

УДК 620.178.3, 629.735, 62-192 DOI: 10.32326/1814-9146-2025-87-4-527-538

ОЦЕНКА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПРЕДЕЛА ВЫНОСЛИВОСТИ МЕТОДАМИ СТАТИСТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ УСТАЛОСТНЫХ ИСПЫТАНИЙ. ЧАСТЬ 2

© 2025 г.

Агамиров Л.В.^{1,2,3}, Агамиров В.Л.^{1,3},
Вестяк В.А.¹, Тутова Н.В.³

¹Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Российская Федерация

²Национальный исследовательский университет «МЭИ»,
Москва, Российская Федерация

³Московский технический университет связи и информатики (МТУСИ),
Москва, Российская Федерация

kaf311@yandex.ru

Поступила в редакцию 04.05.2025

В первой части исследования, опубликованной в предыдущем номере журнала, была получена оценка пределов выносливости по кривой усталости при испытаниях, проводимых на нескольких уровнях амплитуд переменных напряжений в широком диапазоне долговечностей, а также испытаниях, проводимых для оценки параметров уравнения подобия усталостного разрушения с целью последующего комбинированного статистического моделирования с элементами «бутстреп»-оценок и метода Монте-Карло.

Настоящая статья является продолжением исследования. Для тех же целей рассматривается оценка пределов выносливости методом «вверх-вниз». Метод «вверх-вниз» не предназначен для построения полноценной кривой усталости в широком диапазоне долговечностей, но позволяет форсированным способом определять распределение предела выносливости, соответствующего некоторой фиксированной (базовой) долговечности. Математическая модель метода испытаний «вверх-вниз» имеет строгое вероятностно-статистическое обоснование, основана на методе максимального правдоподобия и не требует знания априорной информации о характеристиках случайных величин, в отличие от других ускоренных методов усталостных испытаний, таких как Про, Эномото, Локати. Необходимо лишь приближенно задать при проведении эксперимента значение начального уровня амплитуды напряжения цикла и диапазон между уровнями, который в продолжение испытаний выдерживается постоянным. В качестве гипотетических функций распределения рассматриваются нормальный закон, логарифмически нормальный закон и закон Вейбулла для предела выносливости. Существенный выигрыш во времени по сравнению с полномасштабным усталостным экспериментом и высокая точность позволяют рекомендовать этот метод для оценки предела выносливости. Генерация непараметрической функции распределения предела выносливости для сравнительной оценки различных групп наблюдений с помощью биномиального критерия осуществляется

статистическим моделированием методом Монте-Карло, как и в первой части исследования.

Ключевые слова: усталостные испытания, предел выносливости, метод «вверх-вниз», метод Монте-Карло, биномиальный критерий, программы на С.

Введение

Надежное обоснование ресурса машин и конструкций, эксплуатируемых под действием переменных во времени напряжений, возможно, в том числе, правильной организацией системы усталостных испытаний материалов, конструктивно-подобных образцов, элементов конструкций и натурных изделий [1–10]. Получение надежно обоснованной кривой усталости материалов и элементов конструкций, подробно рассмотренное в [1], является во всех отношениях предпочтительным. Однако большая длительность усталостных испытаний, значительные разбросы долговечности, особенно при низких амплитудах напряжений, высокая стоимость как материалов, так и натурных объектов, вызывают необходимость ускоренных методов [11–13], сокращающих время эксперимента и размеры выборочных совокупностей, что особенно актуально при ограниченных объемах экспериментального материала [14–18].

Кроме этого, усталостные испытания, особенно в условиях заводских лабораторий, зачастую проводятся в качестве контрольных на одном уровне нагрузки с целью подтверждения заданных конструктивных параметров, а также в сравнительных целях для обоснования выбора материала, полуфабриката или технологического процесса.

Для определения функции распределения предела выносливости как важнейшей справочной характеристики применяются такие ускоренные методы усталостных испытаний, как методы «вверх-вниз», пробитов [11]. Существует также целый ряд форсированных методов: Про, Эномото, Локати, долома [12], которые требуют наличия существенной априорной информации, как правило неизвестной, особенно для новых материалов.

Предел выносливости относится к числу косвенных характеристик механических свойств, так как он не подлежит непосредственному измерению. Обычно его определяют путем экстраполяции (или интерполяции) по кривой усталости. В то же время весьма эффективный метод «вверх-вниз» позволяет существенно сократить потребные объемы выборочных совокупностей и время проведения эксперимента. Целью настоящей статьи является разработка и анализ возможностей метода «вверх-вниз» для оценки распределения предела выносливости и статистического моделирования усталостных испытаний, проводимых различными методами.

1. Оценка параметров функции распределения предела выносливости методом «вверх-вниз»

Метод «вверх-вниз» впервые представлен Диксоном и Мудом [19] применительно к биологическим системам выживания для случайных величин, определяемых косвенным способом. Кроме предела выносливости, такими случайными величинами могут быть дозы лекарственного препарата, обеспечивающего положительный эффект при медико-биологических исследованиях, и другие характеристики, действие которых так или иначе связано с влиянием на продолжительность жизненного цикла уровня нагрузки как механической, так и биологической системы.

