

УДК 539.372

DOI: 10.32326/1814-9146-2025-87-4-411-426

**ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ЗАКОНОМЕРНОСТЕЙ  
СЛОЖНОГО ПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ  
ЛАТУНИ Л63 ПО ПЛОСКИМ ТРАЕКТОРИЯМ  
НЕПРОПОРЦИОНАЛЬНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ\***

© 2025 г.

**Игумнов Л.А., Волков И.А.,  
Костюков В.Е., Прилуцкий М.Х., Панов В.А.**

*Национальный исследовательский Нижегородский государственный  
университет им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Российская Федерация*

ivan.volkov@mech.unn.ru

*Поступила в редакцию 08.09.2025*

Рассматриваются процессы сложного пластического деформирования латуни Л63 по плоским траекториям непропорционального деформирования. Используется вариант уравнений упругопластичности Ю.Г. Коротких, основанный на представлении о поверхности текучести и принципе градиентальности вектора скорости пластических деформаций к поверхности текучести в точке нагружения, уравнения состояния которого отражают основные эффекты упругопластического деформирования материала для произвольных сложных траекторий деформирования. При занулении соответствующих материальных параметров из общего варианта уравнений, как частный случай, получаются все основные формы уравнений пластического деформирования при малых деформациях (система «вложенных» моделей).

Особое внимание уделяется вопросам моделирования процессов упругопластического деформирования для траекторий непропорционального нагружения, сопровождающихся вращением главных площадок тензоров напряжений, полных и пластических деформаций.

Для оценки степени достоверности и определения границ применимости определяющих соотношений пластичности проведены численные исследования сложного пластического деформирования латуни Л63 по плоским траекториям непропорционального деформирования:

- плоским двухзвенным траекториям с различным углом излома;
- плоским гладким траекториям деформирования различной кривизны;
- четырех окружностей одинакового радиуса с изменением кривизны при переходе одной полуокружности к другой;
- гладким двухзвенным траекториям деформирования: на первом участке был реализован процесс пропорционального деформирования кручением, а на втором – процесс сложного деформирования по криволинейным траекториям постоянного радиуса с различными углами излома.

---

\* Выполнено при финансовой поддержке Министерством науки и высшего образования РФ, соглашение No FSWR-2023-0036.

Результаты исследования демонстрируют, что модель Ю.Г. Коротких корректно предсказывает основные эффекты сложного пластического деформирования латуни Л63. Модель обеспечивает качественное описание поведения материалов для плоских траекторий нагружения любой кривизны, а ее точность является достаточной для выполнения практических расчетов.

Отмечен ряд характерных особенностей, сопровождающих процесс сложного упругопластического деформирования латуни Л63 (наличие «нырка» на диаграмме деформирования в экспериментах по типу плоского «веера», наличие аналогичного «нырка» при переходе от прямолинейного участка деформирования к криволинейному, на криволинейных траекториях постоянной кривизны, где меняется знак – векторные свойства имеют волнообразный характер, и др).

*Ключевые слова:* пластичность, сложное нагружение, моделирование, численный эксперимент, натурный эксперимент, плоские траектории деформирования.

## **Введение**

Развитие конструкций и аппаратов современного машиностроения характеризуется ростом рабочих параметров, снижением металлоемкости, значительным ростом удельного веса нестационарных режимов нагружения. Указанные тенденции привели к тому, что в настоящее время одной из наиболее важных задач современного машиностроения является задача надежной оценки ресурса объекта, диагностики выработанного и прогноза остаточного ресурса в процессе эксплуатации. Эксплуатационные условия работы таких объектов, как правило, характеризуются нестационарными термомеханическими нагрузками, воздействиями внешних полей различной природы, приводящими к деградации начальных прочностных свойств материалов и, в конечном итоге, исчерпанию ресурса материала наиболее опасных узлов объекта [1–3].

Существуют различные механизмы, которые могут определять процессы исчерпания ресурса конкретного объекта: многоцикловая усталость, малоцикловая усталость, нестационарная ползучесть, коррозия и др. (с учетом их взаимодействия), для которых образование трещины является результатом сложных с физической точки зрения процессов преобразования начальной структуры конструкционного материала.

На протяжении долгого времени основные исследования в механике деформируемых сред были сосредоточены на создании моделей поведения материалов – уравнений состояния. Эти модели описывают реакцию материалов на различные пути деформирования и температурные режимы нагружения. Разработка таких моделей стимулировалась, с одной стороны, практическими потребностями в оценке напряженно-деформированного состояния (НДС) элементов конструкций, а с другой стороны, – развитием технологий численных методов. Современное численное моделирование позволяет рассчитать НДС для очень сложных инженерных конструкций, используя практически любые нелинейные зависимости между тензорами напряжений, деформаций и их скоростей в реальных эксплуатационных условиях.

В современной механике деформируемых сред ключевой задачей становится прогнозирование совместного протекания процессов деформации и накопления повреждений. Это необходимо для ответа на принципиальные вопросы: определение критических зон конструкции с точки зрения накопления повреждений в материале с последующим деформированием и развитием магистральной трещины.

Математическая строгость формирует модели, а полнота системы базовых экспе-

риментов для ее оснащения обеспечивает точность прогноза и оценки ресурса, что описывает эволюцию НДС в заданных условиях. Несмотря на существование обширного класса моделей, учитывающих поврежденность, многие из них имеют существенные ограничения. Зачастую они применимы лишь к узким классам нагружения, не интегрированы с уравнениями деформирования и, как следствие, не способны отразить влияние истории изменения НДС, температуры и скоростей деформации на кинетику накопления повреждений.

Между тем, характер предшествующего вязкоупругопластического деформирования – специфика траектории нагружения, режимы изменения температуры, тип и эволюция напряженного состояния – оказывает большое влияние на интенсивность процессов развития повреждений. Это обуславливает важность детального анализа кинетики НДС в опасных зонах конструктивных элементов и его корректного математического описания с помощью соответствующих уравнений состояния.

Таким образом, современное развитие конститутивных моделей, в частности, для вязкоупругопластических сред, должно быть подчинено вопросам разрушения. Необходимо уточнить процедуры расчета деформаций по заданной истории нагружения на выявление значимых физических закономерностей, которые управляют процессами разрушения.

Разработка и верификация моделей упругопластических сред основывается на анализе данных, полученных в ходе испытаний лабораторных образцов. Нагружение при таких испытаниях моделирует условия, в которых конструкционный материал функционирует в составе реального конструктивного элемента.

