

УДК 539.3:548.4

DOI: 10.32326/1814-9146-2025-87-4-469-482

## **МЕХАНИЗМ ФОРМИРОВАНИЯ ДИСЛОКАЦИОННЫХ СТРУКТУР ЯЧЕИСТОГО ТИПА В АНСАМБЛЕ КРАЕВЫХ ДИСЛОКАЦИЙ\***

© 2025 г.

**Сарафанов Г.Ф.<sup>1</sup>, Шондин Ю.Г.<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>*Институт проблем машиностроения РАН – филиал Федерального исследовательского центра «Институт прикладной физики им. А.В. Гапонова-Грехова РАН», Нижний Новгород, Российская Федерация*

<sup>2</sup>*Нижегородский государственный педагогический университет имени Козьмы Минина, Нижний Новгород, Российская Федерация*

gf.sarafanov@yandex.ru

*Поступила в редакцию 21.04.2025*

Исследован вопрос возникновения и формирования дислокационных ячеистых разориентированных структур на основе предложенной эволюционной модели. Модель представляет собой систему уравнений материального баланса для двух типов дислокаций: подвижных дислокаций и дислокаций в связанном состоянии (малоподвижных). Предполагается, что дислокации движутся под действием приложенного внешнего напряжения в противоположных направлениях с постоянной скоростью. Дальнейшему напряжением дислокаций пренебрегается, но учитывается их локальное взаимодействие, а именно: размножение, иммобилизация, рекомбинация и сток дислокаций. Модель в целом представляет собой систему четырех дифференциальных уравнений в частных производных со сложной генерационно-рекомбинационной динамикой. Исходная система уравнений преобразуется к системе для суммарной и избыточной плотностей дислокаций, и для новых переменных находятся возможные однородные стационарные состояния. Их оказывается два: первое – только подвижные дислокации, второе – подвижные и малоподвижные дислокации для их суммарной плотности. Избыточная плотность в обоих состояниях равна нулю. Вводится управляющий параметр системы, характеризующий объемную долю убывающей с ростом деформации субструктуры, на которой происходит сток дислокаций. Далее проводится линейный и нелинейный анализ системы. Установлено, что по мере уменьшения управляющего параметра решения системы, отраженные на бифуркационной диаграмме, образуют три области. В первой области устойчивым является однородное состояние только для подвижных дислокаций. Во второй области устойчиво однородное решение для обоих типов дислокаций. В третьей области устойчивым становится, как показал нелинейный анализ, пространственно-неоднородное периодическое решение для суммарной и избыточной плотностей дислокаций, которое и характеризует свойства ячеистой структуры.

---

\* Выполнено при поддержке РНФ (проект № 25-29-20300).

*Ключевые слова:* пластическая деформация металлов, неустойчивость деформации, самоорганизация, диссипативные структуры, ячеистая дислокационная разориентированная структура, стенки.

## **Введение**

Деформируемый кристалл представляет собой сложную динамическую систему, в которой под воздействием внешней нагрузки кристаллический образец переводится в состояние, далекое от термодинамического равновесия. Это приводит к развитию в системе диссипативных неустойчивостей, порождающих образование различного рода неоднородных дефектных структур, в том числе дислокационных ячеистых структур [1–4].

По-видимому, впервые на эти особенности процесса пластической деформации в деформируемых кристаллах было обращено внимание в статьях [5–7], где на основе некоторых модельных уравнений диффузионного типа для плотности дислокаций была описана неустойчивость тьюрингова типа [8], а также ее развитие, приводящее к спонтанному возникновению периодической дислокационной структуры. Возникновение таких структур описывалось в рамках теории диссипативных структур [9] или, иначе, теории самоорганизации [10].

В большинстве перечисленных публикаций основной акцент делался на рассмотрении эволюции суммарной плотности дислокаций и неявно предполагалось, что пространственное распределение дислокационного заряда однородно и равно нулю. Такое допущение является довольно сильным приближением и влечет за собой невозможность описать формирование разориентированных структур, соответственно зернистой структуры, как в моно- так и поликристаллах. Кроме того, в этих публикациях постулируются диффузионные процессы, требующие, вообще говоря, детального обоснования, связанного с упругим взаимодействием, как в ансамбле дислокаций [11].

Анализируя результаты экспериментальных работ по эволюции дислокационных структур при пластической деформации металлических материалов [12, 13], можно отметить закономерности, которые наблюдаются при эволюции субструктур и которые необходимо учитывать при построении дислокационной модели. Выделим из них следующие две. Во-первых, при пластической деформации дислокации в кристалле могут находиться в разных динамических состояниях (подвижном, малоподвижном, неподвижном и др.), поэтому для описания возникновения дислокационных структур необходимо учитывать эту особенность [14]. Во-вторых, на каждой стадии пластической деформации сосуществуют, как правило, два преобладающих типа субструктур [15] подобно областям сосуществования фаз в многокомпонентных системах. Поэтому одним из управляющих параметров системы можно считать объемную долю «предыдущей» субструктуры (например, клубковой), убывающую с ростом деформации  $\varepsilon$ . По мере убывания такой субструктуры однородное состояние системы теряет свою устойчивость, возникает и формируется новая структура – ячеистая, которая также эволюционирует от неразориентированной к разориентированной и далее к субзерненной структуре.

В настоящей статье основное внимание уделяется закономерности формирования диссипативных дислокационных структур в рамках системы эволюционных уравнений для дислокационного ансамбля [16]. На основе этих уравнений развивается теория зарождения пространственно неоднородных дислокационных структур, воз-

никающих в результате развития генерационно-рекомбинационной неустойчивости. Нелинейная стадия эволюции системы исследуется на основе теории диссипативных структур [9, 10].

