

УДК 539.3

DOI: 10.32326/1814-9146-2025-87-4-483-493

**ОБ ОДНОЙ ПОСТАНОВКЕ  
ОБРАТНЫХ КОЭФФИЦИЕНТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УПРУГИХ ТЕЛ  
И МЕТОДАХ ЕЕ ИССЛЕДОВАНИЯ\***

© 2025 г.

**Ватулян А.О.<sup>1</sup>, Юров В.О.<sup>1,2</sup>**

<sup>1</sup>*Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Вороевича Южного федерального университета, Ростов-на-Дону, Российская Федерация*

<sup>2</sup>*Южный математический институт – филиал Владикавказского научного центра РАН, Владикавказ, Российская Федерация*

aovatulyan@sfedu.ru, vyurov@sfedu.ru

*Поступила в редакцию 15.06.2025*

Рассмотрена задача о реконструкции переменных физико-механических характеристик функционально-градиентных тел, находящихся под действием внешних статических нагрузок при наличии ограничений на область съема дополнительной информации. Предложен подход, позволяющий свести обратную задачу с величинами, заданными на границе, к обратной задаче в первой постановке, к задаче, в которой нужно найти неизвестные переменные коэффициенты по информации о поле, заданном во всей области. Предложен аналог метода Галеркина для построения аппроксимации поля. Рассмотрен пример обратной задачи по реконструкции изгибной жесткости консольно закрепленной с одного торца балки, изгибаемой различной нагрузкой, в том числе распределенной, а также силой и/или моментом, приложенными к другому торцу. Дополнительная информация о прогибе задана на части балки, свободной от нагрузки. Реализовано несколько вариантов аппроксимации функции прогиба с последующим построением изгибной жесткости с использованием регуляризации по А.Н. Тихонову. Разработанная схема позволила с высокой точностью восстановить изгибную жесткость в области, доступной для съема дополнительной информации. В остальной области вторая производная прогиба доопределяется квадратичной функцией с сохранением гладкости и с некоторой погрешностью находится изгибная жесткость. Проведена серия вычислительных экспериментов, где область съема дополнительной информации составляла 50 и 65% от общей области. В качестве второго примера предложен подход, позволяющий осуществить реконструкцию податливости (функции, обратно пропорциональной жесткости) в классе полиномиальных функций. Задача сведена к решению алгебраической системы уравнений относительно неизвестных коэффициентов полинома. Вычислен определитель системы, проанализирована обусловленность матрицы в зависимости от точек съема информации о прогибе, даны рекомендации по их выбору. Представлена серия вычислительных экспериментов.

\*Выполнено за счет гранта РНФ №22-11-00265-П, <https://rscf.ru/project/22-11-00265/> в Южном федеральном университете.

*Ключевые слова:* обратная задача, функционально-градиентный материал, проекционные схемы, стержень, граничные поля.

## **Введение**

Для обеспечения эксплуатационных качеств конструкций требуется на всех этапах достаточно точно определять упругие характеристики (модуль Юнга, коэффициент Пуассона). Современные функционально-градиентные (ФГ) материалы все чаще имеют неоднородные свойства [1–5], что продиктовано обеспечением некоторого оптимального критерия качества. Таким образом, возрастаёт необходимость рассмотрения задач по реконструкции законов их изменения на основе анализа отклика на некоторое воздействие.

Возникает класс обратных задач, в которых дополнительная информация задана на части внешней границы области, занимаемой телом. Один из возможных алгоритмов решения таких задач основан на процедуре алгебраизации [6, 7]: сведению к алгебраической проблеме, как правило к системе линейных алгебраических уравнений. Законы неоднородности ФГ-материалов обычно описываются простыми функциями [8–10].

Наиболее распространенный подход к решению обратных задач основан на составлении функционала невязки и его минимизации каким-либо методом. В статье [11] предложен метод нахождения упругих постоянных анизотропного тела при помощи итерационной минимизации функционала невязки. Также для решения двумерных обратных задач в первой постановке активно применяются нейронные сети. В [12] рассматривается обратная задача об определении переменного модуля упругости на основе измеренных полей смещения/деформации. Вместо классического итерационного решателя используется подход глубокого обучения нейросетей. В [13] аналогично решена обратная задача по обнаружению пространственной зависимости от координат модуля упругости и коэффициента Пуассона.

Динамическое нагружение позволяет получить больше информации о переменных упругих характеристиках зондируемого объекта [14]. Обратные задачи, в которых дополнительной информацией является амплитудно-частотная характеристика, измеренная в области приложения нагрузки, в основном решены итерационным способом, где на каждой итерации решается прямая задача с известными упругими характеристиками, а поправки к ним находятся при помощи метода регуляризации А.Н. Тихонова [15] и на основе решения системы интегральных уравнений Фредгольма первого рода с гладкими ядрами [16–19]. В настоящем исследовании предлагается рассмотреть иной тип обратных задач со статическими зондирующими нагрузками и областью съема данных, свободной от нагрузок.

