УДК 539.3

РАЗВИТИЕ МЕТОДА ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ТРЕХМЕРНЫХ КОНТАКТНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ*)

А.А. Белов, Л.А. Игумнов, С.Ю. Литвинчук

Нижний Новгород

В статье представлены два подхода метода граничных элементов (МГЭ) к решению трехмерных динамических задач теории упругости. Описан и продемонстрирован МГЭ-подход с использованием интегрального преобразования Лапласа и метода Дурбина, который позволяет строить искомую функцию с помощью известного изображения. Применен метод Дурбина с неравномерной кусочно-квадратичной аппроксимацией изображения. Кроме того, представлен МГЭ-подход с явным учетом переменной времени. Использована гранично-элементная техника построения дискретного аналога в сочетании с методом квадратур для сверток. Предложена оригинальная схема метода квадратур для сверток. Приведены результаты МГЭ-расчетов. Продемонстрирована высокая точность разработанных МГЭ-схем.

Введение

Подобно статическим или стационарным динамическим задачам, нестационарные задачи могут быть решены методом граничных интегральных уравнений (ГИУ). Применение МГЭ-схем для получения численного решения контактных задач вызвано стремлением избежать трудностей построения сеточных контактных алгоритмов. Детальный обзор по упругодинамичным аспектам граничных элементов можно найти в [1–5].

Существующие методологии решения задач упругодинамики с использованием МГЭ укладываются, главным образом, в два возможных подхода: прямой подход во временной области и подход с использованием обратного преобразования в области Лапласа. В большинстве случаев используется последний метод [6]. Все численные формулы обращения зависят от надлежащего выбора их параметров [7, 8]. Все пошаговые процедуры требуют адекватного выбора шага по времени. Неверно выбранный шаг по времени приводит к неустойчивости или численному демпфированию. Методы улучшения устойчивости классической динамической пошаговой формулировки граничных элементов можно найти в статьях H. Antes и M. Jager [9], G. Yu [10, 11], M. Schanz [12], A. Peirce и E. Siebrits [13, 14], D.C. Rizos и D.L. Karabalis [15], H.B. Coda и W.S. Venturini [16, 17], G. Yu [18, 19].

---

*) Работа выполнена при частичном финансировании РФФИ (гранты 05-01-00837а, 07-08-13637 офи-ц) и Министерством образования и науки РФ (грант Президента РФ на поддержку ведущих научных школ НШ-6391.2006.8).

Представлены два подхода: использование МГЭ совместно с преобразованием Лапласа и методом Дурбина при неравномерной кусочно-квадратичной аппроксимации спектральной функции и использование МГЭ в явном времени в рамках метода квадратур для сверток. Рассматриваемая гранично-временная формулировка является вариацией подхода, использующего метод C. Lubich [20].

1. Волновые потенциалы теории упругости

Пусть S – замкнутая поверхность класса $\tilde{N}^{1,\alpha}$ $(\alpha>0)$, разделяющая n-мерное пространство R^n на области Ω^+ (внутреннюю) и Ω^- (внешнюю). Смещение точки $x=(x_1,\ldots,x_n)$ упругой среды, занимающей области Ω^+ или Ω^-, в момент времени $t=x_{n+1}$ определяется вектор-функцией $u=u(x,t)=u(x')$, где $x'=(x,t)$, с компонентами $u=u(x,t)=u(x')$ (i = 1, ..., n). Кроме того, вводятся обозначения: $G^{\pm}=\Omega^{\pm}\times R^{+}$, $\Sigma=S\times R$, $\Sigma^{+}=S\times R^{+}$, $R^{+}=(0,\infty)$.

Границу S считаем многообразием класса C^{∞}, локально выпрямленным при помощи невырожденных C^{∞}-преобразований координат. Соответствующие интегральные представления для вектора перемещений были построены впервые в работах де Хупа [21], В. Новацкого [22] и др. при условии, что известна матрица $U(x, y, z)$ фундаментальных решений. Запаздывающие потенциалы вводятся на основе фундаментального решения, представляющего собой $n\times n$-матрицу (тензор), столбцы которой U_j (j = 1, ..., n) удовлетворяют уравнениям:

$$(\partial_t^2+L^0(\partial))U_j(x')=\delta(x')\cdot e_j,$$

где δ – функция Дирака, L^0 – соответствующий статический оператор, e_j – орт j-й оси координат, и условию причинности: $U(x, t) = 0$ при $t < 0$.

Запаздывающие потенциалы простого и двойного слоев с n-компонентными плотностями $\alpha(x'), \beta(x')$ $(x'\in\Sigma^{+})$ определяются соответственно формулами:

$$(V\alpha)(x')=\int\limits_{\Sigma^+}(U_j(x-y,t-\tau),\alpha(y,\tau))e_j\,ds_y d\tau, \qquad (1)$$

$$(W\beta)(x')=\int\limits_{\Sigma^+}((T_{\nu(y)}U_j)(x-y,t-\tau),\beta(y,\tau))e_j\,ds_y d\tau, \qquad (2)$$