В соответствии с методом «вверх-вниз» первый объект из серии n объектов испытывают при значении исследуемого случайного фактора, равном ожидаемому. Если первый образец не достигает критического состояния за заданное время, то второй объект испытывают при более высоком значении фактора, а если достигает, то испытание второго объекта проводят при более низком значении фактора. Уровень значения фактора для испытания третьего объекта выбирают в зависимости от результатов испытания второго. Функция максимального правдоподобия (МП) имеет вид:

$$L = C \prod_{i=1}^m p_i^{k_i} (1-p_i)^{l_i}, \quad (1)$$

где m – количество уровней факторов, реализованных при испытаниях; k_i – число достигших критического состояния объектов на i -м уровне; l_i – число не достигших критического состояния объектов на i -м уровне; $n_i = k_i + l_i$ – число испытаний на i -м уровне; $n = \sum_{i=1}^m n_i$ – общее число испытанных объектов; $p_i = F(x_i)$ – вероятность достижения критического состояния на i -м уровне x_i ; $F(x, g_1, g_2, \dots, g_{k_1})$ – непрерывная дифференцируемая функция распределения исследуемого фактора с параметрами g_j ($j = 1, \dots, k_1$), которые подлежат оценке в соответствии с принятым теоретическим законом распределения.

При испытаниях методом «вверх-вниз» k_i , l_i , n_i являются величинами случайными. Оценки максимального правдоподобия параметров распределения определяют решением системы k_1 уравнений с учетом (1):

$$\left. \frac{\partial \ln L}{\partial g_j} \right|_{g=\bar{g}} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial F(x_i)}{\partial g_j} \cdot \left(\frac{k_i}{F(x_i)} - \frac{l_i}{1-F(x_i)} \right) = 0, \quad j = \overline{1, k_1}. \quad (2)$$

Производные $\partial F(x_i)/\partial g_j$ определяют конкретный вид системы уравнений (2).

Для нормального распределения $g_1 = a$, $g_2 = \sigma$, $z = (\sigma_a - a)/\sigma$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial a} &= -\frac{\varphi(z)}{\sigma}, & \frac{\partial F}{\partial \sigma} &= -\frac{z \cdot \varphi(z)}{\sigma}, & z &= \frac{\sigma_a - a}{\sigma}, & \varphi(z) &= \frac{\exp(-z^2/2)}{\sqrt{2\pi}}, \\ F(x) &= \Phi(z) = \int_{-\infty}^z \varphi(x) dx, \end{aligned} \quad (3)$$

где σ_a – амплитуда переменных напряжений (МПа), a , σ – математическое ожидание и стандартное отклонение случайной величины a ; $F(x) = \Phi(z)$ – функция распределения нормированной случайной величины z ; $\varphi(z)$ – плотность вероятности нормированной случайной величины z .

Для двухпараметрического логарифмически нормального распределения

$$z_l = \frac{\ln x - a_l}{\sigma_l} = \frac{\ln \sigma_a - a_l}{\sigma_l}, \quad (4)$$

где a_l , σ_l – математическое ожидание и стандартное отклонение случайной величины $\ln \sigma_a$.

Все остальные обозначения те же, что и в формуле (3) с соответствующей заменой индексов. Для двухпараметрического распределения Вейбулла:

$$z_w = \frac{\ln \sigma_a - a_w}{\sigma_w}, \quad a_w = \ln c, \quad b = \frac{1}{\sigma_w}, \quad (5)$$

$\varphi(z_w) = \exp(z_w - \exp z_w)$, $F(z_w) = F(\sigma_a) = 1 - \exp(-\exp z_w) = 1 - \exp(-(\sigma_a/c)^b)$ – функция плотности $\varphi(z_w)$ и функция распределения $F(z_w) = F(\sigma_a)$ Вейбулла, представленного в виде параметров сдвига a_w и масштаба σ_w ; b и c – параметры исходного распределения Вейбулла.

