + O(\varepsilon_n^2)\}, \quad (4.3)$$

$$\text{Det} \|m_{ij}\|_{i,j=5}^8 = -\frac{B_{22}^2}{B_{11}^2} N_0(\eta_n) \{(1 - \eta_n^2) K_{30}(\eta_n) + O(\varepsilon_n^2)\}. \quad (4.4)$$

Учитывая формулы (4.1), (4.3) и (4.4), еще раз убеждаемся в справедливости асимптотической формулы (3.14).

В табл. 1 приведены приближенные значения некоторых η_n -корней уравнения (3.17) и уравнения (3.15), (3.16) с коэффициентами затухания соответствующих форм $k\chi_0/n$ для тонкостенных пластинчатых конструкций, изготовленных из стеклопластика с механическими параметрами [13]:

$$\rho = 1200 \text{ кг/м}^3, \quad E_1 = 100 \text{ Н/м}^2, \quad E_2 = 100 \text{ Н/м}^2, \\ G = 0,5 \cdot 9,8 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2, \quad \nu_1 = 0,26, \quad \nu_2 = 0,06 \quad (4.5)$$

и геометрическими параметрами: ширина $s = 4$, длина $l = 2s$, $k = \pi/l$, $h = 1/50$ при $\beta_0 = 5s$ и $\beta_0 = s$ соответственно.

Таблица 1

m	$\bar{L}_0(\eta_m)=0, \beta_0=5s$		$\bar{L}_0(\eta_m)=0, \beta_0=s$		$\bar{G}_0(\eta_m)=0, \beta_0=5s$		$\bar{G}_0(\eta_m)=0, \beta_0=s$		$K_{30}(\eta_m) = 0$
	$k\chi_0/n$	η/n	$k\chi_0/n$	η/n	$k\chi_0/n$	η/n	$k\chi_0/n$	η/n	η/n
1	-0,0501	0,97706	-0,1007	0,90364	0,+iq	0,00830	0,+iq	0,00962	3,21141
2	-0,0411	0,98460	-0,0730	0,95069	0,+iq	0,01649	0,+iq	0,01718	3,20935
3	-0,0389	0,99862	-0,0612	0,96561	0,+iq	0,02491	0,+iq	0,02517	3,20575
4	-0,0383	0,98664	-0,0545	0,97285	0,+iq	0,03310	0,+iq	0,03328	3,20028
5	-0,0382	0,98673	-0,0501	0,97706	-0,0121	0,04119	0,+iq	0,04144	3,19239
9	-0,0382	0,98676	-0,0421	0,98389	-0,0142	0,07413	0,+iq	0,07425	2,70877, 3,07727
10	-0,0382	0,98676	-0,0411	0,98460	-0,0143	0,08237	0,+iq	0,08247	-
20	-0,0382	0,98676	-0,0383	0,98664	-0,0144	0,16474	-0,0088	0,16477	-
110	-0,0382	0,98676	-0,0382	0,98676	-0,0144	0,90605	-0,0144	0,90605	3,36585, 3,62153
120	-0,0382	0,98676	-0,0382	0,98676	-0,0144	0,98842	-0,0144	0,98842	3,36510, 3,62355
130	-0,0382	0,98676	-0,0382	0,98676	-0,0144	1,07079	-0,0144	1,07079	3,36453, 3,62512

Для безразмерной характеристики частот (корни уравнения (3.16)) локализованных волн у свободного края полубесконечной пластинки, изготовленной из стеклопластика с параметрами (4.5), имеем $\eta_n^{(2)} \approx 0,9868$. Численный анализ показывает, что у свободной образующей пластинчатой конструкции, когда противоположная граничная образующая шарнирно закреплена, могут появляться локализованные колебания. При $n\beta_0 \rightarrow \infty$ частоты локализованных волн у свободного края пластинчатой конструкции, составленной из бесконечных одинаковых пластин-полос, и локализованных колебаний у свободной образующей пластинчатой конструкции,

составленной из одинаковых прямоугольных пластин при наличии шарнирного закрепления боковых краев, стремятся к частотам аналогичных задач для полубесконечной пластинки и полубесконечной пластинки-полосы соответственно.