где T_ν – оператор сингулярного решения, ν – единичная нормаль. В формулах (1), (2) выражение $(\cdot\,,\,\cdot)$ – вещественное скалярное произведение в n-мерном пространстве. Пусть плотности потенциалов равны нулю при $t < 0$. Оба потенциала удовлетворяют в $G^{\pm}$ исходному уравнению и нулевым начальным условиям. При гладких плотностях справедливы формулы скачков потенциалов при переходе точки x' через Σ^+ [23]. Обозначив через $W^{\pm}\beta, W^0\beta$ соответственно предельные значения потенциала $W\beta$ из $G^{\pm}$ и его прямое значение на Σ^+, получим:

$$W^{\pm}\beta=\mp\frac{1}{2}\beta+W^0\beta.$$

Потенциал простого слоя непрерывен, скачок терпит вектор его нормальных усилий. Обозначая

$$(K^{\pm}\alpha)(x')=(T_{\nu(x)}V\alpha)^{\pm}(x')$$

при $x'\in\Sigma^{+}$, найдем:

$$K^{\pm}\alpha = \pm\frac{1}{2}\alpha + K^0\alpha,$$

где $K^0\alpha$ – прямое значение соответствующего интеграла.

Предельные значения вектора нормальных усилий потенциала двойного слоя $(F^{\pm}\beta)(x') = (T_{\nu(x)}W\beta)^{\pm}(x')$ совпадают и в дальнейшем обозначаются через $F\beta = F^{\pm}\beta$. Свойства граничных операторов позволяют установить справедливость формул скачков:

$$\begin{gathered} W^{+}\beta - W^{-}\beta = -\beta, \quad V^{+}\alpha - V^{-}\alpha = 0, \\ F^{+}\beta - F^{-}\beta = 0, \quad K^{+}\alpha - K^{-}\alpha = \alpha \end{gathered} \tag{3}$$

для плотностей из более широких классов, когда под левыми частями в (3) понимаются следы на Σ^{+} вектор-функций из соответствующих пространств Соболева.

Преобразования Лапласа потенциалов простого и двойного слоев принимают вид $(V_p\alpha)(x, p)$ и $(W_p\beta)(x, p)$, где V_p и W_p при каждом p построены с помощью фундаментального решения $U(x,p)$, столбцы которого $U_j(x,p)$ $(j = 1,\ldots,n)$ удовлетворяют уравнениям

$$(p^2 + L^0(\partial))U_j(x,p) = \delta(x)\cdot e_j,$$

аналитичны и растут по аргументу p в правой полуплоскости не быстрее полинома:

$$\begin{gathered} (V_p\alpha)(x,p) = \int_S (U_j(x-y,p), \alpha(y,p))e_j ds_y, \\ (W_p\beta)(x,p) = \int_S ((T_{\nu(y)}U_j)(x-y,p), \beta(y,p))e_j ds_y. \end{gathered} \tag{4}$$

Операторы $N_p^{\pm}$ определим формулами:

$$\pm(N_p^{\pm}v, w)_{0,S} = p^2(u,z)_{0,\Omega^{\pm}} + (C_{ijk\ell}\varepsilon_{k\ell}(u), \varepsilon_{ij}(z))_{0,\Omega^{\pm}}, \tag{5}$$

сохранив для скалярного произведения функций в пространстве $L_2(\Omega^{\pm})$ то же обозначение, что и для n-компонентных вектор-функций. Операторы $N_p^{\pm}$ определены равенствами (5) корректно, то есть правые части в (5) не зависят от выбора продолжения z.

При всех p для потенциалов V_p, W_p справедливы формулы скачков:

$$W_p^{+}\beta - W_p^{-}\beta = -\beta, \quad V_p^{+}\alpha - V_p^{-}\alpha = 0,$$

$$F_p^{+}\beta - F_p^{-}\beta = 0, \quad K_p^{+}\alpha - K_p^{-}\alpha = \alpha,$$

$$N_p^{+}V_p\alpha - N_p^{-}V_p\alpha = \alpha,$$

где $(K_p^{\pm}\alpha)(x,p) = (T_{\nu(x)}V_p\alpha)^{\pm}(x,p)$, $(F_p^{\pm}\beta)(x,p) = (T_{\nu(x)}W_p\beta)^{\pm}(x,p) = (F_p\beta)(x,p)$, индексы "±" после перехода к преобразованиям Лапласа означают предельные значения соответствующих величин при $x \to S$ из $\Omega^{\pm}$.

Рассмотрим теперь прямой вариант метода граничных уравнений [24]. В предлагаемой схеме основой для получения разрешающих уравнений прямого подхода служат равенства

$$VN^{\pm} - W^{\pm} = \pm I. \tag{6}$$

В задачах I$^{\pm}$, считая неизвестной величину $\alpha = N^{\pm} f^{\pm}$, получаем уравнения

$$\mathrm{I}_A^{\pm}. \quad V\alpha = W^{\mp} f^{\pm}. \tag{7}$$

Применив в (7) операторы $N^{\mp}$, получим уравнения

$$\mathrm{I}_B^{\pm}. \quad K^{\mp}\alpha = Ff^{\pm}.$$

В задачах II$^{\pm}$ искомым является β – смещение упругой среды на Σ^{+}. Формула (6) принимает вид: $Vg^{\pm} - W^{\pm}\beta = \pm\beta$,

$$\mathrm{II}_A^{\pm}. \quad W^{\mp}\beta = Vg^{\pm}. \tag{8}$$

Применив к (8) операторы $N^{\mp}$, получим уравнения:

$$\mathrm{II}_B^{\pm}. \quad F\beta = K^{\mp} g^{\pm}.$$

Полученные результаты справедливы для кусочно-гладких поверхностей класса $\tilde{N}^{0,1}$, являющихся объединением незамкнутых поверхностей класса $C^{1,\alpha}$ ($\alpha > 0$).