## 1. Модель ячеистой структуры

Математически модель эволюции дислокационного ансамбля может быть построена на основе закона сохранения вектора Бюргерса. Этот закон, записанный в дифференциальной форме, имеет вид [17, 18]:

$$\frac{\partial \alpha_{ik}}{\partial t} + e_{ilm} \frac{\partial j_{mk}}{\partial x_l} = 0, \quad (1)$$

где элементы тензоров плотности  $\alpha_{ik}$  и потока  $j_{ik}$  дислокаций линейно зависят от скалярной плотности дислокаций  $\rho_a(\mathbf{r}, t)$ :

$$\alpha_{ik} = \sum_a l_i b_k^a \rho_a, \quad j_{ik} = e_{ijm} \sum_a l_j b_k^a \rho_a v_m^a. \quad (2)$$

Здесь  $e_{ijm}$  – единичный антисимметричный тензор;  $a = \{s, \beta\}$  – обобщенный индекс, где  $s$  нумерует дислокации по их подвижности, а  $\beta$  различает возможное направление вектора Бюргерса дислокации  $\mathbf{b}_a$  по отношению к единичному вектору  $\mathbf{l}$ , касательному к линии дислокации.

Подставляя (2) в уравнения (1), получаем

$$\sum_a l_j b_k^a \left\{ \frac{\partial \rho_a}{\partial t} + \text{div} \rho_a \mathbf{v}_a \right\} = 0, \quad (3)$$

откуда следует, что в общем случае для плотности дислокаций  $\rho_a(\mathbf{r}, t)$  справедливы эволюционные уравнения материального баланса [11, 19]:

$$\frac{\partial \rho_a}{\partial t} + \text{div} \rho_a \mathbf{v}_a = F_a(\rho_a). \quad (4)$$

Здесь  $F_a(\rho_a)$  – нелинейные функции, определяемые спецификой кинетических механизмов дислокационных реакций;  $\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_a(\sigma_e)$  – скорость скольжения дислокаций, которую в дальнейшем будем считать постоянной;  $\sigma_e$  – компонента внешнего напряжения, обеспечивающая движение дислокаций,

Учтем указанные выше закономерности при построении модели. Введем в рассмотрение два типа дислокаций: подвижные, нумеруемые индексом  $s = 1$ , и малоподвижные ( $s = 2$ ). Каждый тип дислокаций, кроме того, различается направлением вектора Бюргерса ( $\beta = \pm$ ) и, соответственно, направлением скорости перемещения.

При записи эволюционных уравнений ограничимся рассмотрением следующих механизмов изменения плотности дислокаций: рождение подвижных дислокаций при пластической деформации объемными источниками типа Франка – Рида; захват дислокаций в дипольные конфигурации с последующей аннигиляцией; иммобилизация подвижных на малоподвижных дислокациях с переходом быстрых дислокаций в состояние медленных; сток дислокаций на различных дислокационных комплексах (будем характеризовать их плотностью  $\rho_j$ ) другого структурного уровня, обладающего существенно большим временем релаксации к равновесному состоянию.

Будем считать, что процесс пластической деформации развивается в направлении некоторой системы скольжения, например вдоль оси  $Ox$ . Тогда, учитывая вышеуказанные механизмы генерации и локального взаимодействия дислокаций, для ска-

лярной плотности положительных  $\rho_s^+(x, t)$  и отрицательных  $\rho_s^-(x, t)$  дислокаций, распространяющихся вдоль оси  $0x$  со скоростями  $V_s$ , причем  $V_s^+ = -V_s^- = V_s$ , систему (4) запишем в виде [16]:

$$\frac{\partial \rho_1^+}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(V_1^+ \rho_1^+) = \delta_0 - f_1 \rho_1^+ - \kappa_1 \rho_1^+ \rho_1^- - \delta_f \rho_1^+ (\rho_2^+ + \rho_2^-), \quad (5)$$

$$\frac{\partial \rho_1^-}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(V_1^- \rho_1^-) = \delta_0 - f_1 \rho_1^- - \kappa_1 \rho_1^+ \rho_1^- - \delta_f \rho_1^- (\rho_2^+ + \rho_2^-), \quad (6)$$

$$\frac{\partial \rho_2^+}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(V_2^+ \rho_2^+) = \delta_f \rho_1^+ (\rho_2^+ + \rho_2^-) - f_2 \rho_2^+ - \kappa_2 \rho_2^+ \rho_2^-, \quad (7)$$

$$\frac{\partial \rho_2^-}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(V_2^- \rho_2^-) = \delta_f \rho_1^- (\rho_2^+ + \rho_2^-) - f_2 \rho_2^- - \kappa_2 \rho_2^+ \rho_2^-, \quad (8)$$

где  $\delta_0$  – коэффициент размножения дислокаций по механизму Франка – Рида [18],  $\kappa_s = V_s h$  – коэффициенты аннигиляции ( $h = Gb/(8\pi\sigma_e)$  – радиус захвата дислокаций в дипольные конфигурации [7]),  $\delta_f = V_1 r$  – коэффициент иммобилизации [7] ( $r \approx h$  – характерное расстояние, на котором происходит захват подвижных дислокаций мало-подвижными),  $f_s = V_s h \rho_f$  – коэффициенты стока дислокаций на убывающей субструктуре [15].