## **Постановка задачи**

Будем рассматривать одну из постановок обратных коэффициентных задач изотропной теории упругости в статической постановке.

Пусть изотропное упругое тело занимает объем  $V$  и ограничено поверхностью  $S$ , упругие модули  $\lambda = \lambda(x)$  и  $\mu = \mu(x)$  являются гладкими функциями координат,  $x \in V$ . Так, например, для ФГ-материалов, ставших в последние годы предметом многочисленных исследований, эти функции обычно представимы в виде полиномиальных зависимостей невысокого порядка [8, 16], что чаще всего обусловлено технологическим процессом их производства. Будем считать, что на некоторой части границы

$S_2 \subset S$  действует самоуравновешенная нагрузка  $p_i$ , остальная часть границы  $S_1 \subset S$  свободна от нагрузок и на ее части  $S_{10} \subset S_1$  заданы (измерены) компоненты вектора перемещений  $f_i$ . Для несамоуравновешенной нагрузки часть границы  $S_{1u} \subset S_1$  закреплена. Требуется по дополнительной информации определить функции  $\lambda(x)$  и  $\mu(x)$ . Возможна более простая постановка, когда переменным является только модуль Юнга  $E(x)$ , а коэффициент Пуассона постоянен и известен.

Математическая постановка задачи представима в форме уравнений равновесия и закона Гука

$$\begin{aligned}\sigma_{ij,j} &= 0, \\ \sigma_{ij} &= \lambda u_{k,k} \delta_{ij} + \mu(u_{i,j} + u_{j,i}).\end{aligned}\tag{1}$$

Границные условия записываются в виде

$$\sigma_{ij} n_j \Big|_{S_2} = p_i, \quad \sigma_{ij} n_j \Big|_{S_{10}} = 0, \quad u_i \Big|_{S_{1u}} = 0, \tag{2}$$

$$u_i \Big|_{S_{10}} = f_i. \tag{3}$$

Задача (1)–(3) представляет собой обобщенную задачу относительно компонент вектора смещений  $u_i$  и функций  $\lambda(x)$  и  $\mu(x)$ . Соответствующий оператор является билинейным (линейным по смещениям при известных модулях, линейным по модулям при известных смещениях), и обычно решения таких задач строятся при помощи итерационного процесса [14], на каждом шаге которого необходимо решать прямые задачи с известными  $\lambda_n(x)$  и  $\mu_n(x)$  и системы интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода с гладкими ядрами для нахождения поправок и перехода к следующей итерации [17–19]. В настоящей статье предлагается некоторое обобщение прямых методов [6, 7] применительно к сформулированной обратной задаче.

Пусть  $\{\phi_k\}$  – некоторая система линейно независимых функций в  $V$ , будем разыскивать решения прямой задачи (1), (2) в виде линейной комбинации

$$u_i = \sum_{k=1}^N a_{ik} \phi_k. \tag{4}$$

Это поле смещений порождает некоторое граничное поле  $u_i \Big|_{S_{10}}$ , зависящее от функций  $\psi_k = \phi_k \Big|_{S_{10}}$ . Для определения коэффициентов  $a_{ik}$  в (4) получим систему функциональных уравнений

$$\sum_{k=1}^N a_{ik} \psi_k(x) = f_i(x), \quad x \in S_{10}, \tag{5}$$

которая сводится к линейной алгебраической системе с помощью метода Галеркина

$$\sum_{k=1}^N a_{ik} A_{kj} = b_{ij}, \quad A_{kj} = (\psi_k, \psi_j)_{L_2[S_{10}]} \tag{6}$$

Разрешив систему (6) (возможно, используя метод регуляризации А.Н. Тихонова [15]), найдем  $a_{ik}$  и, следовательно, поле смещений внутри  $V$ . Таким образом, исходная обратная задача сведена к обратной задаче первого типа согласно классификации, введенной в [14]. Она является линейной относительно  $\lambda$  и  $\mu$ , которые удовлетворяют системе трех дифференциальных уравнений 1-го порядка, дополненной данными Коши вида (2).

В общем виде задача первого типа может быть решена с помощью сочетания проекционных подходов и методов регуляризации. В частных случаях неоднородности и геометрии области решение может быть построено и другими способами. Таковыми являются задачи с одномерными законами неоднородности, например, задачи об осесимметричном деформировании цилиндра или изгибе балки.

Приведем несколько вариантов реализации одномерных обратных задач на примере изгиба консольно закрепленной балки переменной жесткости.