Предположим, что поверхность S разделена замкнутым контуром $\Gamma \subset S$ на две связные компоненты S_i ($i = 1, 2$) ненулевой площади, так что $\Gamma = \partial S_i$ $(i = 1, 2)$. В $G^{\pm}$ рассмотрим уравнения трехмерной анизотропной нестационарной теории упругости с нулевыми начальными данными. На части граничной поверхности $\Sigma_1^{+} = S_1 \times R^{+}$ задаются смещения $u^{\pm} = f^{\pm}$, на $\Sigma_2^{+} = S_2 \times R^{+}$ – нормальные граничные усилия упругой среды $T_{\upsilon}^{\pm} u = g^{\pm}$. Решение этой задачи, которую мы обозначим через III$^{\pm}$, будем искать в виде:

$$u(x') = (W\beta)(x') + (V\alpha)(x'), \tag{9}$$

где плотности β и α сосредоточены на Σ_1^{+} и Σ_2^{+} соответственно.

Формальная подстановка (9) в граничные условия приводит к парным граничным уравнениям

$$\begin{cases} \pi_1(W^{\pm}\beta + V\alpha) = f^{\pm}, \\ \pi_2(F\beta + K^{\pm}\alpha) = g^{\pm}, \end{cases} \tag{10}$$

где через π_i обозначены операции сужения элементов, заданных на S, на соответствующую часть S_i ($i = 1, 2$). Рассмотрим вопрос о разрешимости уравнений (10).

2. Гранично-элементная дискретизация

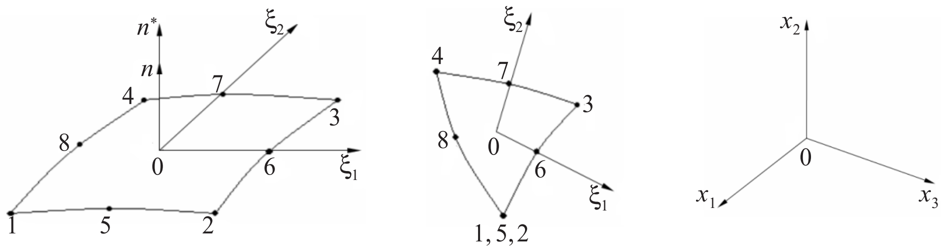
Чтобы ввести ГЭ-дискретизацию, рассмотрим регуляризованное уравнение без объемных сил и начальных деформаций, то есть:

$$\alpha_{\Omega} u_k(x) + \int_{\partial\Omega} \{T_{ik}(x, y, p)[u_i(y) - u_i(x)] - U_{ik}(x, y, p) t_i(y)\} dS_x = 0 \quad (x \in \partial\Omega), \tag{11}$$

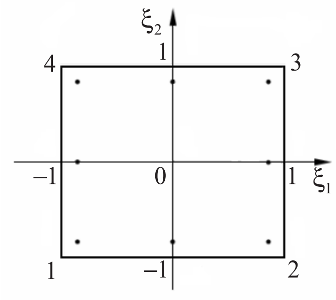
где $x \in \partial\Omega$ называется точкой наблюдения или коллокационной точкой. Базовый процесс ГЭ-дискретизации состоит в разбиении поверхности $\partial\Omega$ на N_E граничных элементов E_e $(1 \le e \le N_E)$ совокупностью четырехугольных и треугольных восьмиузловых биквадратичных элементов. При этом треугольные элементы рассматриваются как вырожденные четырехугольные элементы (рис. 1,*а*), каждый из которых отображается на некий контрольный элемент Δ_e (каждый Δ_e – это либо квадрат $\xi = =(\xi_1,\xi_2)\in[-1,1]^2$, либо треугольник $0\le\xi_1+\xi_2\le 1, \xi_1\ge 0, \xi_2\ge 0$, рис.1,*б*). Элемент E_e отображается на элемент Δ_e с помощью уравнения:

$$y_i(\xi)=\sum_{l=1}^{8} N^l(\xi)\, y_i^{\beta(k,l)}, \quad i=1,2,3, \quad \xi\in\Delta_e, \tag{12}$$

где $\beta(k,l)$ – глобальный номер узла, имеющего в k-м элементе локальный номер l, $N^l(\xi)$ – функции формы. В качестве функций формы выбраны квадратичные полиномы интерполяции.