Изучение закономерностей упругопластического деформирования также вносит существенный вклад в развитие фундаментальных основ теории пластичности. Для подтверждения адекватности определяющих соотношений требуется выполнение расчетов и последующее сравнение их результатов с известными экспериментальными данными для различных по свойствам конструкционных сплавов и широкого спектра траекторий деформирования. Полученные в таких работах выводы могут быть применены и для уточнения материальных параметров, скалярных функций и функционалов, входящих в структуру конститутивных соотношений моделей пластичности [4–14].

В настоящем исследовании для моделирования сложного пластического деформирования латуни Л63 по плоским траекториям с произвольной кривизной применяется одна из современных моделей теории пластического течения, учитывающая кинематический и изотропный механизмы упрочнения [4, 5]. Результаты численного моделирования сопоставляются с данными натурных экспериментов, выполненных на высокоточном автоматизированном испытательном оборудовании [12, 13]. Продemonстрировано, что расчетные данные качественно и с удовлетворительной точностью количественно описывают поведение латуни Л63 при сложном нагружении по различным плоским траекториям непропорционального деформирования.

## **1. Базовые конститутивные соотношения модели термопластичности**

Система уравнений термопластичности разработана для описания ключевых эффектов деформирования в материалах [4, 5] при эксплуатационных нагружениях. Выделены следующие эффекты:

- упрочнение при монотонных и циклических нагрузках;

– локальная анизотропия пластического деформирования при резких изменениях траекторий деформаций;

– неізотермическое упругопластическое деформирование.

В основу модели положено:

– аддитивность полных деформаций и скоростей деформаций

$$e_{ij} = e_{ij}^e + e_{ij}^p, \quad \dot{e}_{ij} = \dot{e}_{ij}^e + \dot{e}_{ij}^p,$$

где индекс  $p$  означает пластичность,  $e$  – упругость;

– эволюция поверхности текучести моделируется в пространстве напряжений через изменение радиуса  $C_p$  и смещение центра  $\rho_{ij}^p$ ;

– модель развита в диапазоне малых деформаций;

– изменение объема материала чисто упругое;

– материал изотропен в исходном состоянии.

Современные экспериментальные и теоретические исследования позволили установить следующие закономерности поведения материалов [6–14]:

– процесс упрочнения при монотонном нагружении включает в себя две составляющие: кинематическое и изотропное упрочнение;

– величина модуля упрочнения является непостоянной и изменяется в зависимости от ориентации вектора приращения напряжений в данной точке нагружения;

– закономерности циклического и монотонного упрочнений различны;

– переходные нестационарные процессы при циклическом нагружении определяет изотропная составляющая упрочнения;

– стабилизированные петли гистерезиса формируются интенсивностью амплитуды деформаций и характеристиками непропорциональности циклического нагружения, а закономерности деформирования в петле – анизотропной составляющей упрочнения;

– жесткое циклическое нагружение в условиях начальной анизотропии сопровождается релаксацией средних напряжений цикла.

В рамках представленной модели пластичности для математического описания перечисленных закономерностей циклического деформирования используется система эволюционных уравнений для радиуса поверхности текучести  $C_p$  и для координат ее центра  $\rho_{ij}^p$ .

Основные соотношения модели термопластичности с комбинированным кинематическим и изотропным упрочнением заключаются в следующем [4, 5].

**Критерий пластичности.** Для моделирования поведения материала при монотонном и циклическом нагружении в пространстве напряжений вводится критерий пластичности Мизеса, который математически представляется уравнением:

$$F_s = S_{ij}S_{ij} - C_p^2 = 0, \quad S_{ij} = \sigma'_{ij} - \rho_{ij}^p, \quad (1)$$

где  $\sigma'_{ij}$  – компоненты девиаторной части тензора напряжений.

**Эволюционное уравнение для радиуса поверхности текучести.** Принимается эволюционное уравнение для радиуса поверхности текучести вида [4, 5]:

$$\dot{C}_p = [q_\chi H(F_p) + a(Q_s - C_p)\Gamma(F_p)]\dot{\chi} + q_3\langle\dot{T}\rangle, \quad (2)$$

$$C_p = C_p^0 + \int_0^t \dot{C}_p dt, \quad \dot{\chi} = \left( \frac{2}{3} \dot{e}_{ij}^p \dot{e}_{ij}^p \right)^{1/2}, \quad (3)$$

$$\chi_m = \int_0^t \dot{\chi} H(F_p) dt, \quad \chi = \int_0^t \dot{\chi} dt, \quad (4)$$

$$q_\chi = \frac{q_2 A \psi_1 + (1-A) q_1}{A \psi_1 + (1-A)}, \quad Q_s = \frac{Q_2 A \psi_2 + (1-A) Q_1}{A \psi_2 + (1-A)}, \quad 0 \leq \psi_i \leq 1 \quad (i=1, 2), \quad (5)$$

$$A = 1 - \cos^2 \theta, \quad \cos \theta = n_{ij}^e n_{ij}^s, \quad (6)$$

$$n_{ij}^e = \frac{\dot{\epsilon}'_{ij}}{(\dot{\epsilon}'_{ij} \dot{\epsilon}'_{ij})^{1/2}}, \quad n_{ij}^s = \frac{S_{ij}}{(S_{ij} S_{ij})^{1/2}}, \quad (7)$$

$$H(F_\rho) = \begin{cases} 1, & F_\rho = 0 \wedge \rho_{ij}^p \rho_{ij}^p > 0 \\ 0, & F_\rho < 0 \vee \rho_{ij}^p \rho_{ij}^p \leq 0 \end{cases}, \quad \Gamma(F_\rho) = 1 - H(F_\rho). \quad (8)$$

Отмечены материальные параметры и скалярные функции модели термопластичности:  $q_1, q_2, q_3$  – модули изотропного упрочнения, описывающие монотонное лучевое нагружение ( $q_1$ ), излом траектории деформирования на  $90^\circ$  ( $q_2$ ), температурную зависимость радиуса поверхности текучести ( $q_3$ );  $a$  – постоянная, определяющая скорость стабилизации формы петли гистерезиса;  $Q_s$  – стационарное значение радиуса поверхности текучести при заданных  $\rho_{\max}$  и температуре  $T$ ;  $\chi$  и  $\chi_m$  – длины траекторий пластического деформирования при циклическом и монотонном нагружении;  $C_p^0$  – начальный радиус поверхности текучести.

Уравнение (2) в целом моделирует локальную анизотропию пластического упрочнения через параметр  $A$ , который количественно характеризует отклонение вектора догрузки от нормали к поверхности текучести в точке нагружения. Первый член описывает изотропное упрочнение при монотонном пластическом деформировании ( $H(F_\rho) = 1$  и  $\Gamma(F_\rho) = 0$ ), второй член характеризует циклическое упрочнение материала ( $H(F_\rho) = 0$  и  $\Gamma(F_\rho) = 1$ ), третий член учитывает изменение радиуса поверхности текучести при варьировании температуры. Операторы  $H(F_\rho)$  и  $\Gamma(F_\rho)$  обеспечивают автоматическое разделение процессов монотонного и циклического деформирования.