В табл. 2, 3 приведены некоторые безразмерные характеристики собственных значений η/n и характеристики коэффициентов затухания соответствующих форм $k\chi_0/n$ для тонкостенных конструкций оболочечного типа, изготовленных из стеклопластика с механическими параметрами (4.5) и геометрическими параметрами $R = 40$, $r_0 = 0,1274$, $k = \pi/l$, $h = 1/50$, $l = 2s$, $s = 4,00167$ при $\beta_0 = 5s$ и $\beta_0 = s$ соответственно. Отметим, что модули упругости E_1 и E_2 соответствуют направлениям вдоль образующей и направляющей. В качестве характеристики коэффициентов затухания, приведены значения следующих величин:

$$k\chi_0/n = \max\{k \operatorname{Re} \chi_1/n, k \operatorname{Re} \chi_2/n, k \operatorname{Re} \chi_3/n, k \operatorname{Re} \chi_4/n\}. \quad (4.6)$$

Таблица 2

m	$\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = \eta$		$\eta_1 = \eta_2 = 0, \eta_3 = \eta$		$\eta_1 = \eta_2 = \eta, \eta_3 = 0$		$\eta_2 = \eta_3 = \eta, \eta_1 = 0$	
	$k\chi_0/n$	η/n	$k\chi_0/n$	η/n	$k\chi_0/n$	η/n	$k\chi_0/n$	η/n
1	-0,4047 б	0,01678	-0,4047 б	0,01678	-0,4009 е	0,68975	-0,4047 б	0,01678
2	-0,2773 б	0,02213	-0,2773 б	0,02214	-0,3672 е	0,89948	-0,2773 б	0,02213
3	-0,2199 б	0,02872	-0,2200 б	0,02872	-0,1202 е	0,96245	-0,2199 б	0,02872
4	-0,1871 б	0,03588	-0,1872 б	0,03589	-0,0642 е	0,97842	-0,1871 б	0,03588
5	-0,1664 б	0,04336	-0,1665 б	0,04337	-0,0489 е	0,98325	-0,1664 б	0,04336
8	-0,0974 б	0,06680	-0,0971 б	0,06681	-0,0398 е	0,98622	-0,0974 б	0,06680
9	-0,0629 б	0,07482	-0,0628 б	0,07482	-0,0392 е	0,98642	-0,0629 б	0,07482
10	-0,0462 б	0,08289	-0,0461 б	0,08289	-0,0388 е	0,98654	-0,0462 б	0,08289
20	-0,0164 б	0,16475	-0,0165 б	0,16475	-0,0382 е	0,98674	-0,0165 б	0,16475
110	-0,0144 б	0,90568	-0,0144 б	0,90568	-0,0382 е	0,98676	-0,0144 б	0,90568
120	-0,0382 е	0,98676	-	-	-0,0382 е	0,98676	-0,0207 т	0,98771
	-0,0144 б	0,98802	-0,0144 б	0,98801	-	-	-0,0144 б	0,98802
130	-0,0382 е	0,98676	-0,0144 б	1,07035	-0,0382 е	0,98676	-0,0366 т	0,98772

Таблица 3

m	$\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = \eta$		$\eta_1 = \eta_2 = 0, \eta_3 = \eta$		$\eta_1 = \eta_2 = \eta, \eta_3 = 0$		$\eta_2 = \eta_3 = \eta, \eta_1 = 0$	
	$k\chi_0/n$	η/n	$k\chi_0/n$	η/n	$k\chi_0/n$	η/n	$k\chi_0/n$	η/n
3	-	-	-	-	-0,1317 е	0,95501	-	-
7	-	-	-	-	-0,0472 е	0,98111	-	-
8	-0,1004 б	0,06678	-0,1001 б	0,06678	-0,0447 е	0,98261	-0,1004 б	0,06678
9	-0,0665 б	0,07478	-0,0663 б	0,07478	-0,0429 е	0,98368	-0,0665 б	0,07478
10	-0,0504 б	0,08285	-0,0503 б	0,08285	-0,0417 е	0,98445	-0,0504 б	0,08285
20	-0,0194 б	0,16472	-0,0194 б	0,16472	-0,0384 е	0,98663	-0,0194 б	0,16472
110	-0,0144 б	0,90568	-0,0144 б	0,90568	-0,0382 е	0,98676	-0,0144 б	0,90568
120	-0,0382 е	0,98676	-	-	-0,0382 е	0,98676	-0,0207 т	0,98771
	-0,0144 б	0,98802	-0,0144 б	0,98801	-	-	-0,0144 б	0,98802
130	-0,0382 е	0,98676	-0,0144 б	1,07035	-0,0382 е	0,98676	-0,0366 т	0,98772