Для нормального распределения предела выносливости линейная аппроксимация [19] системы уравнений (2) приводит при определенных ограничениях к простым оценкам параметров:

$$\bar{a} = \sigma_0 + d \left[\frac{\sum_{i=0}^m i \cdot k_i}{\sum_{i=0}^m k_i} \pm 0,5 \right], \quad (6)$$

$$\bar{\sigma} = 1,62d \left[\frac{\sum_{i=0}^m k_i \cdot \sum_{i=0}^m i^2 \cdot k_i - (\sum_{i=0}^m i \cdot k_i)^2}{(\sum_{i=0}^m k_i)^2} + 0,029 \right], \quad (7)$$

где d – интервал между уровнями фактора, который в продолжение испытаний выдерживается постоянным. После проведения испытаний перед расчетом по формулам (6), (7) устанавливают общее число критических и некритических значений. Если общее число объектов, достигших критического состояния $\sum_{i=1}^m k_i$, меньше числа не достигших $\sum_{i=1}^m l_i$, расчет ведут по критическому количеству объектов. В этом случае в формуле (6) ставят знак минус. В противном случае расчет ведут по некритическому количеству объектов, то есть в формулах (6), (7) вместо k_i подставляют l_i и в формуле (6) ставят знак плюс. Формула (7) дает удовлетворительные результаты при значении первого слагаемого в квадратных скобках больше 0,3. В противном случае необходимо решать численными методами систему уравнений (2) с учетом соотношений (3)–(5).

Ковариационная матрица оценок параметров определяется из соотношений:

$$(\mathbf{v}) = (\mathbf{\mu})^{-1}, \quad (8)$$

$$\mu_{i,j} = \sum_{q=1}^m \frac{\partial F(\sigma_{aq})}{\partial g_i} \cdot \frac{\partial F(\sigma_{aq})}{\partial g_j} \cdot \left[\frac{k_q}{F^2(\sigma_{aq})} + \frac{l_q}{[1 - F(\sigma_{aq})]^2} \right], \quad i, j = 1, \dots, k_1.$$

Ожидаемые значения параметров распределения и числа случаев с разрушениями и без разрушений определяются из выражений:

$$k_i = \frac{n}{2} \cdot \frac{\omega_i}{\sum_{i=-\infty}^{\infty} \omega_i}, \quad (9)$$

$$\omega_i = \prod_{j=1}^i \frac{F_j}{1 - F_j} \text{ при } F_i < 0,5, \quad (10)$$

$$\omega_i = \prod_{j=0}^{i-1} \frac{1 - F_j}{F_j} \text{ при } F_i > 0,5, \quad (11)$$

$$\omega_0 = 1 \text{ при } F_i = 0,5, \quad (12)$$

$$n = 2k_0 \sum_{i=-\infty}^{\infty} \omega_i, \quad (13)$$

где n – ожидаемое значение общего числа испытаний.

Ожидаемое значение числа случаев без разрушений на i -м уровне связано с числом разрушений соотношением:

$$l_i = k_{i+1} = k_i \frac{1-F_i}{F_i}, \quad (14)$$

где F в целях сокращения записи обозначает $F(\sigma_a)$. С учетом (9)–(14) уравнение (8) примет вид:

$$\mu_{i,j} = \frac{n}{2\sum_{q=-\infty}^{\infty} \omega_q} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \frac{\partial F_q}{\partial g_i} \cdot \frac{\partial F_q}{\partial g_j} \cdot \frac{\omega_q}{F_q^2(1-F_q)}, \quad i, j = 1, \dots, k_1. \quad (15)$$

Приближенные нижние $\sigma_{p\text{low}}$ и верхние $\sigma_{p\text{up}}$ доверительные границы для квантиля уровня p предела выносливости с доверительной вероятностью β определяются по формулам [11, 13]:

$$\sigma_{p,\text{low,up}} = \bar{a} + \frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{n}} t_{\text{low,up}}, \quad (16)$$

$$t_{\text{low,up}} = \frac{A \mp \sqrt{A^2 - B \cdot C}}{B}, \quad (17)$$

$$A = \left[1 - \frac{v_{2,2}}{2f} \right] \cdot \Delta - \frac{z_{\beta}^2 v_{1,2}}{\sqrt{n}}, \quad B = \left[1 - \frac{v_{2,2}}{2f} \right]^2 - \frac{z_{\beta}^2 v_{2,2}}{f}, \quad C = \Delta^2 - z_{\beta}^2 v_{1,1}, \quad (18)$$

где $\Delta = z_p \sqrt{n}$ – для нормального и логарифмически нормального закона; $\Delta = -\ln \ln(1/(1-p))\sqrt{n}$ – для закона Вейбулла; z_{β} – квантиль нормированного нормального закона уровня β , $f = n - 1$; v_{ij} – элементы ковариационной матрицы (8). Параметры сдвига и масштаба определяются по соотношениям (5). Программа расчета всех параметров функции распределения предела выносливости методом «вверх-вниз» приведена в [20].

В таблице 1 приведены результаты усталостных испытаний методом «вверх-вниз» 40 образцов из углеродистой стали с $\sigma_B = 600$ МПа.