**Уравнение для смещения поверхности текучести.** Смещение центра поверхности текучести происходит по принципу деформационного запаздывания А.А. Ильюшина [15]. Тогда упрочнение зависит лишь от характеристик деформирования на конечном участке траектории, непосредственно предшествующем текущему состоянию:

$$\dot{\rho}_{ij}^p = g_1^p \dot{\epsilon}_{ij}^p - g_2^p \rho_{ij}^p \dot{\chi} - g_3^p \rho_{ij}^p \langle \dot{T} \rangle, \quad \rho_{ij}^p = \int_0^t \dot{\rho}_{ij}^p dt, \quad (9)$$

где  $g_1^p > 0$ ,  $g_2^p > 0$  и  $g_3^p > 0$  – модули анизотропного упрочнения. Первый и второй члены этого уравнения отвечают за анизотропную часть деформационного упрочнения, а третий – за изменение  $\rho_{ij}^p$  в результате воздействия температуры  $T$ .

Уравнение (9) описывает пространственный эффект Баушингера и анизотропию механических свойств при изменении направления деформирования. Второй член описывает эффект затухающей памяти по внутренней переменной  $\rho_{ij}^p$ , поскольку скорость изменения  $\rho_{ij}^p$  определяется разностью двух составляющих  $g_1^p \dot{\epsilon}_{ij}^p$  и  $g_2^p \rho_{ij}^p \dot{\chi}$ .

Система уравнений (1)–(9) представляет собой обобщенную формулировку, которая в частных случаях содержит все основные известные формы уравнений теории пластического течения в рамках предположения о малых деформациях.

*а) Частный случай изотропного упрочнения.* При  $g_1^p \equiv g_2^p \equiv g_3^p \equiv 0$  и  $\rho_{ij}^p \equiv 0$  в уравнении (9) модель сводится к случаю чисто изотропного нелинейного упрочнения, описываемого уравнением (2). В этом режиме функция  $H(F_\rho)$  принимает значение 1, и циклическое упрочнение не учитывается.

Если в (2)–(8)  $\psi_1$  и  $\psi_2 \equiv 0$ , то изменение изотропного и кинематического упрочнения при непропорциональном деформировании не учитывается:  $q_\chi = q_1$ , а  $Q_s = Q_1$ .

Если  $q_\chi = \text{const}$ , то описывается линейное изотропное упрочнение.

Если  $q_\chi \equiv 0$ , то описывается идеально пластический материал Прандтля – Рейса с постоянной поверхностью текучести  $C_p \equiv C_p^0$ .

б) *Частный случай кинематического упрочнения.* При  $q_\chi = q_2 = q_3 = a \equiv 0$  в (2) имеем случай чисто кинематического нелинейного упрочнения, описываемого уравнением (9).

Если  $g_2^p \equiv 0$  и  $g_1^p = \text{const}$ , имеем случай линейного кинематического упрочнения.

в) *Общий случай кинематического и изотропного упрочнения.* При соответствующем выборе параметров уравнения (1)–(9) переходят в модель J.L. Shaboche, которая описывает нелинейное кинематическое и изотропное упрочнение без учета циклического упрочнения [16].

Проблема моделирования указанных процессов приводит к необходимости интегрирования нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений с начальными условиями. Выбор эффективного алгоритма численного интегрирования этих уравнений имеет определяющее значение для обеспечения устойчивости процесса вычислений параметров процесса деформирования и сокращения времени счета.

В настоящей статье определение основных характеристик процесса упругопластического деформирования материалов (параметров состояния), которые в общем случае описываются тензорами  $\sigma_{ij}$ ,  $e_{ij}$ ,  $e_{ij}^p$ ,  $\rho_{ij}^p$  и скалярами  $\chi$ ,  $C_p$ ,  $T$ , сводится к написанию определяющих соотношений термопластичности в приращениях, которые зависят от выбранного шага  $\Delta t$ . Величина  $\Delta t$  может оперативно корректироваться в расчетах при прохождении участков траектории со сложным характером деформирования. Основным критерием корректировки является обеспечение устойчивости вычислительного процесса. Численные исследования демонстрируют, что применяемая явная схема Эйлера показывает удовлетворительную точность при моделировании рассматриваемых процессов, несмотря на свойство условной устойчивости. Ключевым фактором успешного применения этой схемы является обоснованный выбор величины шага интегрирования  $\Delta t$ . Для практической реализации требуется разработка специализированной методики, которая позволит контролировать скорости изменения рассчитываемых параметров и на основе этого анализа адаптивно определять оптимальную величину  $\Delta t$  на каждом этапе расчета. Авторы предлагают выбирать  $\Delta t$  в зависимости от скорости изменения искомой величины  $\dot{y} = f(y, t)$ . На шаге интегрирования  $\Delta t = t_{n+1} - t_n$  величина  $y_{n+1} = y_n + f\Delta t$ . Шаг интегрирования  $\Delta t$  и ошибка интегрирования  $\delta$  определяются по формулам [17]:

$$\Delta t = \frac{\delta_{\max}}{|f_n - f_{n-1}|} \max[|f_n|, |f_{n-1}|], \quad \delta = \frac{\Delta t |f_n - f_{n-1}|}{\max[|f_n|, |f_{n-1}|]}, \quad (10)$$

где  $\delta_{\max}$  есть верхняя граница  $\delta$ .

## 2. Сравнение численных результатов с экспериментальными данными

В публикациях [12, 13, 18–21] представлены экспериментальные данные по пропорциональному и непропорциональному циклическому упругопластическому деформированию конструкционных металлов и сплавов. Испытания проводились в лабора-

тории механических испытаний на высокоточном автоматизированном расчетно-экспериментальном комплексе [12, 13].

Экспериментальные исследования выполнялись при нормальной температуре (20 °С) на тонкостенных трубчатых образцах из латуни марки Л63 в состоянии поставки. Геометрия образцов характеризовалась следующими параметрами: длина рабочей части  $l = 110$  мм, толщина стенки  $h = 1$  мм, радиус срединной поверхности  $R = 15,5$  мм.