Замечание 2. Чтобы различать типы колебаний, в таблицах между характеристиками коэффициентов затухания и собственными частотами, условимся отмечать буквой "б" преимущественно изгибный тип колебаний, "е" – преимущественно планарный тип колебаний, и "т" – преимущественно крутильный тип колебаний.

Замечание 3. Корням уравнения (3.17) соответствуют незатухающие планарные колебания оболочечной конструкции. Существует зона волновых чисел $10 \leq n \leq 37$, где уравнение (3.17) не имеет действительных корней.

В табл. 2, 3 первые колонки соответствуют задаче (1.1)–(1.3), (1.5), вторые колонки – преимущественно изгибному типу колебаний, третьи – преимущественно планарному типу, а четвертые – преимущественно изгибно-крутильному типу. Отметим, что первые частоты собственных колебаний, локализованных у свободного края тонкостенной конструкции оболочечного типа, где присутствует нормальная компонента силы инерции, являются частотами колебаний преимущественно изгибного типа.

При $r_0/n \rightarrow 0$ собственные колебания для задач (1.1)–(1.4), (1.1)–(1.3), (1.5) расчленяются на квазипоперечные и квазитангенциальные колебания. При этом частоты этих задач стремятся к частотам аналогичных задач для пластинки-полосы и прямоугольной пластинки соответственно. При увеличении n колебания квазипоперечного типа становятся незатухающими. Безразмерные характеристики η_n собственной частоты квазитангенциальных колебаний стремятся к корню уравнения Рэлея (3.16).

При $n\beta_0 \rightarrow \infty$ частоты волн, локализованных у свободной образующей тонкостенной конструкции оболочечного типа, составленной из одинаковых ортотропных незамкнутых бесконечных цилиндрических оболочек ($k = 2\pi n_0/l$), и частоты колебаний, локализованных у свободной образующей тонкостенной конструкции оболочечного типа, составленной из одинаковых ортотропных незамкнутых конечных цилиндрических оболочек ($k = \pi/l$) при наличии шарнирного закрепления Навье на граничных направляющих, стремятся соответственно к частотам волн тонкостенной конструкции оболочечного типа, составленной из счетного числа одинаковых ортотропных незамкнутых бесконечных цилиндрических оболочек ($k = 2\pi n_0/l$), или частотам колебаний, локализованных у свободной образующей оболочечной конструкции, составленной из счетного числа одинаковых ортотропных незамкнутых конечных цилиндрических оболочек ($k = \pi/l$) при наличии шарнирного закрепления Навье на боковых краях.

Колебания преимущественно изгибно-крутильного типа ($\eta_2 = \eta_3 = \eta$, $\eta_1 = 0$) при достаточно больших n расчленяются на квазипоперечные и преимущественно крутильные типы колебаний. При дальнейшем увеличении n колебания квазипоперечного типа становятся незатухающими (в таблицах параметры для незатухающих колебаний не приводятся или коэффициенты затухания записаны в виде $0. + iq$).

Численный анализ показывает, что первые частоты являются частотами колебаний преимущественно квазипоперечного типа. Процесс затухания зависит от типа колебаний, от геометрических и физических параметров конструкции: колебания квазипоперечного типа в основном затухают медленнее, чем остальные типы колебаний. Асимптотические формулы (3.9) и (3.15) дисперсионного уравнения (2.15) являются хорошим ориентиром для нахождения собственных частот задач (1.1)–(1.4) и (1.1)–(1.3), (1.5).

Литература

1. *Гринченко, В.Т.* Гармонические колебания и волны в упругих телах / В.Т. Гринченко, В.В. Мелешко. – Киев: Наукова думка, 1981. – 284 с.