Таблица 1
Результаты испытаний образцов методом «вверх-вниз»

σ_a , МПа	Количество образцов		
	разрушенных (k)	неразрушенных (l)	общее (n)
285	0	1	1
290	1	8	9
295	9	6	15
300	7	4	11
305	4	0	4

Оценки параметров для нормального распределения определялись решением системы уравнений (2) численным методом и составили: $\bar{a} = 295,5$ МПа, $\bar{\sigma} = 6,18$ МПа. Верхние и нижние доверительные границы квантиля уровня $p = 0,1$ ($z_p = 1,282$) предела выносливости с доверительной вероятностью 0,9 равны соответственно:

$$\hat{\sigma}_{p\text{up}} = 292,3 \text{ МПа}, \quad \hat{\sigma}_p = \bar{a} + z_p \bar{\sigma} = 287,6 \text{ МПа}, \quad \hat{\sigma}_{p\text{low}} = 282,9 \text{ МПа}.$$

2. Статистическое моделирование предела выносливости методом «вверх-вниз»

При статистическом моделировании усталостных испытаний, проводимых методом «вверх-вниз», необходимо иметь уравнение медианной кривой усталости, отражающей усталостные свойства объекта. Затем выбирается начальный уровень амплитуды напряжения, по кривой усталости определяется среднее значение долговечности для этого уровня и генерируется случайное число с заданным законом распределения долговечности. Для моделирования необходимо задать параметры распределения, например для нормального закона – это среднее и дисперсия. Полученное значение сравнивается с фиксированным значением базовой долговечности, для которой оценивается функция распределения предела выносливости, и устанавливается факт превышения или не превышения этого значения (то есть разрушения или неразрушения). Опыт дублируется n раз в соответствии с методом «вверх-вниз», описанным выше, и формируется таблица по типу таблицы 1, рассмотренной в примере. Затем вычисляются соответствующие оценки и моделирование повторяется для решения поставленных задач.

3. Сравнительная оценка пределов выносливости для разных групп усталостных испытаний

Для статистического сравнения моделюемых значений пределов выносливости используются непараметрические процедуры, например биномиальный тест (критерий знаков) [21]. При использовании критерия рассматривают последовательность, состоящую из n независимых испытаний, в каждом из которых могут осуществляться лишь два исхода: положительный и отрицательный. Критерий знаков для медианы предназначен для проверки гипотезы равной вероятности положительного и отрицательного исходов.

Пусть проведены испытания первой (X) и второй (Y) совокупностей и получены значения случайных величин, расположенные в порядке испытаний: $x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_n$. Далее определяют знаки разностей пар результатов испытаний образцов с одинаковым индексом. Нулевые разности не учитывают. Пусть в n парах испытаний получены k положительных разностей, m отрицательных и l нулевых. Нулевую гипотезу о равенстве медиан двух совокупностей не отвергают с уровнем значимости α , если меньшее из значений $\{k, m\}$ больше критического значения p_α :

$$p_\alpha = 0,5M + u_\alpha \cdot 0,5\sqrt{M}, \quad (19)$$

где u_α – квантиль нормированного нормального распределения для уровня значимости α . Программа сравнительной оценки пределов выносливости на языке C++ представлена в репозитарии ([github_1](#)).

Необходимо отметить, что разные группы усталостных испытаний во многих случаях будут заведомо отличаться, в этом случае следует привлечь концепцию обобщенной кривой усталости [1], корректируя значения расчетных амплитуд последовательным делением на амплитуду на базе 10^6 или 10^7 циклов. Если биномиальный критерий позволит объединить амплитуды, то можно сформировать единые кривые усталости для разнородных групп в относительных координатах, что позволит обобщить результаты экспериментальных исследований, существенно повысить информативность выборочных совокупностей. В этом случае необходимо

применить метод «вверх-вниз» для оценки предела выносливости на фиксированной базе (в нашем случае 10^6 или 10^7 циклов).

В качестве примера моделирования в таблице 2 представлены результаты сравнительного анализа двух групп усталостных испытаний титанового сплава ВТ3-1 по данным таблиц 1, 2 из [1]. Расчеты выполнялись по программе, представленной в [github_1](#). Число повторений при моделировании составляло $M = 500$. Базовые долговечности, для которых рассчитывались пределы выносливости, составляли 10^4 , 10^5 , 10^6 , $10^{6.5}$ и $10^{7.3}$ циклов. Пределы ограниченной выносливости относились к пределу выносливости для базы 10^7 циклов. На каждом шаге моделирования вычислялись параметры кривой усталости методом наименьших квадратов и рассчитывались пределы ограниченной выносливости для указанных базовых долговечностей. Подробная методика рассмотрена в [1]. Предел неограниченной выносливости определялся методом последовательных приближений. Критическое значение критерия знаков определялось по формуле (19) и для уровня значимости 0,05 составило $p_\alpha = 224$.

Таблица 2
**Результаты сравнительного статистического моделирования
 усталостных испытаний титанового сплава ВТ3-1**

Параметры критерия	10^4	10^5	10^6	$10^{6.5}$	$10^{7.3}$
Положительные разности	92	137	231	262	197
Отрицательные разности	408	363	269	238	303
Выполнение нулевой гипотезы о медианах предела выносливости	Нет	Нет	Да	Да	Нет

Из таблицы 2 видно, что гипотеза об отсутствии различий в относительных медианах пределов выносливости подтверждается для базовых долговечностей 10^6 и $10^{6.5}$ циклов. Так как для других долговечностей гипотеза не подтверждается, констатировать совпадение в целом относительных кривых усталости для указанных групп испытаний нельзя.