Целесообразно при исследовании системы (5)–(8) ввести суммарную и избыточную плотности дислокаций:

$$\rho_s = \rho_s^+ + \rho_s^-, \quad I_s = \rho_s^+ - \rho_s^-. \quad (9)$$

Тогда систему (5)–(8) можно представить в форме:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(V_1 I_1) = 2\delta_0 - f_1 \rho_1 - \kappa_1 (\rho_1^2 - I_1^2) - \delta_f \rho_1 \rho_2, \quad (10)$$

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(V_2 I_2) = \delta_f \rho_1 \rho_2 - f_2 \rho_2 - \kappa_2 (\rho_2^2 - I_2^2), \quad (11)$$

$$\frac{\partial I_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(V_1 \rho_1) = -f_1 I_1 - \delta_f \rho_2 I_1, \quad (12)$$

$$\frac{\partial I_2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(V_2 \rho_2) = -f_2 I_2 + \delta_f \rho_2 I_1. \quad (13)$$

Приравнявая правые части системы (10)–(13) к нулю, находим два стационарных однородных решения:

$$\text{I. } \rho_1^{(0)} = \frac{\sqrt{f_1^2 + 8\delta_0 \kappa_1} - f_1}{\kappa_1}, \quad I_{01} = I_{02} = \rho_2^{(0)} = 0; \quad (14)$$

$$\text{II. } \rho_{01} = \frac{\delta_f f_2 - f_1 \kappa_1 + \sqrt{(\delta_f f_2 - f_1 \kappa_1)^2 + 8\delta_0 \kappa_2 (\delta_f^2 + \kappa_1 \kappa_2)}}{2(\delta_f^2 + \kappa_1 \kappa_2)}, \quad (15)$$

$$\rho_{02} = \frac{\delta_f \rho_{01} - f_2}{\kappa_2}, \quad I_{01} = I_{02} = 0.$$

Рассмотрим устойчивость состояния равновесия (14), используя первый метод Ляпунова (устойчивость по линейному приближению) [10]. Линеаризуя систему (10)–(13) в окрестности этого состояния, получаем:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + V_1 \frac{\partial I_1}{\partial x} = -\kappa_1 \left( \rho_1^{(0)} + \frac{2\delta_0 \rho_1^{(0)}}{\kappa_1} \right) \rho_1 - \delta_f \rho_1^{(0)} \rho_2, \quad (16)$$

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial t} + V_2 \frac{\partial I_2}{\partial x} = (\delta_f \rho_1^{(0)} - f_2) \rho_2, \quad (17)$$

$$\frac{\partial I_1}{\partial t} + V_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial x} = -f_1 I_1, \quad (18)$$

$$\frac{\partial I_2}{\partial t} + V_2 \frac{\partial \rho_2}{\partial x} = -f_2 I_2. \quad (19)$$

Нетрудно заметить, что при  $\delta_f \rho_1^{(0)} - f_2 < 0$  все коэффициенты при переменных в правой части (16)–(19) отрицательны. Из этого следует [16], что состояние (14) устойчиво. При  $\delta_f \rho_1^{(0)} - f_2 > 0$  переменная  $\rho_2$  в уравнении (17) нарастает, что приводит к неустойчивости этого состояния. Таким образом, состояние (14) устойчиво, если выполняется условие

$$f_2 - \delta_f \rho_1^{(0)} > 0. \quad (20)$$

Если учесть, что  $f_2 = V_2 h \rho_f$ ,  $\delta_f = V_1 r$  и  $\kappa_1 = V_1 h$ , то неравенство (20) можно записать в виде:

$$\frac{\rho_f}{\rho_1^{(0)}} > (\alpha\beta)^{-1}, \quad (21)$$

где введены безразмерные параметры  $\alpha = h/r$  и  $\beta = V_2/V_1$ . Физически параметр  $\alpha$  порядка единицы, а параметр  $\beta < 1$ , так как скорость малоподвижных дислокаций по предположению меньше скорости подвижных дислокаций.

## 2. Неустойчивость однородного состояния

Обратимся к исследованию состояния равновесия (15). Из требования  $\rho_{02} > 0$  следует, что состояние (12) существует при

$$\frac{\rho_f}{\rho_{01}} < (\alpha\beta)^{-1}, \quad (22)$$

то есть второе состояние равновесия реализуется, когда первое состояние (11) является неустойчивым.

Введем в рассмотрение параметр  $\gamma = \rho_f/\rho_{02}$ , убывающий с ростом деформации и характеризующий объемную долю субструктуры, на которой происходит сток дислокаций, и параметр  $m = \rho_{02}/\rho_{01}$ . Тогда условие (22) можно представить также в виде  $\gamma < \gamma_0 = (\alpha\beta m)^{-1}$ . Параметр  $\gamma$  будем считать управляющим параметром.

Перейдем к безразмерным переменным

$$q_s = \frac{\rho_s - \rho_{0s}}{\rho_{0s}}, \quad q_{s+2} = \frac{I_s}{\rho_{0s}} \quad (23)$$

и координатам

$$t' = t\delta_f \rho_{01}, \quad x' = x r \rho_{01} \quad (24)$$

в системе уравнений (10)–(13) относительно состояния равновесия (15). В результате несложных преобразований имеем:

$$\frac{\partial q_1}{\partial t'} + \frac{\partial q_3}{\partial x'} = -a_1 q_1 - m q_2 - \alpha(q_1^2 - q_3^2) - m q_1 q_2, \quad (25)$$

$$\frac{\partial q_2}{\partial t'} + \beta \frac{\partial q_4}{\partial x'} = -a_2 q_2 + q_1 - a_2(q_2^2 - q_4^2) + q_1 q_2, \quad (26)$$

$$\frac{\partial q_3}{\partial t'} + \frac{\partial q_1}{\partial x'} = -b_1 q_3 - m q_2 q_3, \quad (27)$$

$$\frac{\partial q_4}{\partial t'} + \beta \frac{\partial q_2}{\partial x'} = -b_2 q_4 + q_3 - q_2 q_3, \quad (28)$$

где введены безразмерные параметры:

$$a_1 = (\alpha + \alpha_s), \quad a_2 = \alpha m \beta, \quad b_1 = m(1 + \alpha \gamma), \quad b_2 = \alpha \beta \gamma m, \quad \alpha_s = 2\delta_0 / \delta_f \rho_{01}^2. \quad (29)$$

Запишем систему (25)–(28) в матричной форме:

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t'} = \mathbf{A}(\nabla_{x'}) \mathbf{q} + \mathbf{N}(\mathbf{q}). \quad (30)$$

Здесь  $\mathbf{q} = \{q_j\}$  – вектор столбец ( $j = \overline{1, 4}$ ),  $\mathbf{A}$  – линейный матричный оператор, определяемый как

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -a_1 & -m & -\nabla_{x'} & 0 \\ 1 & -a_2 & 0 & -\beta \nabla_{x'} \\ -\nabla_{x'} & 0 & -b_1 & 0 \\ 0 & -\beta \nabla_{x'} & 1 & -b_2 \end{pmatrix}; \quad (31)$$

$\mathbf{N}(\mathbf{q}) = \{N_j\}$  – нелинейный вектор, где  $N_j$  представляют собой нелинейные квадратичные слагаемые правой части системы (25)–(28).