### Пример. Определение переменной жесткости балки при изгибе

Рассмотрим равновесие консольно защемленной на одном торце балки длиной  $l$  под действием распределенной на отрезке  $[l_0, l]$  нагрузки  $p(x)$  и силы и момента, приложенных на другом торце. Уравнение равновесия имеет вид [20]:

$$(Dw'')'' = q = \begin{cases} p(x), & l_0 < x \leq l, \\ 0, & x \leq l_0, \end{cases} \quad (7)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} w(0) &= w'(0) = 0, \\ Dw''(l) &= M_0, \quad (Dw'')'(l) = P_0, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $D = D(x)$  – переменная изгибная жесткость.

В обратной задаче в соответствии с изложенным выше будем считать, что заданы смещения на части границы объекта, где не действует нагрузка, что для балки приводит к заданию прогиба на отрезке

$$w = f(x), \quad 0 \leq x \leq l_0. \quad (9)$$

На основе дополнительной информации (9) определим функцию  $D(x)$ .

Основные этапы решения задачи (7)–(9) состоят в следующем: на первом этапе выбирается система координатных функций  $\varphi_k \in L_2[0, l]$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$ , решение прямой задачи отыскивается в виде

$$w = \sum_{k=1}^N a_k \varphi_k,$$

коэффициенты  $a_k$  определяются из соотношения ( $\psi_k = \varphi_k$ ):

$$\sum_{k=1}^N a_k \varphi_k = f, \quad 0 \leq x \leq l_0. \quad (10)$$

В случае когда  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $0 \leq x \leq l_0$ , определим коэффициенты  $a_k$  из системы с помощью метода Галеркина

$$\sum_{k=1}^N A_{kj} a_k = b_j, \quad A_{kj} = \int_0^{l_0} \varphi_k \varphi_j dx, \quad b_j = \int_0^{l_0} \varphi_j f dx. \quad (11)$$

В случае выбора  $\varphi_k = x^{1+k}$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$ , получим выражение для элементов матрицы системы  $A_{kj} = l_0^{3+k+j} (3+k+j)^{-1}$ .

Заметим, что определитель такой матрицы будет стремиться к нулю с увеличением числа используемых координатных функций ( $N \rightarrow \infty$ ). В модельных расчетах будем ограничиваться размерностями  $3 \leq N \leq 8$ .

В случае когда  $f(x)$  задана в наборе точек, для определения коэффициентов разложения более удобно использовать минимизацию функционала невязки (метод наименьших квадратов):

$$\sum_j \left( \sum_{k=1}^N a_k \varphi_k(x_j) - f(x_j) \right)^2 \rightarrow \min. \quad (12)$$

Разрешив линейную систему, порожденную задачей (12), можно найти приближенное значение всюду в области  $w(x), 0 \leq x \leq l$ .

Описанный ход построения решения и нахождения  $D(x)$  основан на решении уравнения (7) и выполнении граничных условий (8), откуда имеем

$$\begin{aligned} D(x) &= \tilde{M}(x)w''(x)^{-1}, \quad \tilde{M}(x) = h(x - l_0) \int_{l_0}^x (x - s)p(s)ds + c_1 x + c_2, \\ c_1 &= P_0 - \int_{l_0}^l p(s)ds, \quad c_2 = M_0 - lP_0 + \int_{l_0}^l s p(s)ds, \end{aligned} \quad (13)$$

$h(x)$  в (13) – функция Хевисайда.

### Вычислительный эксперимент 1

Представим результаты вычислительных экспериментов, полагая

$$M_0 = 1, \quad P_0 = 0, \quad p(s) = s, \quad l_0 = 0,5l \text{ или } l_0 = 0,65l.$$

Выполним аппроксимацию измеренных данных (9) в соответствии с (12). Для получения более высокой точности аппроксимации в окрестности точки  $l_0$  будем выполнять измерения в сгущающемся наборе точек (рис. 1). На представленных рисунках приведены результаты расчетов, где по горизонтали откладывается безразмерная координата  $\xi = x/l$ .

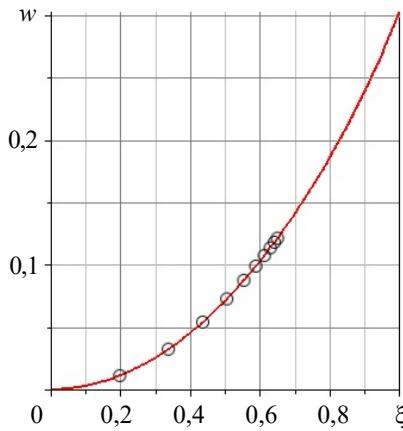


Рис. 1

По функции  $w(x)$ , заданной на отрезке  $0 \leq x \leq l_0$ , вычислим  $w''$ , затем доопределим  $w''$  на весь отрезок квадратичной функцией с сохранением гладкости, используя значения производных  $w''(l_0)$ ,  $w''(l_0)$ ,  $w^{(4)}(l_0)$ . На основе (13) получим искомое решение обратной задачи. На рис. 2–4 представлены результаты вычислительных

экспериментов для различных типов функций (монотонно убывающих, монотонно возрастающих, немонотонных), где найденную функцию будем обозначать точками, а точную – сплошной линией.