В первой части исследования [1] подробно рассмотрена методика оценки пределов выносливости на базе критерия подобия усталостного разрушения. В таблицах 3 и 4 приведены средние значения относительных предельных амплитуд, отнесенных к амплитуде на базе 10^7 циклов для легких сплавов и титанового сплава и на базе 10^6 циклов для легированных сталей.

Таблица 3
Значения относительных пределов ограниченной выносливости сплавов

Сплав	Базовая долговечность		
	10^5	10^6	$10^{7.7}$
АВ	1,86949	1,31592	0,8502348
МЛ5	1,83675	1,29450	0,7967845
ВТ3-1	1,42629	1,17265	0,9114930

Таблица 4
Значения относительных пределов ограниченной выносливости сталей

Сталь	Базовая долговечность		
	$10^{4.6}$	10^5	$10^{6.7}$
12Х2НФА	1,45604	1,27195	0,9653711
30ХГСА	1,47649	1,27884	0,9491826

Из рис. 1–3 видно, что относительные кривые усталости графически близки для образцов с различными значениями параметра подобия для сплавов АВ, МЛ5, ВТ3-1, а также для сталей 12Х2НФА и 30ХГСА. Точками на рисунках отмечены значения относительных амплитуд для образцов различного типоразмера с разными значениями параметра подобия $\lg L / \bar{G}$ по данным таблиц 3, 4 из [1].

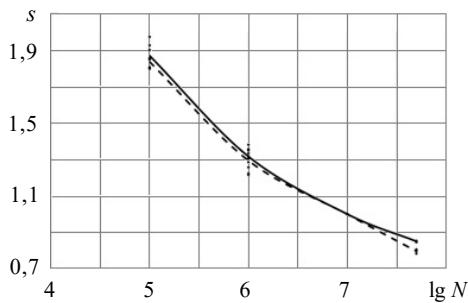


Рис. 1. Относительные кривые усталости сплавов АВ (сплошная линия) и МЛ5 (штриховая линия)

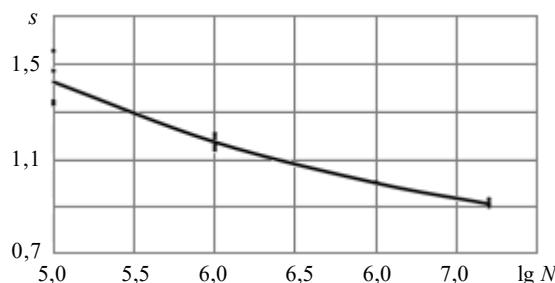


Рис. 2. Относительная кривая усталости титанового сплава ВТ3-1

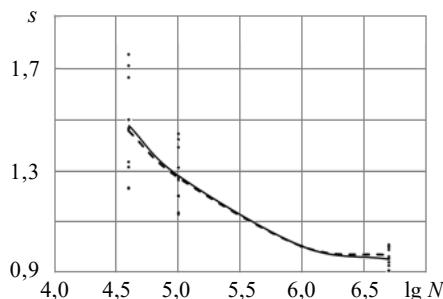


Рис. 3. Относительные кривые усталости сталей 12Х2НФА (сплошная линия) и 30ХГСА (штриховая линия)

В то же время результаты статистического моделирования (github_2) показывают, что биномиальный критерий не подтверждает гипотезу об однородности кривых, хотя гипотеза об отсутствии различия в медианах относительных пределов выносливости подтверждается на низких уровнях амплитуд напряжений циклов. Для примера в таблице 5 представлены результаты проверки по критерию с уровнем значимости 0,05 и числа повторений $M = 10^4$ для сплава АВ со значениями параметра подобия 1,923 и 3,224. Критическое значение $p_\alpha = 4917$.

Таблица 5

**Результаты сравнительного статистического моделирования
усталостных испытаний для двух групп образцов сплава АВ**

Параметры критерия	Базовая долговечность		
	10^5	10^6	$10^{7,7}$
Положительные разности	3008	5908	5020
Отрицательные разности	6992	14092	4980
Выполнение нулевой гипотезы о медианах предела выносливости	Нет	Нет	Да

Аналогичная картина наблюдается при сравнении других групп легких сплавов и легированных сталей. Это подтверждается и рис. 1–3, из которых видно, что наименьший разброс в относительных амплитудах наблюдается на самом нижнем уровне.

Заключение

Разработан метод оценки параметров функции распределения предела выносливости методом «вверх-вниз» с целью последующего статистического моделирования усталостных испытаний.