а)



б)

Рис. 1

Естественный базис (a_1, a_2), метрический тензор g и единичная нормаль n на E_e запишутся как

$$a_\alpha(\xi)=\sum_{q=1}^{N} N_\alpha^l(\xi)x^q, \quad g_{\alpha\beta}(\xi)=a_\alpha(\xi)\cdot a_\beta(\xi),$$

$$J(\xi)n(\xi)=a_1\wedge a_2, \quad J^2(\xi)=(g_{11}g_{22}-g_{12}^2)(\xi), \tag{13}$$

$$(\xi\in\Delta_e, \quad \alpha,\beta=1,2).$$

Неизвестные граничные поля (u, t) также интегрируются через узловые значения $u^k = u(z^k)$ и $t^k = t(z^k)$ в интерполяционных узлах z^k. Множество интерполяционных узлов отличается от множества геометрических узлов, а множество интерполяционных функций не совпадает с множеством функций формы. Рассмотрим случай, называемый согласованным интерполированием (Р.В. Гольдштейн, 1978), где для аппроксимации граничных перемещений применим билинейные элементы, а для аппроксимации поверхностных сил – постоянные элементы. При этом для расчетного значения параметра p будем иметь следующие выражения граничных перемещений и поверхностных сил внутри элемента S_k:

$$u_i(y)=\sum_{l=1}^{4}R^l(\xi)u_i^{\chi(k,l)},\quad i=1,2,3,\quad y\in S_k,$$

$$t_i(y)=t_i^{\chi(k,l)},\quad i=1,2,3,\quad y\in S_k.$$

Здесь $R^l(\xi)$ – функции формы для линейного четырехугольного элемента.

При упругой связи между h-й и j-й подконструкциями рассмотрим соотношение:

$$t_i^h(y)=-t_i^j(y)=-\gamma_i^{hj}(y)(u_i^h(y)-u_i^j(y)),$$

$$i=1,2,3;\quad y\in S_k,\quad S_k\subset\Gamma_{hj}=\Gamma_h\bigcap\Gamma_j.$$

Для получения дискретного аналога ГИУ применим метод коллокации. В качестве узлов коллокации y^m будем выбирать узлы аппроксимации исходных граничных функций. В итоге формируются системы линейных алгебраических уравнений для каждой подконструкции:

$$\frac{1-\alpha_\Omega}{2}u_i^m+\sum_{k=1}^{N}\sum_{l=1}^{4}A_{ij}^{m,k,l}u_j^{\chi(k,l)}=\sum_{k=1}^{N_1}B_{ij}^{m,k}t_j^k-\sum_{k=1}^{N_2}\sum_{l=1}^{4}D_{ij}^{m,k,l}(u_j^{\chi(k,l)}-u_j^{\bar{\chi}(\bar{k},l)}),\qquad(14)$$

$$\frac{1-\alpha_\Omega}{8}u_i^m+\sum_{k=1}^{N}\sum_{l=1}^{4}A_{ij}^{m,k,l}u_j^{\chi(k,l)}=\sum_{k=1}^{N_1}B_{ij}^{m,k}t_j^k-\sum_{k=1}^{N_2}\sum_{l=1}^{4}D_{ij}^{m,k,l}(u_j^{\chi(k,l)}-u_j^{\bar{\chi}(\bar{k},l)}),\qquad(15)$$

$$N=N_1+N_2,$$

где $\bar{\chi}(\bar{k},l)=\overline{m}$ – глобальный номер узла некоторой (сопряженной) подконструкции, находящейся с рассматриваемой подконструкцией в упругой связи по k-му элементу; k – номер элемента сопряженной подконструкции, где задана упругая связь; N_1 – число элементов границы без упругих связей; N_2 – число элементов с упругой связью.

Уравнения (14) записаны в узлах аппроксимации перемещений, уравнения (15) записаны в узлах аппроксимации усилий:

$$A_{ij}^{m,k,l}=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}[R^l(\xi)T_{ij}(x^m,y^k(\xi),\eth)-\delta_{\chi(k,l),m}T_{ij}^0(x^m,y^k(\xi))]J^k(\xi)d\xi_1d\xi_2,$$

$$B_{ij}^{m,k}=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}U_{ij}(x^m,y^k(\xi),\eth)J_k(\xi)d\xi_1d\xi_2,$$

$$D_{ij}^{m,k,l}=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}R^l(\xi)U_{ij}(x^m,y^k(\xi),\eth)J_k(\xi)\alpha_j^{\chi\bar{\chi}}(y^k(\xi))d\xi_1d\xi_2.$$

Необходимо отметить, что коэффициенты дискретных аналогов, определяемых функциями $U_{ij}^1,U_{ij}^2,U_{ij}^3,T_{ij}^{1,1},T_{ij}^{1,2}$, имеют особенность типа $1/r$, а коэффициенты дискретных аналогов, определяемых функциями $T_{ij}^1,T_{ij}^2,T_{ij}^3$, – особенность типа $1/r^2$. Это и определяет специфику вычислительного процесса. При вычислении интегралов по поверхности рассматриваются два случая. Первый – точка x^m не принадлежит элементу. Интегрирование по элементу сведено к повторному интегрированию по локальным координатам ξ_1 и ξ_2. Для каждой из координат используются квадратурные формулы Гаусса. Второй случай – точка x^m принадлежит элементу, по которому производится интегрирование, тогда используется прием устранения особенностей.