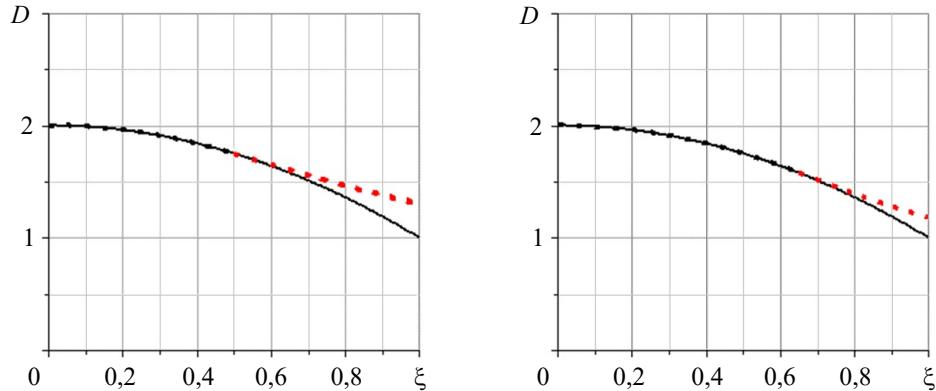


Рис. 2

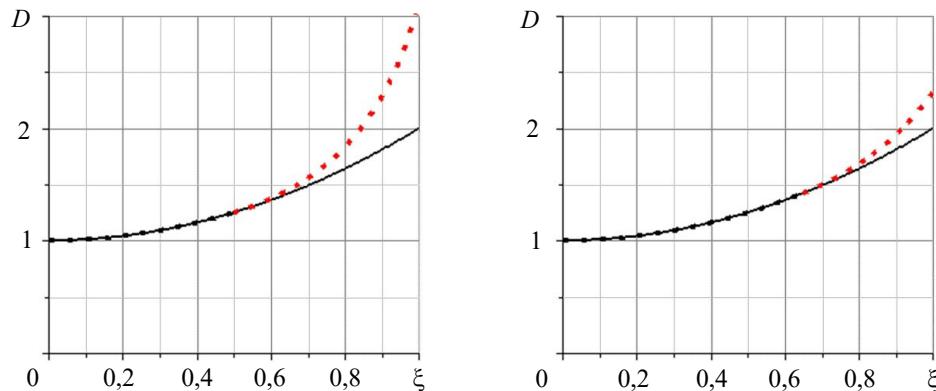


Рис. 3

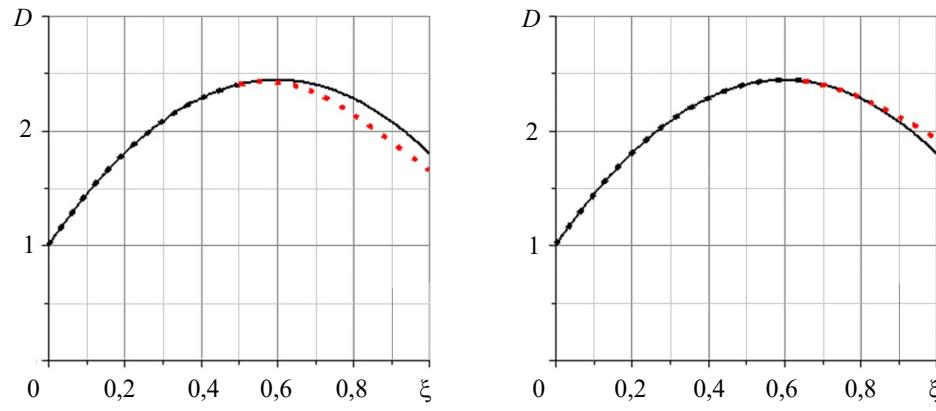


Рис. 4

В случае когда  $l_0$  близко к  $l$ , нет необходимости доопределять функцию  $w''$  (аппроксимация  $\sum_{k=1}^N a_k \varphi_k''$  достаточно хорошо описывает функцию  $w''$  в области  $0 \leq x \leq l_0 + h$ , где  $h > 0$  достаточно мало).

Нетрудно заметить, что результаты реконструкции при этом подходе не всегда обладают достаточной точностью (см. рис. 3), поэтому представим иной подход на примере этой же обратной задачи для балки. Этот подход базируется на некотором априорном представлении искомой функции, что приводит к сужению пространства поиска и далее – к линейной системе.