С учетом (24) будем считать, что система (25)–(28) удовлетворяет периодическим условиям

$$q_j(x', t') = q_j(x' + L', t'), \quad (32)$$

где  $L' = L \rho_{01}$ ,  $L$  – размер кристалла.

Рассмотрим устойчивость состояния равновесия (15), которое в данном случае имеет вид

$$q_{0j} = 0, \quad j = \overline{1, 4}. \quad (33)$$

Опускаем в (30) нелинейный член  $\mathbf{N}(\mathbf{q})$  и полагаем

$$\mathbf{q} = \mathbf{V} \exp(ikx' + \lambda t'), \quad (34)$$

где  $\mathbf{V} = \{v_j\}$  – постоянный вектор. В итоге получаем задачу на собственные значения  $\lambda_j$  и вектора  $v_j$  для матрицы  $\mathbf{A}(ik)$ :

$$(\mathbf{A}(ik) - \lambda \mathbf{E}) \mathbf{V} = 0, \quad (35)$$

где  $\mathbf{E}$  – единичная матрица.

Система (35) разрешима, если ее детерминант равен нулю, то есть

$$D(\lambda, k) = \det |\mathbf{A}(ik) - \lambda \mathbf{E}| = 0. \quad (36)$$

Вычисление (36) приводит к характеристическому уравнению вида [16]:

$$D(\lambda, k^2, \gamma) = \sum_{m=1}^4 A_m(k^2) \lambda^m + F_0(k^2) = 0, \quad (37)$$

где

$$F_0(k^2) = \beta^2 k^4 - A_0 k^2 + \det \hat{a} \det \hat{b}, \quad (38)$$

$$A_0 = -\beta(a_{12}b_{21} + a_{21}b_{12}) + a_{22}b_{22} + \beta^2 a_{11}b_{11}. \quad (39)$$

Здесь матрицы  $\hat{a} = \{a_{ik}\}$  и  $\hat{b} = \{b_{ik}\}$  являются минорами матрицы  $\mathbf{A}$  и определяются как

$$\hat{a} = \begin{pmatrix} -a_1 & -m \\ 1 & -a_2 \end{pmatrix}, \quad \hat{b} = \begin{pmatrix} -b_1 & 0 \\ 1 & -b_2 \end{pmatrix}. \quad (40)$$

Характеристическое уравнение (37) имеет четыре корня  $\lambda_j(k)$ . Два корня в интересующем нас случае являются комплексно-сопряженными и два – действительными. Один из действительных корней уравнения (37) (пусть, например, это будет  $\lambda_1(k)$ ) в некотором интервале значений параметров системы и волновых чисел  $k$  может принимать положительное значение. Тогда в окрестности точки неустойчивости ( $\gamma \approx \gamma_c$ ,  $\lambda_1(k) \approx 0$ ), пренебрегая высшими степенями по  $\lambda$ , из (37) имеем

$$\lambda_1 = \lambda_u \approx -\frac{F_0(k^2)}{A_1}, \quad (41)$$

где  $A_1 > 0$  [16].

Неустойчивость имеет место, если выполняется  $F_0(k^2) < 0$ , как следует из (41), или с учетом (38) при

$$S = A_0 - 2\beta[\det \hat{a} \det \hat{b}]^{1/2} > 0. \quad (42)$$

Для рассматриваемой задачи неравенство (42) имеет вид:

$$S(\gamma) = \beta m \left[ 1 + \frac{\alpha\gamma}{1+\gamma} + a_1\beta(1+\alpha\gamma) - 2\sqrt{\frac{\gamma}{1+\gamma}(1+a_1\alpha\beta)(1+\alpha\gamma)} \right] > 0. \quad (43)$$

Численное исследование функции  $S(\gamma)$  в области  $1 < \gamma < \gamma_0$  показывает, что  $S(\gamma)$  от положительного значения  $S(0)$  монотонно убывает и при некотором бифуркационном значении  $\gamma_c$  меняет знак, то есть в области  $\gamma < \gamma_c$  однородное состояние системы (30) является неустойчивым.

Значению  $\gamma_c$  соответствует критическое значение волнового числа  $k = k_c$ , которое находится из условия  $F_0(k^2, \gamma_c) = 0$ . В результате получаем  $k_c^2 = A_0(\gamma_c)/(2\beta^2)$ , что соответствует характерному пространственному масштабу  $d' = 2\pi/k_c$  или

$$d = d'/(r\rho_{01}). \quad (44)$$

### 3. Уравнения для параметров порядка

Неоднородные решения нелинейной системы уравнений (30) в окрестности бифуркационного значения управляющего параметра ( $\gamma \approx \gamma_c$ ) будем искать в классе периодических функций по пространственной переменной  $x'$ . Для этого решение системы (30) представим виде [10]:

$$\mathbf{q}(x', t') = \sum_{k,j} \mathbf{V}^j \xi_k^j(t') \exp \{ikx'\}. \quad (45)$$

Здесь  $\xi_k^j(t')$  – некоторые комплексные неизвестные функции времени  $t'$ . Суммирование производится по всевозможным значениям волновых чисел  $k = 2\pi/L'$

( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ), дискретность которых следует из граничных условий (29). Собственные функции матрицы  $A(ik)$  удовлетворяют условию ортогональности

$$\frac{1}{L'} \int_0^{L'} \exp[i(k - k')x'] dx = \delta_{kk'}. \quad (46)$$

Введем в рассмотрение векторы  $\mathbf{W}^i = \{w_j^i\}$ , ортогональные векторам  $\mathbf{V}^j$  и, соответственно, удовлетворяющие условию

$$(\mathbf{W}^i, \mathbf{V}^j) = \delta_{ij}, \quad (47)$$

откуда находим компоненты векторов  $\mathbf{W}^i$ . Подставим разложение (45) в систему (30), скалярно умножим на  $\mathbf{W}^j$  и используем (46). В результате для функций  $\xi_k^j(t')$  получим систему уравнений:

$$\frac{\partial \xi_k^j}{\partial t'} = \lambda_k^j \xi_k^j + \sum_{s=1}^4 w_s^j N_s. \quad (48)$$

Поскольку нелинейные функции  $N_s$  квадратичны по  $q_j$ , то их можно представить в форме

$$N_s = \sum_{m,n=1}^4 C_{nm}^s q_m q_n, \quad (49)$$

где матрицы  $C_{nm}^s$  определяются из (25)–(28).

С учетом (49) и разложения (45) система уравнений (48) принимает вид:

$$\frac{\partial \xi_k^j}{\partial t'} = \lambda_k^j \xi_k^j + \sum_{i,l} \sum_{k',k''} G_j^{lk}(k', k'') \xi_{k'}^i \xi_{k''}^l, \quad (50)$$

где

$$G_j^{lk}(k', k'') = \sum_{s=1}^4 \sum_{n,m} w_s^j C_{mn}^j v_n^l(k') v_m^i(k''). \quad (51)$$

Обратимся к исследованию системы уравнений (50). В рассматриваемом случае, поскольку собственные значения для неустойчивой моды (параметра порядка) действительны, можно воспользоваться адиабатическим приближением [10], которое основано на различии временных масштабов поведения мод. Идея адиабатического приближения заключается в том, что вблизи точки «фазового перехода» времена релаксации незатухающих мод стремятся к бесконечности, поэтому затухающие моды адиабатически следуют за незатухающими и скорость их изменения определяется именно этими модами. Предположим, что одна из мод  $\xi_u = \xi_{k_c}$  становится неустойчивой (это достигается при  $\gamma < \gamma_c$ ) с инкрементом  $\lambda_u = \lambda_{k_c} > 0$ . Для остальных мод при этом выполняются условия

$$\operatorname{Re} \{\lambda_k^j\} < 0, \quad \lambda_u \ll |\operatorname{Re} \lambda_k^j|. \quad (52)$$

Разобьем систему (50) на подсистемы неустойчивых и устойчивых мод. Получим

$$\frac{\partial \xi_u}{\partial t'} = \lambda_u \xi_u + \sum_{i,l} \sum_{k'+k''=k_c} G_1^{lk}(k', k'') \xi_{k'}^i \xi_{k''}^l, \quad (53)$$

$$\frac{\partial \xi_k^j}{\partial t'} = \lambda_k^j \xi_k^j + \sum_{i,l} \sum_{k'+k'' \neq k_c} G_j^{lk}(k', k'') \xi_{k'}^i \xi_{k''}^l. \quad (54)$$



Используя принцип адиабатического исключения затухающих мод [10] и полагая в (54) левую часть равной нулю, алгебраически выразим затухающие моды через  $\xi_u$ . В итоге приходим к уравнению для параметра порядка:

$$\frac{\partial \xi_u}{\partial t'} = \lambda_u \xi_u - G \xi_u |\xi_u|^2, \quad (55)$$

где

$$G = \sum_{j=1}^4 [G_1^{1j}(2, -1) + G_1^{1j}(-1, 2)] G_j^{11} / \lambda_2^j. \quad (56)$$

В случае если величина  $G$  имеет положительное значение, то стационарное неоднородное решение уравнения (55) устойчиво и реализуется в режиме «мягкого» возбуждения. В противном случае ( $G < 0$ ) необходим учет высших членов по  $\xi_u$ , возникающих в уравнениях для параметров порядка при рассмотрении динамики затухающих мод  $\xi_n^j$  ( $n > 2$ ). В этом случае стационарная структура зарождается при достижении точки бифуркации с конечной амплитудой («жесткий» режим возбуждения). Рассмотрим случай  $G > 0$ .

Переменная  $\xi_u$  в общем случае – комплексная величина, то есть  $\xi_u = |\xi_u| \times \exp(i\varphi)$ . Подставляя последнее выражение для  $\xi_u$  в (55), получим дифференциальные уравнения для  $|\xi_u|$  и  $\varphi$ . Нетрудно показать, что уравнение для фазы  $\dot{\varphi} = 0$ , то есть  $\varphi = \text{const}$ . Без ограничения общности положим  $\varphi = 0$ , тогда  $\xi_u = |\xi_u|$  является действительной величиной и уравнение (55) запишется в виде

$$\frac{\partial \xi_u}{\partial t'} = \lambda_u \xi_u - G \xi_u^3. \quad (57)$$

Умножим это уравнение на  $2\xi_u$  и сделаем замену  $\eta = \xi_u^2$ , тогда (57) сведется к логистическому уравнению

$$\frac{\partial \eta}{\partial t'} = 2\lambda_u \eta - 2G\eta^2, \quad (58)$$

решение которого хорошо известно [10]. С учетом этого решения и замены переменной  $\xi_u = \sqrt{\eta}$  получим решение уравнения (57):

$$\xi_u(t') = \left[ \frac{\lambda_u}{2G} \left( 1 - \frac{C \exp\{-2\lambda_u t'\} - 1}{C \exp\{-2\lambda_u t'\} + 1} \right) \right]^{1/2}, \quad (59)$$

которое асимптотически стремится к стационарному решению ( $C = \text{const}$ )

$$\xi_u = \sqrt{\lambda_u / G} \approx (\gamma_c - \gamma)^{1/2}. \quad (60)$$

Бифуркационная диаграмма стационарных решений для исходной системы уравнений показана на рис. 1.