Применим к исходным уравнениям интегральное преобразование Лапласа с параметром $p = \alpha + i\omega$. Имеем следующие ГИУ [25]:

$$c_{lj}(x)\bar{u}_j(x,p) + \int_\Gamma T_{lj}(x,y,p)\bar{u}_j(y,p)\,d_yS = \int_\Gamma U_{lj}(x-y,p)\bar{t}_j(y,p)\,d_yS, \tag{16}$$

$$\begin{gathered} c_{lj}(x)u_j(x,t) + \int_0^t\int_\Gamma T_{lj}(x,y,t-\tau)u_j(y,\tau)\,d_yS\,d\tau = \\ = \int_0^t U_{lj}(x-y,t-\tau)t_j(y,\tau)\,d_yS\,d\tau, \quad l=1,2,3, \quad x\in\Gamma, \end{gathered} \tag{17}$$

где U_{lj} и T_{lj} – соответственно изображения по Лапласу или оригиналы компонент тензоров фундаментальных и сингулярных решений. ГИУ (16), (17) позволяют разработать эффективные численные методики для определения неизвестных функций.

Для численного обращения решения ГИУ (16) использован алгоритм, предложенный Дурбином [26, 27], а для решения ГИУ (17) – алгоритм C. Lubich [20, 28]:

$$F_k = \mathrm{Re}[\overline{f}(\alpha+i\omega_k)], \quad G_k = \mathrm{Im}[\overline{f}(\alpha+i\omega_k)], \quad \Delta_k = \omega_{k+1}-\omega_k,$$

$$f(0) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(F_k+F_{k+1})\Delta_k}{2\pi},$$

$$\begin{gathered} f(t) \approx \frac{e^{\alpha t}}{\pi t^2}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{F_{k+1}-F_k}{\Delta_k}(\cos(\omega_{k+1}t)-\cos(\omega_k t)) - \right. \\ \left. -\frac{G_{k+1}-G_k}{\Delta_k}(\sin(\omega_{k+1}t)-\sin(\omega_k t))\right]. \end{gathered}$$

$$y(t) = \int_0^t g(t-\tau)g(\tau)\,d\tau, \quad y(n\Delta t) = \sum_{k=0}^{n}\omega_{n-k}(\Delta t)g(k\Delta t), \quad n = 0,1,\dots,N,$$

$$\omega_n(\Delta t) = \frac{\Re^{-n}}{L}\sum_{l=0}^{L-1}\bar{g}(\gamma(\Re e^{il2\pi L^{-1}})/\Delta t)\,e^{-inl2\pi L^{-1}},$$

$$\begin{gathered} \alpha_k x_{n+k} + \alpha_{k-1}x_{n+k-1} + \ldots + \alpha_0 x_n = \\ = \Delta t[\beta_k(sx_{n+k} + g((n+k)\Delta t)) + \ldots + \beta_0)sx_n + g(n\Delta t))], \end{gathered}$$

$$\gamma(z) = \frac{\alpha_0 p^k + \ldots + \alpha_k}{\beta_0 p^k + \ldots + \beta_k}, \quad x(t,p) = \int_0^t e^{p(t-\tau)}g(\tau)\,d\tau.$$

С помощью соответствующих перестановок столбцов между матрицами можно отделить известные (записываемые в правой части) от неизвестных (в левой части), тогда систему линейных алгебраических уравнений запишем в виде:

$$[K]\{X\} = \{Y\}, \tag{18}$$

где $\{X\}$ – N-"вектор", объединяющий все скалярные компоненты $\{u\}$, $\{t\}$, $\{p\}$ и $\{v\}$, остающиеся неизвестными. На практике реального построения матриц $[A]$, $[B]$ и т.д. избегают, а в процессе сборки непосредственно получают $[K]$ и $\{Y\}$.

Матрица $[K]$ для однородной задачи полностью заполненная и несимметричная. Элементы матрицы оцениваются с помощью схем численного интегрирования, выбираемых в зависимости от того, каким является интеграл – несингулярным или сингулярным.

Несингулярные интегралы получаются, когда коллокационная точка не принадлежит элементу. Здесь применяются стандартные квадратуры, обычно гауссовского типа. Интегрирование по элементу сведено к повторному интегрированию по локальным координатам ξ_1 и ξ_2. По каждой из координат будем использовать квадратурные формулы Гаусса. По переменным ξ_1 и ξ_2 берется одинаковое число точек интегрирования. Количество используемых точек Гаусса варьируется в зависимости от расстояния между y и E_e (относительно характерной длины элемента).

Сингулярные интегралы возникают, когда точка x^m принадлежит элементу, по которому производится интегрирование. Из регуляризованного интегрального уравнения получают уравнения МГЭ, сингулярные интегралы на соответствующем элементе дают сходимость [29]. Однако для их точной численной оценки требуется преобразование в несингулярные интегралы. В случае согласованной аппроксимации точка x^m расположена либо в угловом узле, либо в центре элемента. Для устранения особенности подынтегральных выражений использовано преобразование J.C. Lachat, J.O. Watson [30].

При наличии в рассматриваемой задаче плоскостей симметрии удается существенно сократить объем исходной информации и вычислений.

Пусть граница $\Gamma \equiv \partial\Omega$ тела Ω состоит из $L+1$ симметричных фрагментов Γ^l $(l = 0,..., L)$: $\Gamma = \Gamma^0 + \Gamma^1 + ... + \Gamma^L$. Будем считать фрагмент Γ^0 основным. Тогда любой фрагмент Γ^l можно получить из фрагмента Γ^0 путем применения некоторого преобразования $\alpha^l = [\alpha_{ij}^l]_{3\times 3}$ $(l = 0,..., L)$, причем под α^0 понимается тождественное преобразование фрагмента Γ^0 самого в себя.