Нагружение образцов осуществлялось по заданной программе испытаний комбинацией осевой силы  $P$ , внутреннего давления  $q$  и крутящего момента  $M$ . Расчет компонент тензоров напряжений и деформаций в рабочей зоне образца выполнялся по стандартным расчетным формулам для данной геометрии:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= \frac{P}{2\pi R h}, \quad \sigma_{22} = \frac{qR}{h}, \quad \sigma_{12} = \frac{M}{2\pi R^2 h}, \quad \sigma_{33} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0, \\ e_{11} &= \frac{\Delta l}{l}, \quad e_{22} = \frac{\Delta R}{R}, \quad e_{12} = \frac{\phi R}{2l},\end{aligned}\tag{11}$$

где  $\phi$  – угол закручивания.

В опытах измерялись деформации  $e_{11}, e_{22}, e_{12}$  и напряжения  $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}$ . Векторы напряжений  $\bar{\sigma}$  и деформаций  $\bar{e}$  в трехмерном совмещенном векторном подпространстве девиаторов с общим неподвижным репером  $\{\bar{e}_k\}$  имеют вид:

$$\bar{\sigma} = S\bar{e}_k, \quad \bar{e} = \mathcal{E}_k \bar{e}_k \quad (k = 1, 2, 3).\tag{12}$$

Далее вычисления проводятся по формулам:

$$\begin{aligned}S_1 &= \sqrt{\frac{3}{2}}(\sigma_{11} - \sigma_0) = \sqrt{\frac{3}{2}}\left[\sigma_{11} - \frac{1}{2}(\sigma_{22} + \sigma_{33})\right], \quad S_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_{22} + \sigma_{33}), \\ S_3 &= \sqrt{2}\sigma_{12}, \quad S_4 = \sqrt{2}\sigma_{23} = 0, \quad S_5 = \sqrt{2}\sigma_{13} = 0, \\ \mathcal{E}_1 &= \sqrt{\frac{3}{2}}(e_{11} - e_0), \quad \mathcal{E}_2 = \sqrt{2}\left(e_{22} + \frac{1}{2}e_{11} - e_0\right), \\ \mathcal{E}_3 &= \sqrt{2}e_{12}, \quad \mathcal{E}_4 = \sqrt{2}e_{23} = 0, \quad \mathcal{E}_5 = 0, \\ \sigma &= \sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}, \quad e = \sqrt{\mathcal{E}_1^2 + \mathcal{E}_2^2 + \mathcal{E}_3^2},\end{aligned}\tag{13}$$

где

$$e_0 = \frac{1}{3}(e_{11} + e_{22} + e_{33}), \quad \sigma_0 = \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}).$$

При обработке экспериментальных данных принималось условие несжимаемости  $e_{11} + e_{22} + e_{33} = 0$  и считалось, что  $\sigma_{33} = 0$  [12, 13, 15–18].

В [18–21] исследовались плоские траектории нагружения с постоянной и переменной кривизной. Эксперименты проводились в режиме управляемой деформации («жесткое нагружение»).

При проведении численного моделирования указанных процессов с применением разработанных конститутивных соотношений [4, 5] в качестве входных данных использовались экспериментально зарегистрированные временные зависимости компонент тензора деформаций  $e_{ij}(t)$ . Расчет эволюции компонент тензора напряжений выполнялся путем численного интегрирования системы определяющих уравнений

при заданной истории деформирования. Полученные в результате моделирования данные прошли процедуру верификации путем прямого сравнения с результатами натурных экспериментов.

В исследованиях [18–21] рассматривалась серия экспериментов по сложному нагружению латуни Л63 по двухзвенным ломаным траекториям с различными углами излома. Нагружение задавалось в плоскости  $(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_3)$ , а картина напряжений определялась в пространстве напряжений.

Испытания содержат результаты четырех экспериментов с точкой излома при  $\mathcal{E}_1^* = 2\%$ . На рис. 1 представлены двухзвенные траектории деформирования с углами излома 1 –  $0^\circ$ , 2 –  $45^\circ$ , 3 –  $90^\circ$  и 4 –  $135^\circ$ . После излома траектории при угле  $45^\circ$  образец подвергался одновременному действию кручения и растяжения; при угле  $90^\circ$  – только кручению; при угле  $135^\circ$  – одновременному кручению и сжатию.

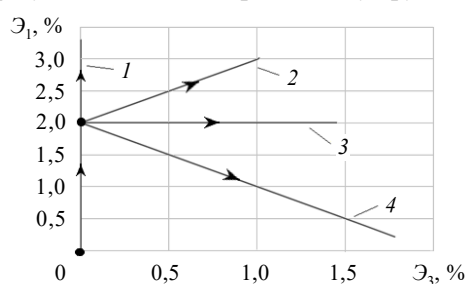


Рис. 1

В связи с отсутствием полного объема экспериментальных данных, необходимых для идентификации полной модели, исследовался ее частный случай – модель термопластичности с нелинейным кинематическим упрочнением, не учитывающая эффекты циклического упрочнения. Данные по латуни Л63 приведены в таблице 1.

Таблица 1

Модуль упругости и материальные параметры латуни Л63

Физико-механические характеристики латуни Л63	$T = 20^\circ\text{C}$
$K$ , МПа	121800
$G$ , МПа	34700
$C_p^0$ , МПа	150
$g_1^p$ , МПа	21000
$g_2^p$	400

На рис. 2 представлено сравнение расчетной и экспериментальной диаграмм  $\sigma_u - e_u$ , характеризующих скалярные свойства материала. Здесь и во всех последующих иллюстрациях экспериментальные данные обозначены пунктирной линией, а результаты расчетов – сплошной линией. Анализ показывает, что в момент изменения направления деформирования на диаграммах наблюдаются характерные зоны резкого изменения напряжений («нырки»), величина которых зависит от угла излома траектории.

На рис. 3 приведены локальные диаграммы деформирования  $\sigma_{11} - e_{11}$  (а) и  $\sigma_{12} - e_{12}$  (б). Сравнение демонстрирует соответствие. Совпадение достигается в рамках инженерных расчетов, что свидетельствует об адекватности используемой частной формы теории течения и корректности определения материальных параметров



конститутивных соотношений упругопластичности для описания сложного пластического деформирования латуни Л63.