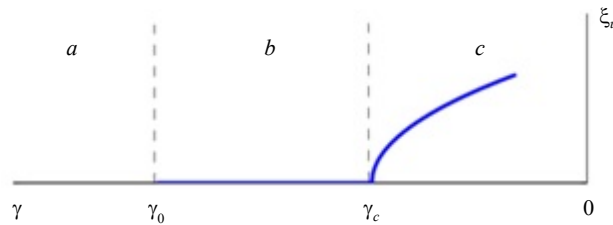


Рис. 1. Диаграмма решений системы уравнений (7)–(10) в зависимости от параметра  $\gamma$

На рисунке обозначено:  $a$  – область однородного решения для подвижных дислокаций;  $b$  – область однородного решения для двух типов дислокаций ( $\gamma_0 = (m\alpha\beta)^{-1}$ );  $c$  – область пространственно-неоднородных периодических решений с характерным увеличением амплитуды структуры  $\xi_u \approx (\gamma_c - \gamma)^{1/2}$ .

Общее решение в этом случае, согласно разложению (45), принимает вид

$$q_j(x', t') = \xi_u \sum_{k=\pm k_c} v_j(k) \exp \{ikx'\}. \quad (61)$$

Тогда для исходных переменных  $\rho$  и  $I$  с учетом (23) стационарное решение запишется в виде:

$$\rho = \rho_1 + \rho_2 = \rho_0 [1 + a_0 m (g_2 - g_1) \sin(k_c x')], \quad (62)$$

$$I = I_1 + I_2 = \rho_0 a_0 (1 + m g_4) \cos(k_c x'). \quad (63)$$

Здесь введена общая плотность дислокаций  $\rho_0 = \rho_{01} + \rho_{02}$  и учтено, что  $m = \rho_{02}/\rho_{01}$ . Кроме того, введены параметры

$$a_0 = \frac{2v_3}{1+m} \xi_u, \quad g_1 = \frac{|v_1|}{v_3}, \quad g_2 = \frac{|v_2|}{v_3}, \quad g_4 = \frac{|v_4|}{v_3}. \quad (64)$$

### Заключение

Экспериментальные данные показывают, что ячеистая дислокационная структура наблюдается на второй и третьей стадиях пластической деформации при умеренных и низких температурах. Вначале стенки ячеек имеют рыхлую структуру и содержат одинаковое число дислокаций разного знака [20], но с ростом деформации ячейки становятся все более разориентированными [15, 20]. Форма ячеек, как правило, не имеет правильных очертаний. В зависимости от того или иного эксперимента ее можно интерпретировать как полосовую, ромбическую, гексагональную и другой формы. При этом характерный размер ячеек практически не зависит от формы ячеек.

Рассмотрим формирование, например, ромбической структуры в кристалле с гранецентрированной решеткой (ГЦК-кристалл). Известно, что металлы с гранецентрированной решеткой деформируются в первую очередь по плотноупакованным плоскостям  $\{111\}$  в направлениях  $\langle 110 \rangle$ . Предположим, что кристалл ориентирован таким образом, что в процессе пластической деформации участвуют две системы скольжения  $[110]$  и  $[011]$  в плоскости  $(1\bar{1}1)$ .

Тогда для общей плотности дислокаций  $\rho = \rho_{[110]} + \rho_{[011]}$  и избыточной  $I = I_{[110]} + I_{[011]}$  в плоскости  $(1\bar{1}1)$  будет сформирована ромбическая структура

$$\rho = 2\rho_0 \left\{ 1 + a_0 (m g_2 - g_1) \left[ \sin k_c \left( \frac{x}{2} + y \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \sin k_c \left( \frac{x}{2} - y \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right] \right\}, \quad (65)$$

$$I = I_{\max} \left[ \cos k_c \left( \frac{x}{2} + y \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \cos k_c \left( \frac{x}{2} - y \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right], \quad (66)$$

вытекающая из решений (62), (63),  $I_{\max} = 2\rho_0 a_0 (1 + m g_4)$ .

Изображение ячеистой структуры, соответствующее формулам (65) и (66), показано на рис. 2, где  $a$  – для суммарной плотности дислокаций,  $b$  – аналогичная структура со смещением на четверть периода  $d$  для избыточной плотности дислокаций.

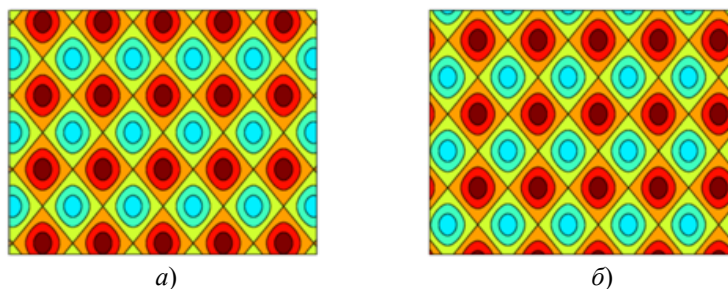


Рис. 2. Ромбическая ячеистая структура

Изображенная структура представляет собой плоское образование, поскольку ячейки лежат в плоскости  $(1\bar{1}1)$ . Такая структура часто называется «слоистой» ячеистой структурой [6, 7].

Рассмотрим возможный механизм образования субграниц в ячеистой структуре. По мере увеличения деформации в максимумах избыточной плотности дислокаций  $I_{\max}$  дислокационной структуры достигается критическая плотность дислокаций определенного знака. Это приводит к вытеснению краевых дислокаций из своей плоскости скольжения за счет переползания. При этом дислокации формируют устойчивую конфигурацию (стенку), расположенную в плоскости, перпендикулярной плоскости скольжения [17]. Так возникает разориентированная ячеистая структура, обусловленная формированием динамических ячеек с избыточной плотностью дислокаций. Предполагается в дальнейшем этот механизм рассмотреть специально.