Проведен анализ результатов усталостных испытаний литых и деформируемых алюминиевых, магниевых, титановых сплавов и легированных сталей, необходимый для построения моделей «бутстреп»-моделирования и метода Монте-Карло. Анализу подвергались образцы различного типоразмера разной степени концентрации напряжений для получения контрастных значений параметра подобия усталостного разрушения.

Разработана методика комбинированного статистического моделирования при построении кривых усталости на базе критерия подобия усталостного разрушения и метода «вверх-вниз» с элементами «бутстреп»-оценок и метода Монте-Карло, позволяющая обосновать непараметрическую функцию распределения предела выносливости, которая может быть использована для оценки случайной ошибки определения предела выносливости и построения доверительных интервалов и других характеристик распределения.

В качестве одного из примеров методики рассмотрена сравнительная попарная оценка нескольких групп усталостных испытаний на базе статистического моделирования и биномиального критерия. Установлено, что применение концепции обобщенной кривой усталости позволяет объединять выборки, формировать единые кривые усталости для разнородных групп в относительных координатах, обобщать результаты усталостных испытаний, что существенно повышает информативность экспериментального материала.

Список литературы

1. Агамиров Л.В., Агамиров В.Л., Вестяк В.А., Тутова Н.В. Оценка распределения предела выносливости методами статистического моделирования усталостных испытаний. Часть 1. *Проблемы прочности и пластичности*. 2025. Т. 87. №3. С. 328–340. DOI: 10.32326/1814-9146-2025-87-3-328-340.
2. Межгосударственный стандарт. ГОСТ 25.504-82. *Расчеты и испытания на прочность. Методы расчета характеристик сопротивления усталости*. 1983. С. 78–132.
3. Boyer H.E. *Atlas of Stress-Strain Curves*. Russell, USA: ASM International, 2002. 808 p.
4. Correia J.A.F.O., Calvente M.M., Blasón S., Lamela M.J. et al. Fatigue life prediction of notched details made of puddle iron based on variable fatigue strength reduction factors

- concept. *International Symposium on Notch Fracture (ISNF)*. Santander (Cantabria, Spain). 29–31 March, 2017. 6 p.
5. Mirza O., Milner L., Mashiri F. Experimental investigation of retrofitting techniques for steel bridge girders subject to fatigue failure. *Journal of Steel Structures & Construction*. 2018. Vol. 4. Iss. 1. P. 1000138-1 – 1000138-8. DOI: 10.4172/2472-0437.1000138.
 6. Bandara C.S., Siriwardane S., Dissanayake U.I., Dissanayake R. Full range S-N curves for fatigue life evaluation of steels using hardness measurements. *International Journal of Fatigue*. 2015. Vol. 82. Pt. 2. P. 325–331. <https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2015.03.021>.
 7. Strzelecki P., Sempruch J. Experimental method for plotting SN curve with a small number of specimens. *Polish Maritime Research*. 2016. Vol. 23. Iss. 4. P. 129–137. DOI: 10.1515/pomr-2016-0079.
 8. Goedel F., Chamberlain pravia Z.M., Mezzomo G.P. Methodology for assessment of statistical planning effects on the S-N curve determination using Monte Carlo simulations. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*. 2018. Vol. 42. No 4. P. 871–882. DOI: 10.1111/ffe.12957.
 9. Bandara C.S., Siriwardane S.C., Dissanayake U.I., Dissanayake R. Developing a full range S-N curve and estimating cumulative fatigue damage of steel elements. *Computational Materials Science*. 2015. Vol. 96. Pt. A. P. 96–101. DOI: 10.1016/j.commatsci.2014.09.009.
 10. ASTM E739-10 (2015). *Standard Practice for Statistical Analysis of Linear or Linearized Stress-Life (S-N) and Strain-Life (ε-N)*. American Society for Testing and Materials. 2015. 7 p.
 11. Степнов М.Н., Агамиров Л.В. Статистическая оценка параметров функции распределения предела выносливости при усталостных испытаниях методами вверх-вниз и пробитов. *Заводская лаборатория*. 1990. №1. С. 51–55.
 12. Ускоренные методы оценки сопротивления усталости. *Методические указания*. М.: Госстандарт СССР, 1991. 166 с.
 13. Агамиров Л.В., Агамиров В.Л., Вестяк В.А. Алгоритм оценки параметров функции распределения предела выносливости при усталостных испытаниях. *Вестник МАИ*. 2013. Т. 20. №5. С. 105–110.
 14. Li Y., Zhang W., Wang J., Chen X. A Bayesian approach for fatigue life prediction of metallic materials under small sample size. *International Journal of Fatigue*. 2023. Vol. 170. Article No 107852. DOI: 10.1016/j.ijfatigue.2023.107852.
 15. Gupta A., Lee C., Liu Y. Machine learning-based fatigue life prediction of additive manufactured alloys: Data-driven modeling and uncertainty quantification. *Materials Science and Engineering: A*. 2024. Vol. 891. Article No 146112. DOI: 10.1016/j.msea.2024.146112.
 16. Tanaka S., Svensson T. Probabilistic S-N field modeling based on the weakest-link theory and statistical inference for high-strength steel. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*. 2023. Vol. 46. Iss. 3. P. 1060–1074. DOI: 10.1111/ffe.13995.
 17. Wang H., Li Z. A stochastic framework for fatigue crack growth simulation and reliability assessment under uncertainty. *Reliability Engineering & System Safety*. 2024. Vol. 243. Article No 109945 DOI: 10.1016/j.ress.2024.109945.
 18. Papadopoulos V., De Jesus A.M.P. Recent advances in probabilistic modeling of metal fatigue: A review. *Archives of Computational Methods in Engineering*. 2023. Vol. 30. Iss. 5. P. 2995–3023. DOI: 10.1007/s11831-023-09912-1.
 19. Dixon W.T., Mood A.M.J. A method for obtaining and analyzing sensitivity data. *American Statistical Association*. 1948. Vol. 43. P. 109–126.
 20. Агамиров В.Л., Агамиров Л.В., Тутова Н.В. *Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2024686645 «Программа расчета параметров функций распределения методом «вверх-вниз»*. Дата государственной регистрации в Реестре программ для ЭВМ 11 ноября 2024 г.
 21. Кобзарь А.И. *Прикладная математическая статистика*. М.: Физматлит, 2006. 816 с.