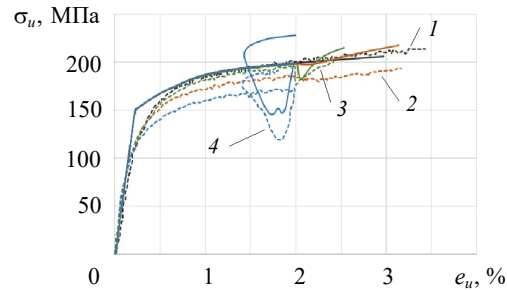


Рис. 2

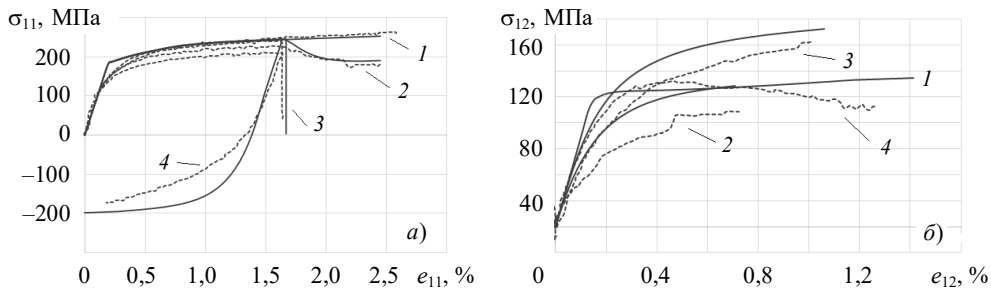


Рис. 3

Во втором примере рассматриваются плоские гладкие траектории деформирования различной кривизны. Эксперименты, результаты которых показаны на рис. 4, выполнялись в пространстве деформаций А.А. Ильюшина ( $\mathfrak{E}_1 - \mathfrak{E}_3$ ) [15] при одновременном действии осевой силы и крутящего момента: начинающийся из начала координат путь окружностей различного радиуса и различной кривизны.

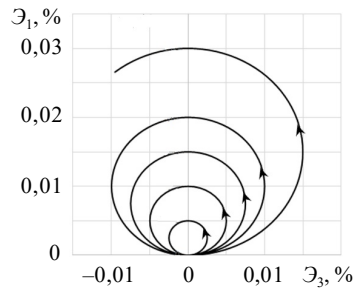


Рис. 4

На рис. 5, 6 приведены локальные траектории деформирования. Анализ показывает качественное соответствие.

В третьем примере рассматривается программа нагружения, представленная на рис. 7. Программа состоит из этапов:

- четыре полуокружности равного радиуса в девиаторном пространстве А.А. Ильюшина, первая из которых начинается в начале координат;
- после достижения первой полуокружностью определенного значения ( $\mathfrak{E}_1 = 0,5\%$ ) кривизна изменяется по заданному закону для формирования второй полуокружности;
- по представленному описанию строятся третья и четвертая полуокружности;

- завершение четвертой полуокружности не меняет закон изменения кривизны, но меняет знак кривизны для формирования полной окружности;
- завершающий этап включает в себя сжатие образца с одновременным знакопеременным кручением.

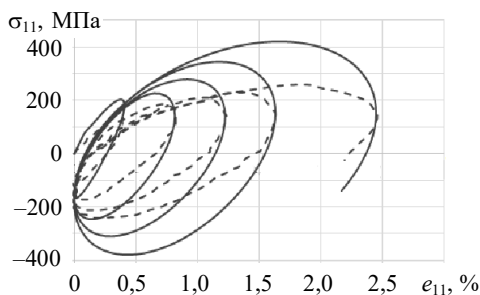


Рис. 5

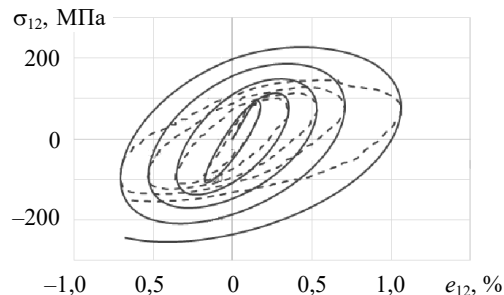


Рис. 6

На рис. 8 представлена соответствующая траектория в пространстве напряжений (отклик).

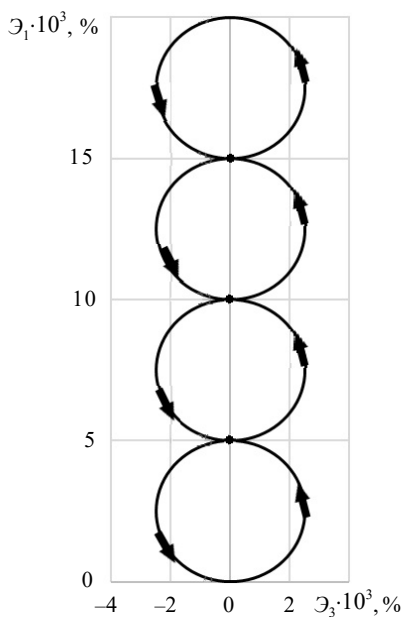


Рис. 7

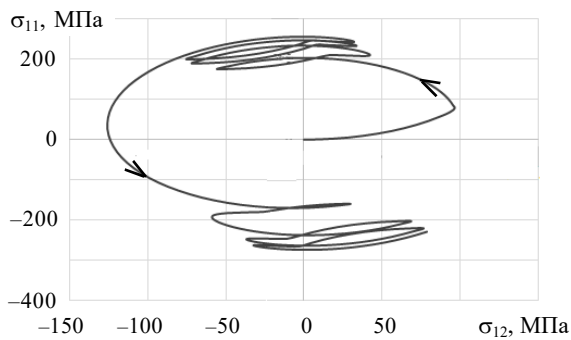


Рис. 8

На рис. 9 показано сравнение экспериментальных и расчетных данных для глобальной диаграммы деформирования  $\sigma_u - e_u$ , отражающей эволюцию процесса деформирования, который характеризует скалярные свойства материала. Можно наблюдать, что при переходе между участками нагружения (в момент изменения знака кривизны окружности) на диаграмме деформирования возникает характерная зона резкого изменения напряжений («нырок»), аналогичная наблюдаемой на двухзвенных ломаных траекториях в точках излома.

На рис. 10 представлены локальные диаграммы деформирования  $\sigma_{11} - e_{11}$  (а) и  $\sigma_{12} - e_{12}$  (б). Анализ показывает качественное соответствие между экспериментальными данными и результатами моделирования, причем точность количественного совпадения является приемлемой для инженерных расчетов. Обнаруженные незна-

чительные расхождения между расчетными и экспериментальными значениями могут быть объяснены, вероятно, двумя факторами: некоторой погрешностью в определении материальных параметров модели, а также принятым при обработке экспериментальных данных допущением о несжимаемости материала.