Построенная ГЭ-схема позволяет создать программное обеспечение и организовать численный расчет трехмерной задачи гранично-элементной стратегией дискретизации. Однако эти системы можно дополнить порождающими их начально-краевыми задачами и контактными соотношениями. Таким образом, решение исходной разрешающей системы МГЭ разбивается на два этапа, и размерность системы алгебраических уравнений, которую необходимо решать, понижается.

3. Гранично-элементные расчеты

Рассмотрим задачу о торцевом ударе силой p = 1 Н/м^2 призматического тела (a = 1 м) с жестко закрепленным концом (рис. 2) и параметрами материала: плотность ρ = 7850 кг/м^3, коэффициент Пуассона ν = 0, модуль Юнга $Å = 2,11 \cdot 10^{11}$ Ïà .
Задача имеет аналитическое решение и известно ее МГЭ-решение в сочетании с методом C. Lubich [20, 28]. Результаты расчетов перемещений на закрепленном торце приведены на рис. 3. Кривая *1* соответствует аналитическому решению; кривая *2* – МГЭ-решению, полученному методом Дурбина со 126 четырехугольными ГЭ на одной четверти равномерной сетки; кривая *3* – МГЭ-решению из [12] с 324 треугольными ГЭ на неравномерной сетке; кривая *4* – МГЭ-решению, полученному

с помощью метода C. Lubich со 126 четырехугольными ГЭ на четверти равномерной сетки. Параметры схемы C. Lubich выбраны следующие: $\Delta t = 0{,}00005$; $N = 2000$; $R = 0{,}9948$.

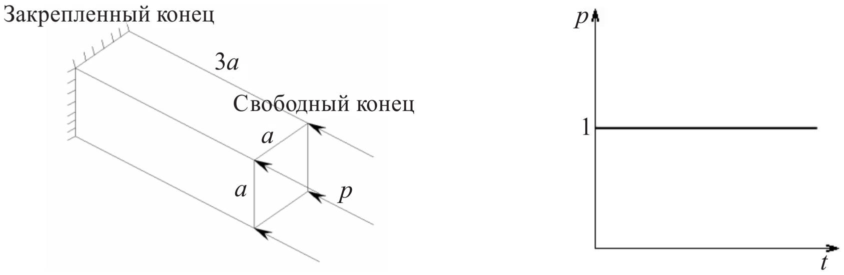


Рис. 2

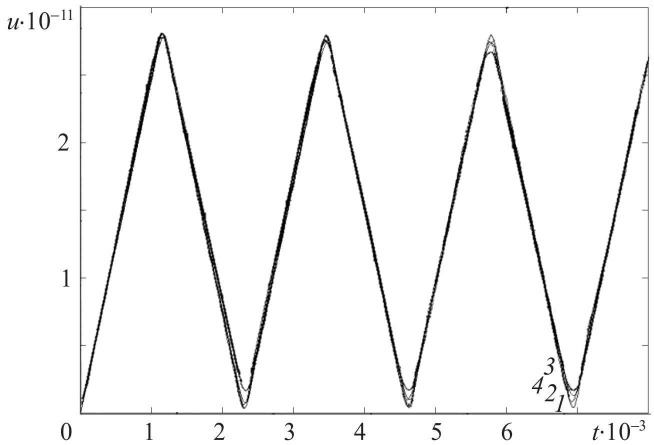


Рис. 3

Соответствующий отклик напряжений представлен на рис. 4.

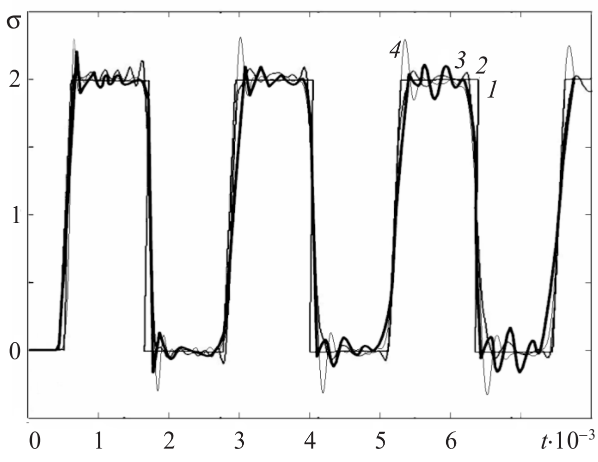


Рис. 4

Рассмотрим задачу о штампе. Базовая гранично-элементная сетка представлена на рис. 5. Расчеты велись для случая, когда каждый элемент разбивался на четыре дополнительных четырехугольных элемента. В итоге четверть равномерной сетки штампа содержала 24 ГЭ, а четверть ГЭ сетки дневной поверхности – 108 четырехугольных ГЭ.

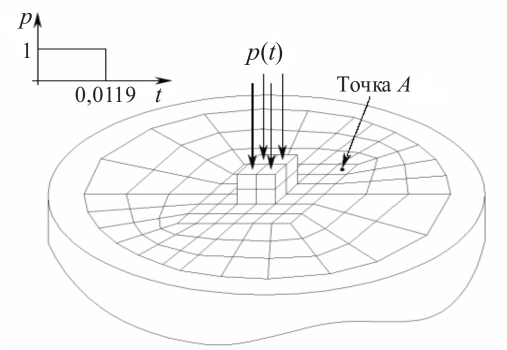


Рис. 5

Параметры материалов приведены в таблице.