## Вычислительный эксперимент 2

Будем использовать функцию переменной податливости  $Y(x) = D^{-1}(x)$ . Ограничимся рассмотрением случая, когда податливость является полиномом  $Y_n(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_nx^n$ , а дополнительная информация задана в наборе точек  $w(x_j) = f_j$ ,  $0 \leq x_j \leq l_0$ . На основе (13) имеем

$$w''(x) = (c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_nx^n)\tilde{M}(x). \quad (14)$$

При этом  $\tilde{M}(x) = M_0$ , если  $P_0 = 0$ ,  $p(s) = 0$ . Интегрируя (14) с учетом граничных условий, получим

$$w(x) = \int_0^x (x - \xi)\tilde{M}(\xi)Y_n(\xi)d\xi. \quad (15)$$

Таким образом, имеем  $w(x) = \sum_{k=0}^n c_k \varphi_k(x)$ , где  $\varphi_k(x) = \int_0^x (x - \xi)\tilde{M}(\xi)\xi^k d\xi$ . Отметим также, что по построению  $\varphi_k(0) = 0$ ,  $\varphi'_k(0) = 0$ . Получаем явный вид функции прогиба  $w(x) = w(x, c_0, c_1, c_2, \dots, c_n)$ , зависящий от коэффициентов  $c_j$ ,  $j = 0, n$ .

Выполняя в точках  $x_j$  из доступной области  $n + 1$  условия  $w(x_j, c_0, c_1, c_2, \dots, c_n) = f_j$ , получим линейную алгебраическую систему относительно коэффициентов  $c_j$ ,  $j = 0, n$ , вида

$$\sum_{k=0}^n A_{kj} c_k = f_j, \quad (16)$$

где

$$A_{kj} = \varphi_k(x_j) = \int_0^{x_j} (x_j - \xi)\tilde{M}(\xi)\xi^k d\xi.$$

Проанализируем матрицу системы (16). Наиболее интересны случаи  $n = 1, 2, 3$ . Таких аппроксимаций может оказаться достаточно для определения характеристик монотонных и немонотонных функций с одним экстремумом. Отметим также, что определитель  $\delta = \det(A_{kj})$  возникающей линейной системы (в случае  $\tilde{M}(x) = M_0$ ) пропорционален определителю Вандермонда [21], что позволяет наиболее эффективно выбирать точки измерения. Нетрудно установить, что

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \frac{1}{12} x_1^2 x_2^2 (x_2 - x_1), \quad \delta_2 = \frac{1}{144} x_1^2 x_2^2 x_3^2 (x_3 - x_2)(x_3 - x_1)(x_2 - x_1), \dots, \\ \delta_n &= \frac{1}{2} \left( \prod_{k=2}^{n+1} \frac{1}{(1+k)k} \right) \left( \prod_{k=1}^{n+1} x_k^2 \right) \prod_{\substack{i,j=1 \\ i>j}}^{n+1} (x_i - x_j). \end{aligned}$$

Для улучшения обусловленности системы следует выбирать такие точки:

$$x_1 = 0,666 l_0, x_2 = l_0 \text{ при } n = 1 \text{ и } x_1 = 0,442 l_0, x_2 = 0,808 l_0, x_3 = l_0 \text{ при } n = 2.$$

Для единичной силы  $\tilde{M}(x) = P_0(x - l)$ :

$$\delta_1 = \frac{1}{12} x_1^2 x_2^2 (x_2 - x_1) \frac{6 - 3(x_1 + x_2) + x_1 x_2}{6},$$

$$\delta_2 = \frac{1}{144} x_1^2 x_2^2 x_3^2 (x_3 - x_2)(x_3 - x_1)(x_2 - x_1) \times$$

$$\times \frac{10 + 6(x_1 + x_2 + x_3) - 3(x_2 x_3 + x_1 x_2 + x_1 x_3) + x_1 x_2 x_3}{10}.$$

Для распределенной нагрузки  $p(x) = p$ , имеем

$$\tilde{M}(x) = p \left( (l_0 - l)x + \frac{l^2 - l_0^2}{2} \right), \quad x \in [0, l_0]:$$

$$\delta_1 = \frac{1}{12} x_1^2 x_2^2 (x_2 - x_1) (l - l_0)^2 \frac{(l + l_0)^2 - (l_0 + l)(x_2 + x_1) + 2x_1 x_2 / 3}{4}.$$

Отметим, что для улучшения обусловленности системы лучше всего выбирать равноотстоящие точки  $x_j$ . Приведем далее некоторые частные примеры.

Пусть  $Y_1(x) = 1 + x$ ,  $M_0 = 1$ ,  $P_0 = 0$ ,  $p(s) = 1$ ,  $l_0 = 0,4l$ . Осуществим поиск решения обратной задачи в более широком классе (зададим  $n = 2$ ). При съеме дополнительной информации будем разбивать отрезок  $0 \leq x_j \leq l_0$  на равные части. В качестве результата реконструкции получена функция  $\tilde{Y}_2(x) = 1 + x + (4,06x^2 + 1,13x - 1,125) \cdot 10^{-7}$ , где специально выделена часть, совпадающая с точной функцией.