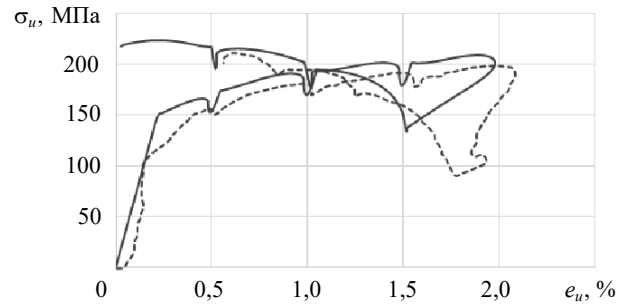


Рис. 9

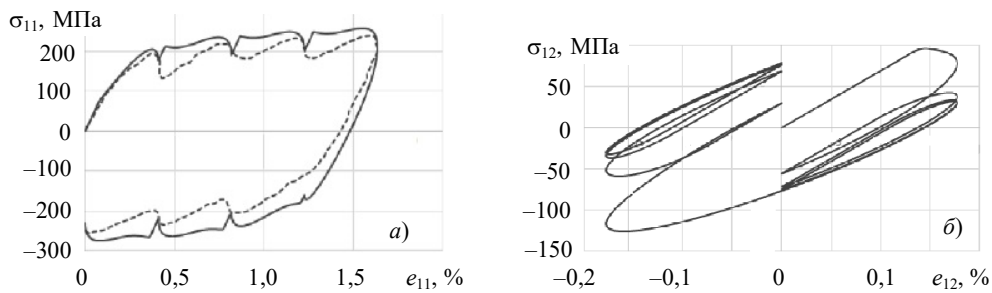


Рис. 10

В следующем эксперименте на начальном участке было реализовано простое деформирование кручением до достижения определенного значения ( $\mathcal{E}_3^* = 1\%$ ). Из этой точки начинался процесс сложного пластического деформирования по криволинейной траектории постоянной кривизны (круговой траектории) в пространстве А.А. Ильюшина [15]. Точка излома на переходе отсутствовала. На второй круговой траектории выполнялся излом под углом  $45^\circ$ , а далее – движение по окружности того же радиуса. Рассмотрено 5 окружностей с одинаковыми параметрами: углом излома, радиусом и кривизной (рис. 11).

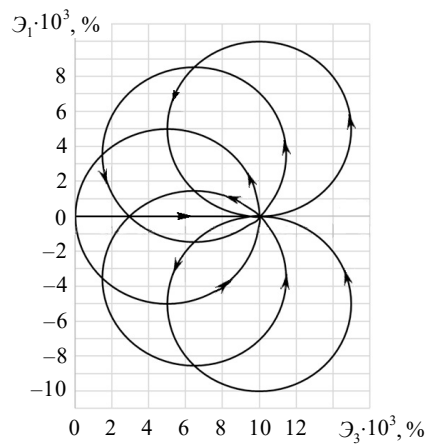


Рис. 11

Локальная диаграмма деформирования  $\sigma_{11}-e_{11}$  показана на рис. 12, а глобальная диаграмма  $\sigma_u-e_u$  приведена на рис. 13.

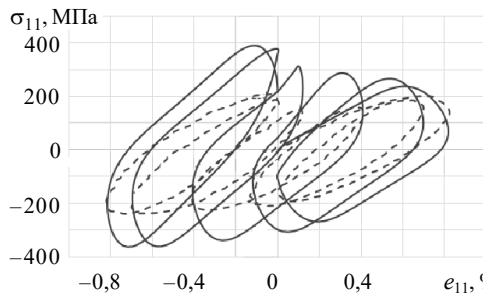


Рис. 12

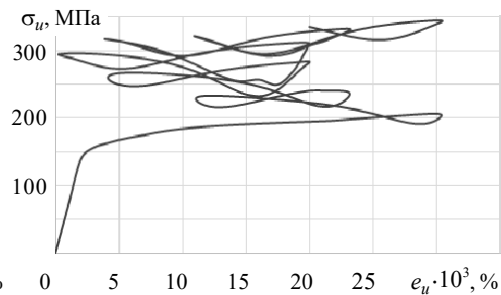


Рис. 13

Наблюдается соответствие между экспериментальными и расчетными данными. Некоторые расхождения могут быть объяснены тем, что использовался не полный вариант модели термопластичности, а ее частный случай – модель теории течения с нелинейным кинематическим упрочнением, что связано с ограниченным объемом экспериментальных данных, доступных для идентификации параметров полной модели.

### Заключение

Проведена проверка адекватности конститутивных соотношений теории пластического течения, учитывающей изотропное и кинематическое упрочнение, путем сравнения результатов численного моделирования с экспериментальными данными по деформированию латуни Л63 по плоским траекториям с различной кривизной. Подтверждена корректность модели как пропорционального, так и непропорционального пластического деформирования конструкционных сплавов при нагружении по произвольным плоским траекториям.

Анализ модели [16, 22, 23] позволяет рекомендовать ее к расчетам конструктивных узлов материальных объектов, работающих в условиях нестационарного термомеханического нагружения.

### Список литературы

1. Митенков Ф.М., Кайдалов В.Б., Коротких Ю.Г. и др. *Методы обоснования ресурса ядерных энергетических установок*. М.: Машиностроение, 2007. 448 с.
2. Волков И.А., Коротких Ю.Г. *Уравнения состояния вязкоупругопластических сред с повреждениями*. М.: Физматлит, 2008. 422 с.
3. Коллинз Дж. *Повреждение материалов в конструкциях. Анализ. Предсказание. Предотвращение*. М.: Мир, 1984. 624 с.
4. Митенков Ф.М., Волков И.А., Игумнов Л.А. и др. *Прикладная теория пластичности*. М.: Физматлит, 2015. 284 с.
5. Волков И.А., Игумнов Л.А., Коротких Ю.Г. *Прикладная теория вязкопластичности*. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2015. 317 с.
6. Зубчанинов В.Г. *Механика процессов пластических сред*. М.: Физматлит, 2010. 352 с.
7. Дегтярев В.П. *Пластичность и ползучесть машиностроительных конструкций*. М.: Машиностроение, 1967. 130 с.
8. Жуков А.М. Некоторые особенности поведения материалов при упругопластическом деформировании. В сб.: *Вопросы теории пластичности*. М.: АН СССР, 1961. С. 30–57.