#### Список литературы

1. Bachurin D.V., Murzaev R.T., Nazarov A.A. Ultrasonic influence on evolution of disordered dislocation structures. *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*. 2017. Vol. 25. Iss. 8. P. 85–100. DOI: 10.1088/1361-651X/aa9199.
2. Pham M., Solenthaler C., Janssens K., Holdsworth S. Dislocation structure evolution and its effects on cyclic deformation response of AISI 316L stainless steel. *Materials Science and Engineering: A*. 2011. Vol. 528. Iss. 7-8. P. 3261–3269. <https://doi.org/10.1016/j.msea.2011.01.015>.
3. Chen X., Li Y., Zhu Y., Yang B. Enhanced irradiation and corrosion resistance of 316LN stainless steel with high densities of dislocations and twins. *Journal of Nuclear Materials*. 2019. Vol. 517. P. 234–240. <https://doi.org/10.1016/j.jnucmat.2019.02.016>.
4. Bertsch K., De Bellefon G.M., Kuehl B., Thoma D. Origin of dislocation structures in an additively manufactured austenitic stainless steel 316L. *Acta Materialia*. 2020. Vol. 199. P. 19–33. <https://doi.org/10.1016/j.actamat.2020.07.063>.
5. Walgraef D., Aifantis E.C. On the formation and stability of dislocation patterns. I. One dimensional consideration. *International Journal of Engineering Science*. 1985. Vol. 23. Iss. 12. P. 1351–1358. [https://doi.org/10.1016/0020-7225\(85\)90113-2](https://doi.org/10.1016/0020-7225(85)90113-2).
6. Kratochvil J. Dislocation pattern formation in metals. *Revue de Physique Appliquée*. 1988. Vol. 23. Iss. 4. P. 419–429. DOI: 10.1051/rphysap:01988002304041900.
7. Малыгин Г.А. Процессы самоорганизации дислокаций и пластичность кристаллов. *УФН*. 1999. Т. 169. №9. С. 979–1010. <https://doi.org/10.3367/UFNr.0169.199909c.0979>.
8. Turing A.M. The chemical basis of the morphogenesis. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series B. Biological Sciences*. 1952. Vol. 237. No 641. P. 37–72.
9. Николис Г., Пригожин И. *Самоорганизация в неравновесных системах*. М.: Мир, 1979. 512 с.
10. Хакен Г. *Синергетика* М.: Мир, 1980. 406 с.
11. Сарафанов Г.Ф., Перевезенцев В.Н., Рыбин В.В. *Коллективные процессы в ансамб-*

ле дислокаций и фрагментация металлов при пластической деформации. Н. Новгород: Изд-во ИПФ РАН, 2017. 186 с.

12. Laird C., Chasley P., Mugrabi H. Low energy dislocation structures produced by cyclic deformation. *Materials Science and Engineering*. 1986. Vol. 81. P. 433–450.

13. Mermin N.D. The topological theory of defects in ordered media. *Reviews of Modern Physics*. 1979. Vol. 51. Iss. 3. P. 591–648. DOI: 10.1103/REVMODPHYS.51.591.

14. Kuhlmann-Wilsdorf D. Theory of dislocation cell sizes in deformed metals. *Materials Science and Engineering*. 1982. Vol. 55. Iss. 1. P. 79–83. [https://doi.org/10.1016/0025-5416\(82\)90086-6](https://doi.org/10.1016/0025-5416(82)90086-6).

15. Конева Н.А., Козлов Э.В. Физическая природа стадийности пластической деформации. *Изв. вузов. Физика*. 1990. №2. С. 87–106.

16. Сарафанов Г.Ф. Кинетическая неустойчивость в ансамбле дислокаций при пластической деформации металлов. *Проблемы прочности и пластичности*. 2023. Т. 85. №2. С. 206–214. <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2023-85-2-206-214>.

17. Хирт Дж., Лоте И. *Теория дислокаций*. М.: Атомиздат, 1972. 599 с.

18. Фридель Ж. *Дислокации*. М.: Мир, 1967. 643 с.

19. Сарафанов Г.Ф. К теории образования неоднородных дислокационных структур. I. Особенности эволюции ансамбля винтовых и краевых дислокаций. *Физика металлов и металловедение*. 1998. Т. 85. Вып. 3. С. 46–53.

20. Козлов Э.В. Параметры мезоструктуры и механические свойства однофазных металлических материалов. *Вопросы материаловедения*. 2002. Вып. 1. №29. С. 50–69.

#### References

1. Bachurin D.V., Murzaev R.T., Nazarov A.A. Ultrasonic influence on evolution of disordered dislocation structures. *Modell. Simul. Mater. Sci. Eng.* 2017. Vol. 25. Iss. 8. P. 85–100. DOI: 10.1088/1361-651X/aa9199.

2. Pham M., Solenthaler C., Janssens K., Holdsworth S. Dislocation structure evolution and its effects on cyclic deformation response of AISI 316L stainless steel. *Mater. Sci. Eng., A*. 2011. Vol. 528. Iss. 7-8. P. 3261–3269. <https://doi.org/10.1016/j.msea.2011.01.015>.

3. Chen X., Li Y., Zhu Y., Yang B. Enhanced irradiation and corrosion resistance of 316LN stainless steel with high densities of dislocations and twins. *J. Nucl. Mater.* 2019. Vol. 517. P. 234–240. <https://doi.org/10.1016/j.jnucmat.2019.02.016>.

4. Bertsch K., De Bellefon G.M., Kuehl B., Thoma D. Origin of dislocation structures in an additively manufactured austenitic stainless steel 316L. *Acta Mater.* 2020. Vol. 199. P. 19–33. <https://doi.org/10.1016/j.actamat.2020.07.063>.