	Штамп	Полупространство
λ	$0{,}8333\cdot 10^8$	$1{,}1926\cdot 10^8$
E	$3\cdot 10^8$	$1{,}38\cdot 10^8$
ν	0,2	0,35
ρ	2000	1966
λ	$0{,}8333\cdot 10^8$	$1{,}1926\cdot 10^8$
μ	$1{,}25\cdot 10^8$	$0{,}5111\cdot 10^8$
c_1	322,74	335,64
c_2	250	161,24

В качестве координат исследуемой точки взяли значения (2,33; 2,33; 0). Начало координат выбрано в центре контактной грани штампа.

Параметры схемы C. Lubich выбраны следующие: Δt = 0,002; N = 500; R = = 0,984. На рис. 6 представлен отклик поверхностных перемещений.

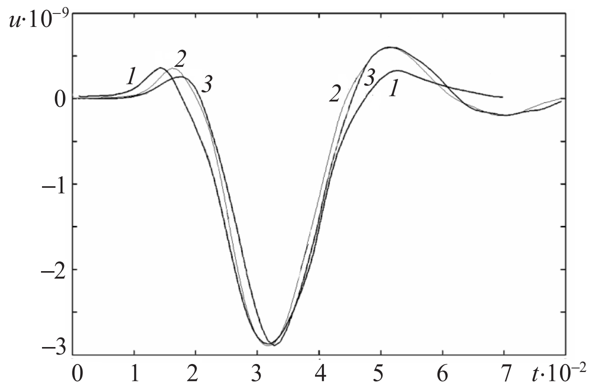


Рис. 6

Кривая *1* соответствует расчетам, приведенным в [31] с использованием схемы C. Lubich. Кривые *2* и *3* построены по описанным в работе схемам с использованием метода Дурбина и метода C. Lubich соответственно.

Расчетные примеры демонстрируют высокую вычислительную точность и устойчивость представленных ГЭ-схем как с применением интегрального преобразования Лапласа совместно с методом Дурбина, так и с использованием метода квадратур для сверток.

Литература

1. *Banerjee, P.K.* Advanced Development of BEM for Elastic and Inelastic Dynamic analysis of Solids / P.K. Banerjee, S. Ahmad, H.C. Wang: In Industrial Application of Boundary Element Methods. Developments in Boundary Element Methods / P.K. Banerjee, R.B. Wilson, eds. – London: Elsevier, 1989. – P. 77–177.

2. *Karabalis, D.L.* Dynamic Analysis of 3-D Foundations / D.L. Karabalis, D.C. Rizos: In Boundary Element Techniques in Geomechanics / G.D. Manolis, T.G. Davies, eds. – London: Elsevier, 1993.

3. *Antes, H.* The boundary integral Approach to static and dynamic contact problems / H. Antes, P.D. Panagiotopoulos // Int. Series of Numerical Mathematics 108. – Birkhauser, Basel, 1992. – 313 p.

4. *Beskos, D.E.* Boundary Element Methods in Dynamic Analysis / D.E. Beskos // Appl. Mech. Review. – 1987. – Vol. 40, № 1. – P. 1–23.

5. *Beskos, D.E.* Boundary element methods in dynamic analysis: Part II 1986–1996 / D.E. Beskos // Appl. Mech. Review. – 1997. – Vol. 50. – P. 149–197.

6. *Ahmad, S.* Dynamic Analysis of 3-D Structures by a Transformed Boundary Element Method / S. Ahmad, G.D. Manolis // Computational Mechanics. – 1987. – № 2. – P. 185–196.

7. *Cheng, A.H.-D.* Approximate Inversion of the Laplace Transform / A.H.-D. Cheng, P. Sidauruk, Y. Abousleiman // The Mathematica Jurnal. – 1994. – Vol. 4, № 2. – P. 76–82.

8. *Narayanan, G.V.* Numerical operational methods for time-dependent linear problems / G.V. Narayanan, D.E. Beskos // Int. J. Num. Meth. Eng. – 1982. – Vol.18 (12). – P. 1829–1854.

9. *Antes, H.* On Stability and Efficiency of 3D Acoustic BE Procedures for Moving Noise Sources / H. Antes, M. Jager: In Computational Mechanics, Theory and Applications / S.N. Atluri, G. Yagawa, T.A. Cruse, eds. – Heidelberg: Springer-Verlag. – 1995. – Vol. 2. – P. 3056–3061.

10. A Linear 6 Method Applied to 2D Time Domain BEM / G. Yu [et al.] // Communications in Numerical Methods in Engineering. – 1998. – Vol. 14(12). – P. 1171–1179.

11. *Yu, G.* A Linear 9 for 2-D Elastodynamic BE Analysis / G. Yu, W.J. Mansur, J.A.M. Carrer // Computational Mechanics. – 1999. – Vol. 2A. – P. 82–89.

12. *Schanz, M.* Wave Propogation in Viscoelastic and Poroelastic Continua / M. Schanz // Berlin: Springer, 2001. – 170 p.