Пусть  $Y_3(x) = 1 + x^3$ . Зададим  $n = 3$ . Получим решение  $\tilde{Y}_3(x) = 1,0108x^3 - 0,0068x^2 + 0,0012x + 0,9999$ , мало отличающееся от заданного.

В среднем погрешность реконструкции составила  $10^{-5}\%$  для функций при  $n = 2$  и  $0,25\%$  для функций при  $n = 3$ . Определители возникающих систем равны, соответственно,  $\delta_2 \approx 10^{-4}$ ,  $\delta_3 \approx 10^{-8}$ .

## Заключение

Исследовано решение обратной задачи по идентификации упругих характеристик неоднородных тел, для которых дополнительная информация задается на части границы. Предложен подход по сведению такой задачи к обратной задаче в первой постановке. Рассмотрен пример решения обратной задачи для консольной балки, нагруженной на правом конце силой, моментом и частично распределенной нагрузкой в окрестности этого торца. Предложены две реализации решения обратной задачи. Первая связана с аппроксимацией и доопределением на закрытую от наблюдения часть. Вторая реализация решения обратной задачи связана с сужением класса поиска до полиномиальных функций податливости. Приведены результаты вычислительных экспериментов.

## Список литературы

1. Bhavar V., Kattire P., Thakare S., Patil S., Singh R.K.P. A review on functionally gradient materials (FGMs) and their applications. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 2017. Vol. 229. Iss. 1. P. 012021-1 – 012021-9. <https://doi.org/10.1088/1757-899x/229/1/012021>.
2. Boggarapu V., Gujjala R., Ojha S., Acharya Sk., Venkateswara babu P., Chowdary S., Gara D. State of the art in functionally graded materials. *Composite Structures*. 2021. Vol. 262. Article No 113596. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2021.113596>.

3. Prabhat Pradhan, Mihir Kumar Sutar, Sarojrani Pattnaik. A state of the art in functionally graded materials and their analysis. *Materials Today: Proceedings*. 2019. Vol. 18. Pt. 7. P. 3931–3936. <https://doi.org/10.1016/j.matpr.2019.07.333>.
4. Wojciechowski M., Lefik M., Boso D.P. Differential evolution algorithm and artificial neural network surrogate model for functionally graded material homogenization and design. *Composite Structures*. 2025. Vol. 362. Article No 119041. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2025.119041>.
5. Yadav S., Liu S., Singh R.K., Sharma A.K., Rawat P. A state-of-art review on functionally graded materials (FGMs) manufactured by 3D printing techniques: Advantages, existing challenges, and future scope. *Journal of Manufacturing Processes*. 2024. Vol. 131. P. 2051–2072. <https://doi.org/10.1016/j.jmapro.2024.10.026>.
6. Богачев И.В., Ватульян А.О. Об идентификации характеристик функционально-градиентного пьезокерамического цилиндра. *Проблемы прочности и пластичности*. 2018. Т. 80. №1. С. 53–62. <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2018-80-1-53-62>.
7. Богачев И.В., Ватульян А.О., Дударев В.В., Лапина П.А., Недин Р.Д. Идентификация свойств неоднородной пластины в рамках модели Тимошенко. *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика*. 2017. Т. 17. №4. С. 419–430. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2017-17-4-419-430>.
8. Ravikiran Kadoli, Kashif Akhtar, Natrajan Ganesan. Static analysis of functionally graded beams using higher order shear deformation theory. *Applied Mathematical Modelling*. 2008. Vol. 32. Iss. 12. P. 2509–2525. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2007.09.015>.
9. Sburlati R. Three-dimensional analyses of functionally graded multi-layered systems. *Procedia Engineering*. 2014. Vol. 88. P. 235–241. <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2014.11.150>.
10. Banerjee J.R., Ananthapuvirajah A. Free vibration of functionally graded beams and frameworks using the dynamic stiffness method. *Journal of Sound and Vibration*. 2018. Vol. 422. P. 34–47. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2018.02.010>.
11. Mao H., Rumpler R., Göransson P. An inverse method for characterisation of the static elastic Hooke's tensors of solid frame of anisotropic open-cell materials. *International Journal of Engineering Science*. 2020. Vol. 147. Article No 103198. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2019.103198>.
12. Ni B., Gao H. A deep learning approach to the inverse problem of modulus identification in elasticity. *MRS Bulletin*. 2021. Vol. 46. P. 19–25. <https://doi.org/10.1557/s43577-020-00006-y>.
13. Kamali A., Sarabian M., Laksari K. Elasticity imaging using physics-informed neural networks: Spatial discovery of elastic modulus and Poisson's ratio. *Acta Biomaterialia*. 2023. Vol. 155. P. 400–409. <https://doi.org/10.1016/j.actbio.2022.11.024>.
14. Ватульян А.О. *Коэффициентные обратные задачи механики*. М.: Физматлит, 2019. 271 с.
15. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. *Методы решения некорректных задач*. М.: Наука, 1979. 288 с.
16. Dudarev V.V., Mnukhin R.M., Nedin R.D., Vatulyan A.O. Effect of material inhomogeneity on characteristics of a functionally graded hollow cylinder. *Applied Mathematics and Computation*. 2020. Vol. 382. Article No 125333. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2020.125333>.
17. Vatulyan A.O., Dudarev V.V., Mnukhin R.M. Functionally graded cylinders: Vibration analysis. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*. 2023. Vol. 103. Iss. 11. Article No e202200430. <https://doi.org/10.1002/zamm.202200430>.
18. Ватульян А.О., Юрлов В.О. Об определении механических характеристик стержневых элементов из функционально-градиентных материалов. *Изв. РАН. МТТ*. 2021. №4. С. 52–63. <https://doi.org/10.31857/S0572329921040139>.
19. Ватульян А.О., Юрлов В.О. О колебаниях функционально-градиентных электроупругих стержней. *Проблемы прочности и пластичности*. 2022. Т. 84. №3. С. 351–363. <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2022-84-3-351-363>.
20. Феодосьев В.И. *Сопротивление материалов*. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1999. 592 с.
21. Шафаревич И.Р., Ремизов А.О. *Линейная алгебра и геометрия*. М.: Физматлит, 2009. 511 с.