2. *Гринченко, В.Т.* Эффекты локализации волновых движений в упругих волноводах / В.Т. Гринченко // Прикладная механика. – 2005. – Т. 41, № 9. – С. 38–45.
3. *Гулгазарян, Г.Р.* О волнах, локализованных у образующей полубесконечной ортотропной гофрированной тонкой упругой цилиндрической оболочки / Г.Р. Гулгазарян // Вестник ННГУ. Серия Механика / Н.Новгород: Изд-во ННГУ. – 2003. – Вып. 1(5). – С. 23–31.
4. *Gulgazaryan, G.R.* Vibrations of a semi-infinite, orthotropic, cylindrical shells of open profile / G.R. Gulgazaryan // Int. Appl. Mech. – 2004. – Vol. 40, №2. – P. 199–212.
5. *Гулгазарян, Г.Р.* О локализованных собственных колебаниях у свободного торца полубесконечной замкнутой цилиндрической оболочки / Г.Р. Гулгазарян // Изв. РАН. МТТ. – 2003. – №1. – С. 180–192.
6. *Гулгазарян, Г.Р.* О колебаниях тонкой упругой ортотропной цилиндрической оболочки со свободными краями / Г.Р. Гулгазарян, Л.Г. Гулгазарян // Проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сб. / Нижегород. ун-т. – 2006. – Вып. 68. – С. 150–160.
7. Свободные колебания элементов оболочечных конструкций / Я.М. Григоренко, Е.И. Беспалова, А.Б. Китайгородский, А.И. Шинкар. – Киев: Наукова думка, 1986. – 170 с.
8. *Гулгазарян, Г.Р.* Колебания ортотропной гофрированной цилиндрической оболочки со свободными краями / Г.Р. Гулгазарян, Л.Г. Гулгазарян // Прикладная механика. – 2006. – Т. 42, № 12. – С. 97–114.
9. *Гулгазарян, Г.Р.* Волны у образующей полубесконечной ортотропной гофрированной тонкой упругой цилиндрической оболочки / Г.Р. Гулгазарян // В сб.: Математический анализ и его приложения. – Ереван. – 2003. – Вып.3. – С.41–93.
10. *Амбарцумян, С.А.* Общая теория анизотропных оболочек / С.А. Амбарцумян. – М.: Наука, 1974. – 446 с.
11. *Гольденвейзер, А.Л.* Свободные колебания тонких упругих оболочек / А.Л. Гольденвейзер, В.Б. Лидский, П.Е. Товстик. – М.: Наука, 1979. – 383 с.
12. *Курош, А.Г.* Курс высшей алгебры / А.Г. Курош. – М.: Наука, 1968. – 431 с.
13. *Гулгазарян, Г.Р.* Плотность частот свободных колебаний тонкой анизотропной оболочки, составленной из анизотропных слоев / Г.Р. Гулгазарян, В.Б. Лидский // Изв. АН СССР. МТТ. – 1982. – №3. – С. 171–174.

[03.09.2007]

**VIBRATIONS OF A THIN-WALLED STRUCTURE CONSTRUCTED
FROM ORTHOTROPIC ELASTIC NON-CLOSED CYLINDRICAL SHELLS
WITH FREE AND SIMPLE SUPPORT BOUNDARY CONDITIONS
AT THE EDGE GENERATORS**

G. R. Ghulghazaryan, R.D. Sahakyan

The problem of existence of natural vibrations of an elastic orthotropic thin-walled structure constructed from circular non-closed infinite cylindrical shells with free and simple support boundary conditions on the edge generators and an elastic orthotropic thin-walled structure constructed from circular non-closed finite cylindrical shells with free and simple support Navier's boundary conditions at the edge generators, which have a simple support on the boundary directional curves, are studied. Using the system of equations of the related classical theory of orthotropic cylindrical shells dispersion equations and asymptotic formulas are obtained for determining the eigenvalue frequencies of possible vibration types for the corresponding thin-walled structures. An algorithm for separating the possible vibrations is presented. Approximate values of dimensionless characteristics of eigenvalue frequencies and fading characteristics of the related vibration forms are given for the cases of orthotropic thin-walled structures constructed from various numbers of identical circular non-closed finite cylindrical shells.