References

1. Agamirov L.V., Agamirov V.L., Vestyak V.A., Tutova N.V. Otsenka raspredeleniya predela vynoslivosti metodami statisticheskogo modelirovaniya ustalostnykh ispytaniy. Chast 1 [Estimation of endurance limit distribution by methods of statistical modeling of fatigue tests. Part 1]. *Problemy prochnosti i plastichnosti [Problems of Strength and Plasticity]*. 2025. Vol. 87. No 3. P. 328–340 (In Russian).
2. *Mezhgosudarstvennyy standart. GOST 25.504-82. Raschety i ispytaniya na prochnost. Metody rascheta kharakteristik soprotivleniya ustalosti [Interstate Standard. GOST 25.504-82. Strength Calculation and Testing. Methods of Fatigue Strength behaviour Calculation]*. 1983. P. 78–132 (In Russian).
3. Boyer H.E. *Atlas of Stress-Strain Curves*. Russell, USA. ASM International. 2002. 808 p.
4. Correia J.A.F.O., Calvente M.M., Blasón S., Lamela M.J. et al. Fatigue life prediction of notched details made of puddle iron based on variable fatigue strength reduction factors concept. *International Symposium on Notch Fracture (ISNF)*. Santander (Cantabria, Spain), 29–31 March, 2017. 6 p.
5. Mirza O., Milner L., Mashiri Fs. Experimental investigation of retrofitting techniques for steel bridge girders subject to fatigue failure. *Journal of Steel Structures & Construction*. 2018. Vol. 4. Iss. 1. P. 1000138-1 – 1000138-8. DOI: 10.4172/2472-0437.1000138.
6. Bandara C.S., Siriwardane S., Dissanayake U.I., Dissanayake R. Full range S-N curves for fatigue life evaluation of steels using hardness measurements. *Int. J. Fatigue*. 2015. Vol. 82. Pt. 2. P. 325–331. <https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2015.03.021>.
7. Strzelecki P., Sempruch J. Experimental method for plotting SN curve with a small number of specimens. *Polish Maritime Research*. 2016. Vol. 23. Iss. 4. P. 129–137. DOI: 10.1515/pomr-2016-0079.
8. Goedel F., Chamberlain pravia Z.M., Mezzomo G.P. Methodology for assessment of statistical planning effects on the S-N curve determination using Monte Carlo simulations. *Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct.* 2018. Vol. 42. No 4. P. 871–882. DOI: 10.1111/ffe.12957.
9. Bandara C.S., Siriwardane S.C., Dissanayake U.I., Dissanayake R. Developing a full range S-N curve and estimating cumulative fatigue damage of steel elements. *Comp. Mater. Sci.* 2015. Vol. 96. Pt A. P. 96–101. DOI: 10.1016/j.commatsci.2014.09.009.
10. *ASTM E739-10 (2015). Standard Practice for Statistical Analysis of Linear or Linearized Stress-Life (S-N) and Strain-Life (ε-N)*. American Society for Testing and Materials. 2015. 7 p.
11. Stepnov M.N., Agamirov L.V. Statisticheskaya otsenka parametrov funktsii raspredeleniya predela vynoslivosti pri ustalostnykh ispytaniyakh metodami “vverkh-vniz” i probitov [Statistical evaluation of the parameters of the endurance limit distribution function in fatigue testing by the up-down and probit methods]. *Zavodskaya laboratoriya [Factory Laboratory]*. 1990. No 1. P. 51–55 (In Russian).
12. *Uskorennyye metody otsenki soprotivleniya ustalosti. Metodicheskie ukazaniya [Accelerated methods for assessing fatigue resistance. Guidelines]*. Moscow. Gosstandart SSSR. 1991. 166 p. (In Russian).
13. Agamirov L.V., Agamirov V.L., Vestyak V.A. Algoritm otsenki parametrov funktsii raspredeleniya predela vynoslivosti pri ustalostnykh ispytaniyakh [Development of an algorithm for estimation of the parameters of the distribution function of the limit of endurance at fatigue tests]. *Vestnik MAI [Aerospace MAI Journal]*. 2013. Vol. 20. No 5. P. 105–110 (In Russian).
14. Li Y., Zhang W., Wang J., Chen X. A Bayesian approach for fatigue life prediction of metallic materials under small sample size. *Int. J. Fatigue*. 2023. Vol. 170. Article No 107852. DOI: 10.1016/j.ijfatigue.2023.107852.
15. Gupta A., Lee C., Liu Y. Machine learning-based fatigue life prediction of additive manufactured alloys: Data-driven modeling and uncertainty quantification. *Materials Science and Engineering: A*. 2024. Vol. 891. Article No 146112. DOI: 10.1016/j.msea.2024.146112.
16. Tanaka S., Svensson T. Probabilistic S-N field modeling based on the weakest-link theory and statistical inference for high-strength steel. *Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct.* 2023. Vol. 46. Iss. 3. P. 1060–1074. DOI: 10.1111/ffe.13995.
17. Wang H., Li Z. A stochastic framework for fatigue crack growth simulation and reliability