### References

1. Bhavar V., Kattire P., Thakare S., Patil S., Singh R.K.P. A review on functionally gradient materials (FGMs) and their applications. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 2017. Vol. 229. Iss. 1. P. 012021-1 – 012021-9 <https://doi.org/10.1088/1757-899x/229/1/012021>.
2. Boggarapu V., Gujjala R., Ojha S., Acharya Sk., Venkateswara babu P., Chowdary S., Gara D. State of the art in functionally graded materials. *Compos. Struct.* 2021. Vol. 262. Article No 113596. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2021.113596>.
3. Prabhat Pradhan, Mihir Kumar Sutar, Sarojrani Pattnaik. A state of the art in functionally graded materials and their analysis. *Materials Today: Proceedings*. 2019. Vol. 18. Pt. 7. P. 3931–3936. <https://doi.org/10.1016/j.matpr.2019.07.333>.
4. Wojciechowski M., Lefik M., Boso D.P. Differential evolution algorithm and artificial neural network surrogate model for functionally graded material homogenization and design. *Compos. Struct.* 2025. Vol. 362. Article No 119041. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2025.119041>.
5. Yadav S., Liu S., Singh R.K., Sharma A.K., Rawat P. A state-of-art review on functionally graded materials (FGMs) manufactured by 3D printing techniques: Advantages, existing challenges, and future scope. *J. Manuf. Process.* 2024. Vol. 131. P. 2051–2072. <https://doi.org/10.1016/j.jmapro.2024.10.026>.
6. Bogachev I.V., Vatulyan A.O. Ob identifikatsii kharakteristik funktsionalno-gradientnogo pyezokeramicheskogo tsilindra [Identification of inhomogeneous characteristics of functionally graded piezo-polimeric rod]. *Problemy prochnosti i plastichnosti [Problems of Strength and Plasticity]*. 2018. Vol. 80. No 1. P. 53–62 (In Russian).
7. Bogachev I.V., Vatulyan A.O., Dudarev V.V., Lapina P.A., Nedin R.D. Identifikatsiya svoystv neodnorodnoy plastiny v ramkakh modeli Timoshenko [Identification of properties of inhomogeneous plate in the framework of the Timoshenko model]. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya: Matematika. Mekhanika. Informatika [Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics]*. 2017. Vol. 17. Iss. 4. P. 419–430 (In Russian).
8. Ravikiran Kadoli, Kashif Akhtar, Natrajan Ganesan. Static analysis of functionally graded beams using higher order shear deformation theory. *Appl. Math. Model.* 2008. Vol. 32. Iss. 12. P. 2509–2525. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2007.09.015>.
9. Sburlati R. Three-dimensional analyses of functionally graded multi-layered systems. *Procedia Eng.* 2014. Vol. 88. P. 235–241. <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2014.11.150>.
10. Banerjee J.R., Ananthapuvirajah A. Free vibration of functionally graded beams and frameworks using the dynamic stiffness method. *Journal of Sound and Vibration*. 2018. Vol. 422. P. 34–47. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2018.02.010>.
11. Mao H., Rumpler R., Göransson P. An inverse method for characterisation of the static elastic Hooke's tensors of solid frame of anisotropic open-cell materials. *Int. J. Eng. Sci.* 2020. Vol. 147. Article No 103198. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2019.103198>.
12. Ni B., Gao H. A deep learning approach to the inverse problem of modulus identification in elasticity. *MRS Bulletin*. 2021. Vol. 46. P. 19–25. <https://doi.org/10.1557/s43577-020-00006-y>.
13. Kamali A., Sarabian M., Laksari K. Elasticity imaging using physics-informed neural networks: Spatial discovery of elastic modulus and Poisson's ratio. *Acta Biomater.* 2023. Vol. 155. P. 400–409. <https://doi.org/10.1016/j.actbio.2022.11.024>.
14. Vatulyan A.O. *Koefficientsentye obratnye zadachi mekhaniki [Coefficient Inverse Problems of Mechanics]*. Moscow. Fizmatlit Publ. 2019. 271 p. (In Russian).
15. Tikhonov A.N., Arsenin V.Ya. *Metody resheniya nekorrektnykh zadach [Methods for Solving Ill-Posed Problems]*. Moscow. Nauka Publ. 1979. 288 p. (In Russian).
16. Dudarev V.V., Mnukhin R.M., Nedin R.D., Vatulyan A.O. Effect of material inhomogeneity on characteristics of a functionally graded hollow cylinder. *Appl. Math. Comput.* 2020. Vol. 382. Article No 125333. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2020.125333>.
17. Vatulyan A.O., Dudarev V.V., Mnukhin R.M. Functionally graded cylinders: Vibration analysis. *ZAMM.* 2023. Vol. 103. Iss. 11. Article No e202200430. <https://doi.org/10.1002/zamm.202200430>.