9. Лэмба Г.С., Сайдботтом О.М. Пластичность при циклическом нагружении по непропорциональным траекториям. *Теоретические основы инженерных расчетов*. 1978. Т. 100. №1. С. 108–117.
10. Макдауэлл Д.Л. Экспериментальное изучение структуры определяющих уравнений для непропорциональной циклической пластичности. *Теоретические основы инженерных расчетов*. 1985. Т. 107. №4. С. 98–111.
11. Охаси И., Каваи М., Каито Т. Неупругое поведение стали 316 при многоосных не-пропорциональных циклических нагружениях при повышенной температуре. *Теоретические основы инженерных расчетов*. 1985. Т. 107. №2. С. 6–15.
12. Зубчанинов В.Г., Охлопков Н.Л., Гаранников В.В. *Экспериментальная пластичность. Кн. 1. Процессы сложного деформирования*. Тверь: ТГТУ, 2003. 172 с.
13. Зубчанинов В.Г., Охлопков Н.Л., Гаранников В.В. *Экспериментальная пластичность. Кн. 2. Процессы сложного нагружения*. Тверь: ТГТУ, 2004. 184 с.
14. Охаси И., Танака Е., Оока М. Пластическое деформирование нержавеющей стали типа 316 под действием несинфазных циклов по деформации. *Теоретические основы инженерных расчетов*. 1985. Т. 107. №4. С. 61–73.
15. Ильюшин А.А. Об основах общей математической теории пластичности. В сб.: *Вопросы теории пластичности*. М.: Изд-во АН СССР, 1961. С. 3–29.
16. Chaboche J.L. Constitutive equation for cyclic plasticity and cyclic viscoplasticity. *International Journal of Plasticity*. 1989. Vol. 5. No 3. P. 247–302.
17. Бантхья В., Мукерджи С. Об усовершенствованной схеме интегрирования по времени для системы определяющих соотношений неупругой деформации с нелинейностью жесткого типа. *Теоретические основы инженерных расчетов*. 1985. №4. С. 54–60.
18. Зубчанинов В.Г., Гулятьев В.И., Двужиллов А.С. Исследование латуни Л63 по гладкой криволинейной траектории типа «веер смещенных окружностей». *Вестник Чувашского педагогического государственного университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния*. 2023. № 1(55). С. 26–32.
19. Зубчанинов В.Г., Гулятьев В.И., Алексеев А.А., Двужиллов А.С. Экспериментальные исследования сложного нагружения латуни Л63 на двузвенных ломаных траекториях типа «смещенный веер». *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния*. 2023. №1(55). С. 18–25.
20. Зубчанинов В.Г., Гулятьев В.И., Алексеев А.А., Двужиллов А.С. Экспериментальное исследование латуни Л63 при сложном нагружении по двузвенным ломаным. *Авиационные двигатели*. 2023. №1(18). С. 99–103. DOI: 10.54349/26586061\_2023\_1\_99.
21. Двужиллов А.С. Закономерности упругопластического деформирования латуни Л63 при сложном нагружении по ломанным и гладким траекториям постоянной кривизны. *Дисс. ... канд. техн. наук*. ТвГТУ, Тверь. 2024. 189 с.
22. Бондарь В.С. *Неупругость. Варианты теории*. М.: Физматлит, 2004. 144 с.
23. Волков И.А., Коротких Ю.Г., Фомин М.Н. Численное моделирование сложного пластического деформирования металлов по плоским и пространственным траекториям произвольной кривизны и кручения. *Вычислительная механика сплошных сред*. 2009. Т. 2. №3. С. 17–25.

#### References

1. Mitenkov F.M., Kaydalov V.B., Korotkikh Yu.G. et al. *Metody obosnovaniya resursa yadernykh energeticheskikh ustanovok [Methods of Substantiating the Resource of Nuclear Power Plants]*. Moscow. Mashinostroenie Publ. 2007. 448 p. (In Russian).
2. Volkov I.A., Korotkikh Yu.G. *Uravneniya sostoyaniya vyazkoupругoplasticheskikh sred s povrezhdeniyami [Equations of State of Viscoelastic Plastic Media with Damage]*. Moscow. Fizmatlit Publ. 2008. 422 p.
3. Collins J.A. *Failure of Materials Design. Analysis. Prediction. Prevention*. New York. Toronto. Singapoge. 1981. 622 p.
4. Mitenkov F.M., Volkov I.A., Igumnov L.A. et al. *Prikladnaya teoriya plastichnosti [Applied Theory of Plasticity]*. Moscow. Fizmatlit Publ. 2015. 284 p. (In Russian).

5. Volkov I.A., Igumnov L.A., Korotkikh Yu.G. *Prikladnaya teoriya vyazkoplastichnosti* [Applied Theory of Viscoplasticity]. N. Novgorod. NNGU Publ. 2015. 317 p. (In Russian)
6. Zubchaninov V.G. *Mekhanika protsessov plasticheskikh sred* [Mechanics of Plastic Media Processes]. Moscow. Fizmatlit Publ. 2010. 352 p. (In Russian).
7. Degtyarev V.P. *Plastichnost i polzuchest mashinostroitelnykh konstruktsey* [Plasticity and Creep of Machine-Building Structures]. Moscow. Mashinostroenie Publ. 1967. 130 p. (In Russian).
8. Zhukov A.M. Nekotorye osobennosti povedeniya materialov pri uprugoplasticheskom deformirovani [Some features of the behavior of materials during elastoplastic deformation.]. In: *Voprosy teorii plastichnosti* [Questions of the Theory of Plasticity]. Moscow.: AN SSSR Publ. 1961. P. 30–57 (In Russian).
9. Lemba G.S., Saydbottom O.M. Plastichnost pri tsiklicheskom nagruzhenii po neproportionalnym traektoriyam [Plasticity under cyclic loading along disproportionate trajectories]. *Teoreticheskie osnovy inzhenernykh raschetov* [Theoretical Foundations of Engineering Calculations]. 1978. Vol. 100. No 1. P. 108–117 (In Russian).
10. Makdauell D.L. Eksperimentalnoe izuchenie struktury opredelyayushchikh uravneniy dlya neproportionalnoy tsiklichesko plastichnosti [Experimental study of the structure of defining equations for disproportionate cyclic plasticity]. *Teoreticheskie osnovy inzhenernykh raschetov* [Theoretical Foundations of Engineering Calculations]. 1985. Vol. 107. No 4. P. 98–111 (In Russian).
11. Ohashi I., Kawai M., Kaito T. Neuprugoe povedenie stali 316 pri mnogoosnykh neproportionalnykh tsiklicheskiy nagruzheniyakh pri povyshennoy temperature [Inelastic behavior of 316 steel under multiaxial disproportionate cyclic loads at elevated temperatures]. *Teoreticheskie osnovy inzhenernykh raschetov* [Theoretical Foundations of Engineering Calculations]. 1985. Vol. 107. No 2. P. 6–15 (In Russian).
12. Zubchaninov V.G., Okhlopov N.L., Garannikov V.V. *Eksperimentalnaya plastichnost. Kn. 1. Protessy slozhnogo deformirovaniya* [Experimental Plasticity. Book 1. Processes of Complex Deformation]. Tver. TGTU Publ. 2003. 172 p. (In Russian).
13. Zubchaninov V.G., Okhlopov N.L., Garannikov V.V. *Eksperimentalnaya plastichnost. Kn. 2. Protessy slozhnogo nagruzheniya* [Experimental Plasticity. Book 2. Processes of Complex Loading]. Tver. TGTU Publ. 2004. 184 p. (In Russian).
14. Ohashi I., Tanaka E., Ooka M. Plasticheskoe deformirovanie nerzhavayushchey stali tipa 316 pod deystviem nesinfaznykh tsiklov po deformatsii [Plastic deformation of 316 stainless steel under the action of non-phase deformation cycles]. *Teoreticheskie osnovy inzhenernykh raschetov* [Theoretical Foundations of Engineering Calculations]. 1985. Vol. 107. No 4. P. 61–73 (In Russian).
15. Ilyushin A.A. Ob osnovakh obshchey matematicheskoy teorii plastichnosti [On the fundamentals of the general mathematical theory of plasticity]. V sb.: *Voprosy teorii plastichnosti* [In: Questions of the Theory of Plasticity]. Moscow. AN SSSR Publ. 1961. P. 3–29 (In Russian).
16. Chaboche J.L. Constitutive equation for cyclic plasticity and cyclic viscoplasticity. *Int. J. Plast.* 1989. Vol. 5. No 3. P. 247–302.
17. Bantkhya B., Mukherjee C. Ob usovershenstvovannoy skheme integrirvaniya po vremeni dlya sistemy opredelyayushchikh sootnosheniy neuprugoy deformatsii s nelineynostyu zhestkogo tipa [On an improved time integration scheme for a system of defining relations of inelastic deformation with rigid type nonlinearity]. *Teoreticheskie osnovy inzhenernykh raschetov* [Theoretical Foundations of Engineering Calculations]. 1985. No 4. P. 54–60 (In Russian).
18. Zubchaninov V.G., Gulyaev V.I., Dvuzhilov A.S. Issledovanie latuni L63 po gladkoy krivolinyennoy traektorii tipa “veer smeshchennykh okruzhnostey” [Investigation of brass L63 along a smooth curved trajectory of the “fan of displaced circles” type]. *Vestnik Chuvashskogo pedagogicheskogo gosudarstvennogo universiteta im. I.Ya. Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya* [Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State]. 2023. No 1(55). P. 26–32 (In Russian).
19. Zubchaninov V.G., Gulyaev V.I., Alekseev A.A., Dvuzhilov A.S. Eksperimentalnye issledovaniya slozhnogo nagruzheniya latuni L63 na dvuzvennykh lomanykh traektoriyakh