13. *Birgisson, B.* Elastodynamic Direct Boundary Element Methods with Enhanced Numerical Stability Properties / B. Birgisson, A. Peirce, E. Siebrits // Int. J. Num. Meth. Eng. – 1999. – Vol.46. – P. 871–888.

14. *Peirce, A.* Stability Analysis and Design of Time-Stepping Schemes for General Elastodynamic Boundary Element Models / A. Peirce, E. Siebrits // Int. J. Num. Meth. Eng. – 1997. – Vol. 40(2). – P. 319–342.

15. *Rizos, D.C.* An Advanced Direct Time Domain BEM Formulation for General 3-D Elastodynamic Problems / D.C. Rizos, D.L. Karabalis // Computational Mechanics. – 1994. – № 15. – P. 249–269.

16. *Coda, H.B.* Three-Dimensional Transient BEM Analysis / H.B. Coda, W.S. Venturini // Computers & Structures. – 1995. – Vol. 56(5). – P. 751–768.

17. *Mansur, W.J.* Time Discontinuous Linear Traction Approximation in Time-Domain BEM Scalar Wave Propagation / W.J. Mansur, J.A.M. Carter, E.F.N. Siqueira // Int. J. Num. Meth. Eng. – 1998. – Vol. 42(4). – P. 667–683.

18. Stability of Galerkin and Collocation Time Domain Boundary Element Methods as Applied

to the Scalar Wave Equation / G. Yu [et al.] // Computers & Structures. – 2000. – Vol. 74(4). – P. 495–506.

19. Time Weighting in Time Domain BEM / G. Yu [et al.] // Engineering Analysis with Boundary Elements. – 1998. – Vol. 22(3). – P. 175–181.

20. *Lubich, C.* Convolution Quadrature and Discretized Operational Calculus. I. / C. Lubich / / Numerische Mathematik. – 1988. – № 52. – P. 129–145.

21. *De Hoop, A.Y.* Representation theorems for the displacement in an elastic olid and their application to elastodynamic diffraction theory / A.Y. De Hoop // Delft: Tech. Hogeschoof, 1958, Dr. Sci. Thesis.

22. *Новацкий, В.* Теория упругости / В. Новацкий. – М.: Мир, 1975. – 872 с.

23. *Чудинович, И.Ю.* Метод граничных уравнений в динамических задачах теории упругости / И.Ю. Чудинович. – Харьков, 1990. – 121 с.

24. *Becache, E.* Resolution par une methode d'equations integrales d'un prob-leme de diffraction d'ondes elastiques transitoires par une fissure / E. Becache. – These de doctorat, Universite Paris VI, 1991.

25. *Угодчиков, А.Г.* Метод граничных элементов в механике деформируемого твердого тела. / А.Г. Угодчиков, Н.М. Хуторянский. – Казань: Изд-во КГУ, 1986. – 296 с.

26. *Durbin, F.* Numerical inversion of Laplace transforms: an efficient improvement to Dubner and Abate's method / F. Durbin // The Computer Journal. – 1974. – V.17, № 4. – P. 371–376.

27. *Zhao, X.* An efficient approach for the numerical inversion of Laplace transform and its application in dynamic fracture analysis of a piezoelectric laminate / X. Zhao // Int.J. of Solids and Structures. – 2004. – V. 41. – P. 3653–3674.

28. *Lubich, C.* Convolution quadrature and discretized operational calculus. II / C. Lubich // Numerische Mathematik. – 1988. – V. 52. – P. 413–425.

29. *Sladek, V.* Singular integrals in boundary element methods / V. Sladek, J. Sladek // Southampton, Boston: Computational Mechanics Publications. – 1998. – 448 p.

30. *Lachat, J.C.* Effective numerical treatment of boundary integral equations: a formulation fot three-dimensional elastostatics / J.C. Lachat, J.O. Watson // Int. J. Numer. Mech. Eng. – 1976. – № 10. – P. 991–1005.

31. *Gaul, L.* Boundary Element Methods for the Dynamic Analysis of Elastic, Viscoelastic, and Piezoelectric Solids / L. Gaul [et al.]: In Encyclopedia of Computational Mechanics / E. Stein, R. de Borst, T. J. R. Hughes, eds. Vol. 2: Solids and Structures / Jhon Wiley & Sons, Ltd., 2004. – P. 751–769.

[22.10.2007]

DEVELOPING A BOUNDARY ELEMENT METHOD FOR ANALYZING 3-DYMENSIONAL CONTACT NONSTATIONARY DYNAMIC PROBLEMS OF ELASTICITY

A.A. Belov, L.A. Igumnov, S.Yu. Litvinchuk

The paper presents two BEM-approaches to analyzing 3-dymensional dynamic problems of elasticity. A BEM-approach using Laplace integral transform and Dourbin method that makes it possible to construct the sought function using a known image is described and demonstrated. Dourbin method with inhomogeneous piecewise quadratic approximation of the image is used. A BEM-approach with explicitly accounting for the time variable is also presented. A BE-technique of constructing a discrete analogue in combination with the quadrature method for convolutions is used. A novel scheme of the quadrature method for convolutions is constructed. The results of the BEM-calculations are given. The presented BEM-schemes demonstrate high accuracy.