18. Vatulyan A.O., Yurov V.O. On the determination of the mechanical characteristics of rod elements made of functionally graded materials. *Mechanics of Solids*. 2020. Vol. 55. No 6. P. 907–917. DOI: 10.3103/S0025654420660036.
19. Vatulyan A.O., Yurov V.O. O kolebaniyakh funktsionalno-gradientnykh elektrouprugikh sterzhney [On the vibrations of functionally graded electroelastic rods]. *Problemy prochnosti i plastichnosti [Problems of Strength and Plasticity]*. 2022. Vol. 84. No 3. P. 351–363 (In Russian).
20. Feodosyev V.I. *Soprotivlenie materialov [Strength of Materials]*. Moscow. Bauman Moscow State Technical University Publ. 1999. 592 p. (In Russian).
21. Shafarevich I.R., Remizov A.O. *Lineynaya algebra i geometriya [Linear Algebra and Geometry]*. Moscow. Fizmatlit Publ. 2009. 511 p. (In Russian).

## ON ONE FORMULATION OF INVERSE COEFFICIENT PROBLEMS FOR ELASTIC BODIES AND METHODS OF THEIR STUDY\*

Vatulyan A.O.<sup>1</sup>, Yurov V.O.<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>*Southern Federal University, I.I. Vorovich Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Science, Rostov-on-Don, Russian Federation*

<sup>2</sup>*Southern Mathematical Institute of Vladikavkaz Scientific Center RAS,  
Vladikavkaz, Russian Federation*

aovatulyan@sedu.ru, vyurov@sedu.ru

Received by the Editor 2025/06/15

The problem of reconstructing variable characteristics of functionally gradient bodies under the action of external static loads with restrictions on the region of additional information retrieval is considered. An approach is proposed that allows reducing the inverse problem with data specified on the boundary to the inverse problem in the first statement: to the problem in which it is necessary to find unknown variable coefficients from information on the field specified in the entire region. An analogue of the Galerkin method for constructing an approximation of the field is proposed. An example of an inverse problem for reconstructing the flexural rigidity of a beam cantilevered at one end and bent by various loads, including distributed ones, as well as a force and/or moment applied to the other end is considered. Additional information on the deflection is specified on the part of the beam free of load. Several variants of approximating the deflection function with subsequent construction of the flexural rigidity using regularization according to A.N. Tikhonov are implemented. The developed scheme made it possible to reconstruct the flexural rigidity with high accuracy in the region available for retrieving additional information. In the remaining area, the second derivative of the deflection is completed by continuity in a quadratic manner and the flexural rigidity is found with some error. A series of computational experiments was conducted where the area of additional data gathered 50 and 65 percent of the total. As a second example, an approach is proposed that allows for the reconstruction of compliance (a function inversely proportional to rigidity) in the class of polynomial functions. The problem is reduced to solving an algebraic system with respect to unknown coefficients of the polynomial. The determinant of the system is calculated, the conditionality of the matrix is analyzed depending on the points of information removal about the deflection, and recommendations are given for their selection. A series of computational experiments is presented.

**Keywords:** inverse problem, functional-gradient material, projection schemes, rod, boundary fields.

\* The study was supported by the grant of the Russian Science Foundation No 22-11-00265-P, <https://rscf.ru/project/22-11-00265/> at the Southern Federal University.