- assessment under uncertainty. *Reliability Engineering & System Safety*. 2024. Vol. 243. Article No 109945 DOI: 10.1016/j.ress.2024.109945.
18. Papadopoulos V., De Jesus A.M.P. Recent advances in probabilistic modeling of metal fatigue: A review. *Archives of Computational Methods in Engineering*. 2023. Vol. 30. Iss. 5. P. 2995–3023. DOI: 10.1007/s11831-023-09912-1.
 19. Dixon W.T., Mood A.M.J. A method for obtaining and analyzing sensitivity data. *American Statistical Association*. 1948. Vol. 43. P. 109–126.
 20. Agamirov V.L., Agamirov L.V., Tutova N.V. *Svidetelstvo o gosudarstvennoy registratsii programmy dlya EVM № 2024686645 "Programma rascheta parametrov funktsiy raspredeleniya metodom "vverkh-vniz"* [State Registration Certificate of the Computer Program No 2024686645 "Program for Calculating the Parameters of Distribution Functions by the Up-Down Method"]. Date of state registration in the Register of Computer Programs: November 11, 2024 (In Russian).
 21. Kobzar A.I. *Prikladnaya matematicheskaya statistika [Applied Mathematical Statistics]*. Moscow. Fizmatlit Publ. 2006. 816 p. (In Russian).

ESTIMATION OF ENDURANCE LIMIT DISTRIBUTION BY METHODS OF STATISTICAL MODELING OF FATIGUE TESTS. PART 2

Agamirov L.V.^{1,2,3}, Agamirov V.L.^{1,3}, Vestyak V.A.¹, Toutova N.V.³

¹*Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russian Federation*

²*Moscow Power Engineering Institute (MPEI), Moscow, Russian Federation*

³*Moscow Technical University of Communications and Informatics (MTUCI),
Moscow, Russian Federation*

kaf311@yandex.ru

Received by the Editor 2025/05/04

The first part of the study, published in the previous issue of the journal, was devoted to estimating fatigue limits using a fatigue curve in tests conducted at several levels of alternating stress amplitudes over a wide range of life spans, as well as tests conducted to estimate the parameters of the fatigue failure similarity equation for subsequent combined statistical modeling with elements of bootstrap estimation and the Monte Carlo method.

This article (part two) continues this research. For the same purposes, an up-down fatigue limit assessment is considered. The up-down method is not intended to construct a complete fatigue curve over a wide range of life spans, but it allows for a forced determination of the fatigue limit distribution corresponding to a certain fixed (base) life span. The mathematical model of the "up-down" testing method has a rigorous probabilistic-statistical justification. It is based on the maximum likelihood method and, unlike other accelerated fatigue testing methods such as Pro, Enomoto, and Locatti, does not require a priori information about the characteristics of random variables. It is only necessary to approximately specify the initial stress amplitude level of the cycle and the range between levels during the experiment, which is maintained constant throughout the test. The hypothetical distribution functions considered are the normal law, the log-normal law, and the Weibull law for the fatigue limit. A significant time savings compared to a full-scale fatigue experiment and high accuracy allow this method to be recommended for fatigue limit assessment. Generating a nonparametric fatigue limit distribution function for comparative evaluation of different groups of observations using the binomial criterion is performed using Monte Carlo statistical modeling, as in the first part of the paper.

Keywords: fatigue testing, endurance limit, up-down method, Monte Carlo method, binomial criterion, C programs.