tipa “smeshchennyy veer” [Experimental studies of complex loading of brass L63 on two-link broken trajectories of the “displaced fan” type]. *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I.Ya. Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya* [Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State]. 2023. No 1(55). P. 18–25 (In Russian).

20. Zubchaninov V.G., Gulyaev V.I., Alekseev A.A., Dvuzhilov A.S. Eksperimentalnoe issledovanie latuni L63 pri slozhnom nagruzhenii po dvuzvennym lomanyim [Experimental study of L63 brass under complex loading by two-link polylines]. *Aviatsionnye dvigateli* [Aviation Engines]. 2023. No 1(18). P. 99–103 (In Russian).

21. Dvuzhilov A.S. Zakonomernosti uprugoplasticheskogo deformirovaniya latuni L63 pri slozhnom nagruzhenii po lomannym i gladkim traektoriyam postoyannoy krivizny [Patterns of elastoplastic deformation of brass L63 under complex loading along broken and smooth trajectories of constant curvature]. *Diss. kand. tekhn. nauk* [Cand. Sci. (Engineering) Dissertation]. Tver. 2024. 189 p. (In Russian).

22. Bondar V.S. *Neuprugost. Varianty teorii* [Inelasticity. Variants of the Theory]. Moscow. Fizmatlit Publ. 2004. 144 p. (In Russian).

23. Volkov I.A., Korotkih Yu.G., Fomin M.N. Chislennoe modelirovanie slozhnogo plasticheskogo deformirovaniya metallov po ploskim i prostranstvennym traektoriyam proizvolnoy krivizny i krucheniya [Numerical modeling of complex plastic deformation of metals along plane and spatial trajectories of arbitrary curvature and torsion]. *Vychislitel'naya mekhanika sploshnykh sred* [Computational Continuum Mechanics]. 2009. Vol. 2. No 3. P. 17–25 (In Russian).

## NUMERICAL ANALYSIS OF COMPLEX PLASTIC DEFORMATION PRACTICES OF L63 BRASS ALONG PLANE DISPROPORTIONAL DEFORMATION TRAJECTORIES\*

**Igumnov L.A., Volkov I.A., Kostyukov V.E., Prilutsky M.Kh., Panov V.A.**

*National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod,  
Nizhny Novgorod, Russian Federation*

ivan.volkov@mech.unn.ru

*Received by the Editor 2025/09/08*

This paper examines complex plastic deformation processes in L63 brass along plane trajectories of disproportionate deformation. The version of Yu.G. Korotkih's elastic-plasticity equations used in this paper is based on the concept of a yield surface and the principle of the gradient of the plastic strain rate vector to the yield surface at the loading point. This version of the equations of state reflects the fundamental effects of elastic-plastic deformation of the material for arbitrary complex deformation trajectories.

By setting the corresponding material parameters from the general version of the equations to zero, as a special case, all of its fundamental forms of plastic equations for small deformations are obtained (a system of “nested” models).

Particular attention is given to modeling elastic-plastic deformation processes for disproportionate loading trajectories accompanied by rotation of the principal areas of the stress tensors, total and plastic strains.

---

\* The research was carried out with the financial support of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (Project No FSWR-2023-0036).

To assess the reliability and determine the applicability limits of the constitutive plasticity relations, numerical studies were conducted on the complex plastic deformation of L63 brass along planar trajectories of disproportionate deformation:

- planar two-link trajectories with varying fracture angles;
- planar smooth deformation trajectories of varying curvature;
- four semicircles of equal radius with a change in curvature as one circle passes into another;
- smooth two-link deformation trajectories: the first section was characterized by proportional torsional deformation, while the second section was characterized by complex deformation along curved trajectories of constant radius with varying fracture angles.

The results of the study demonstrate that Yu.G. Korotkikh's model accurately predicts the main effects of complex plastic deformation of L63 brass. The model provides a qualitative description of material behavior for flat loading trajectories of any curvature, and its accuracy is sufficient for practical calculations.

A number of characteristic features accompanying the complex elastoplastic deformation of L63 brass are noted (the presence of a “dip” in the stress-strain diagram in flat “fan” experiments, the presence of a similar “dip” when transitioning from a rectilinear to a curved section of deformation, and on curved trajectories of constant curvature where the sign changes-vector properties have a wave-like character, etc.).

*Keywords:* plasticity, complex loading, modeling, numerical experiment, full-scale experiment, flat deformation trajectories.