5. Walgraef D., Aifantis E.C. On the formation and stability of dislocation patterns. I. One dimensional consideration. *International Journal of Engineering Science*. 1985. Vol. 23. Iss. 12. P. 1351–1358. [https://doi.org/10.1016/0020-7225\(85\)90113-2](https://doi.org/10.1016/0020-7225(85)90113-2).

6. Kratochvil J. Dislocation pattern formation in metals. *Revue de Physique Appliquée*. 1988. Vol. 23. Iss. 4. P. 419–429. DOI: 10.1051/rphysap:01988002304041900.

7. Malygin G.A. Dislocation self-organization processes and crystal plasticity. *Physics. Uspekhi*. 1999. Vol. 42. P. 887–916. DOI: 10.1070/pu1999v042n09ABEH000563

8. Turing A.M. The chemical basis of the morphogenesis. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series B. Biological Sciences*. 1952. Vol. 237. No 641. P. 37–72.

9. Nicolis G., Prigogine I. *Self-Organisation in Nonequilibrium System*. New York. John Wiley & Son, Inc. 1977. 491 p.

10. Haken H. *Synergetics*. Berlin. Heidelberg. New York. Springer-Verlag. 1978. 405 p.

11. Sarafanov G.F., Perevezentsev V.N., Rybin V.V. *Kollektivnye protsessy v ansamble dislokatsiy i fragmentatsiya metallov pri plasticheskoy deformatsii* [Collective Processes in the Ensemble of Dislocations and Fragmentation of Metals during Plastic Deformation]. Nizhny Novgorod. Institute of Applied Physics of RAN Publ. 2017. 186 p. (In Russian).

12. Laird C., Chasley P., Mugrabi H. Low energy dislocation structures produced by cyclic deformation. *Mater. Sci. Eng.* 1986. Vol. 81. P. 433–450.

13. Mermin N.D. The topological theory of defects in ordered media. *Reviews of Modern Physics*. 1979. Vol. 51. Iss. 3. P. 591–648. DOI: 10.1103/REVMODPHYS.51.591.
14. Kuhlmann-Wilsdorf D. Theory of dislocation cell sizes in deformed metals. *Mater. Sci. Eng.* 1982. Vol. 55. Iss. 1. P. 79–83. [https://doi.org/10.1016/0025-5416\(82\)90086-6](https://doi.org/10.1016/0025-5416(82)90086-6).
15. Koneva N.A., Kozlov E.V. Fizicheskaya priroda stadiynosti plasticheskoy deformatsii [The physical nature of the stages of plastic deformation]. *Izvestiya vuzov. Fizika*. 1990. No 2. P. 87–106 (In Russian).
16. Sarafanov G.F. Kineticheskaya neustoychivost v ansamble dislokatsiy pri plasticheskoy deformatsii metallov [Kinetic instability in an ensemble of dislocations under plastic deformation of metals]. *Problemy prochnosti i plastichnosti [Problems of Strength and Plasticity]*. 2023. Vol. 85. Vol. 2. P. 206–214 (In Russian).
17. Hirth J.P., Lothe J. *Theory of Dislocations*. New York. McGraw-Hill. 1968. 780 p.
18. Friedel J. *Dislocations*. Oxford. Pergamon Press. 1964. 491 p.
19. Sarafanov G.F. On the theory of dislocation patterning: I. Evolution of an ensemble of screw and edge dislocations. *The Physics of Metals and Metallography*. 1998. Vol. 85. No 3. P. 276–281.
20. Kozlov E.V. Parametry mezostrukturny i mekhanicheskie svoystva odnofaznykh metallicheskih materialov [Mesostructure parameters and mechanical properties of single-phase metallic materials]. *Voprosy materialovedeniya*. 2002. Vol. 1. No 29. P. 50–69 (In Russian).

## THE MECHANISM OF FORMATION OF CELLULAR DISLOCATION STRUCTURES IN THE ENSEMBLE OF EDGE DISLOCATIONS\*

Sarafanov G.F.<sup>1</sup>, Shondin Yu.G.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Mechanical Engineering Research Institute of the Russian Academy of Sciences –  
Branch of Federal Research Center “Institute of Applied Physics  
n.a. A.V. Gaponov-Grekhov of the RAS”, Nizhny Novgorod, Russian Federation*

<sup>2</sup>*Kozma Minin Nizhny Novgorod State Pedagogical University,  
Nizhny Novgorod, Russian Federation*

gf.sarafanov@yandex.ru

*Received by the Editor 2025/04/21*

The issue of the origin and formation of dislocated cellular disoriented structures is investigated on the basis of the proposed evolutionary model. The model is a system of material balance equations for two types of dislocations. Accordingly, mobile dislocations and dislocations in a bound state (sedentary). It is assumed that dislocations move under the action of an applied external voltage in opposite directions at a constant speed. We neglect the long-range stress of dislocations, but we take into account their local interaction, namely: reproduction, immobilization, recombination and runoff of dislocations. The model as a whole represents a system of four partial differential equations with complex generation-recombination dynamics. The initial system is transformed to a system for total and excess dislocation density, and possible homogeneous stationary states are found for the new variables. There are two of them: the first is only mobile, the second is mobile and sedentary dislocations for their total density. The excess density in both states is zero. A control parameter of the system is introduced that characterizes the volume fraction of the substructure on which dislocation runoff occurs, decreasing with in-creasing deformation. Next, a linear and nonlinear analysis of the system is performed. It is established that as the control parameter decreases, the solutions of the system

---

\* The Russian Science Foundation supported this work, project No 25-29-20300.

reflected in the bifurcation diagram form three regions. In the first region, the homogeneous state is stable only for mobile dislocations. In the second domain, a uniform solution is stable for both types of dislocations. In the third area, a spatially inhomogeneous periodic solution for total and excess dislocation density becomes stable, as shown by nonlinear analysis, which characterizes the properties of the cellular structure.

*Keywords:* plastic deformation of metals, instability of deformation, self-organization, dissipative structures, cellular dislocation disoriented structure, walls.