

УДК 539.37/531

DOI: 10.32326/1814-9146-2025-87-3-341-353

РАЗРАБОТКА АЛГОРИТМА ЧИСЛЕННОЙ ГОМОГЕНИЗАЦИИ НА ОСНОВЕ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ПО ДАННЫМ ЦИФРОВОГО ДВОЙНИКА*

© 2025 г.

**Семенова Е.В., Смирнова В.В.,
Бережной Д.В., Герасимов О.В.**

*Казанский (Приволжский) федеральный университет,
Казань, Российская Федерация*

valeriy.karasikov@gmail.com

Поступила в редакцию 10.04.2025

Современные подходы к производству материалов определяют необходимость в оценке их механических характеристик. В связи с этим распространение получили подходы, основанные на применении данных с цифровых двойников, полученных методами неразрушающего контроля. Рассматривается метод численной гомогенизации с учетом структурного распределения материала в элементе неомогенной среды согласно данным компьютерной томографии на основе метода конечных элементов. Особенностью подхода выступает построение сетки, каждый конечный элемент которой учитывает локальное неоднородное распределение материала в расчетной области. Применение этого подхода при решении набора тестовых задач показало быструю сходимость результатов в сравнении с аналитическими методами расчета и с прямым моделированием, а также сокращение времени вычислений в силу уменьшения размерности системы. Анализ результатов предполагал оценку влияния степени дискретизации численной модели как на точность расчетов, так и на их продолжительность. Установлено, что при рассмотрении показательных образцов с равномерным распределением материала погрешность результатов относительно аналитических методов расчета не превышает 3%. Проведение вычислений для образцов с неоднородной структурой показало значения отклонений, не превышающие 12,5%, что в большей степени обусловлено чувствительностью метода прямого моделирования к выбору кинематических граничных условий. Применение разработанного подхода к определению эффективных механических параметров элемента неомогенной среды на основе данных его цифрового двойника позволяет получать достоверные результаты с оптимальным временем проводимых вычислений.

Ключевые слова: численная гомогенизация, цифровой двойник, компьютерная томография, метод конечных элементов.

Введение

Современные технологии производства сложноструктурных материалов требуют разработки способов оценки их механических характеристик [1–6]. Одним из ак-

* Выполнено за счет гранта РНФ (проект №25-21-00434).

туальных направлений является изготовление образцов на основе аддитивных методов [7–9]. Точность изготовления получаемых изделий зависит от технических параметров применяемого оборудования. Преимуществом аддитивных технологий является возможность компьютерного моделирования физико-механических свойств создаваемых объектов. При проверке прочности готовых образцов применяются неразрушающие способы контроля [10], обеспечивающие внутренний анализ структуры материала. Такой подход позволяет создавать цифровые двойники, отражающие распределение механических свойств и допускающие проведение многократных вычислительных экспериментов. Комбинирование методов численного моделирования с данными цифровых двойников открывает возможности для разработки методик проектирования материалов с заданными свойствами. Таким образом, актуальной задачей становится создание способа определения интегральных характеристик материала в заданном элементе объема с учетом особенностей его микроструктуры.

Один из подходов к восстановлению усредненных механических параметров – численная гомогенизация. Метод предполагает переход от локальной неоднородности к ортотропным характеристикам на основе проведения вычислительных экспериментов. Среди подобного рода подходов можно выделить метод представительного элемента объема [11] и метод средней длины пересечений [12]. В первом методе возникают вычислительные ограничения при проведении расчетов на основе изображений высокого разрешения, поскольку требуется моделирование каждого пикселя/вокселя отдельным расчетным компонентом. При использовании сеточных методов таким компонентом может быть конечный элемент сплошной среды с заданными характеристиками, определяемыми локально усредненными значениями из цифрового двойника. Размерность получаемой системы уравнений определяется размером конечно-элементной сетки, что обуславливает высокие требования к вычислительным ресурсам. Другой подход предполагает построение тензора структуры, применяемого в дальнейшем для расчета ортотропных механических параметров. Недостатками метода являются необходимость предварительного расчета тензора структуры и проведения натурных испытаний для определения используемых в расчетных соотношениях физических констант. Также существуют методы, позволяющие напрямую учитывать неоднородное распределение свойств при построении численной модели [13]. Применение таких подходов позволяет существенно сократить объем вычислений за счет уменьшения размерности сетки. Дополнительным преимуществом является исключение необходимости в точном восстановлении геометрии образцов со сложной топологией (например, костных тканей), поскольку степень дискретизации сетки слабо влияет на результаты численных расчетов. Следует отметить, что ограничением прямых методов моделирования является необходимость определения характерного размера элементарной ячейки среды (конечного элемента), что требует учета характеристического размера и расположения неоднородных образований материала [14].

Целью настоящего исследования является разработка и реализация метода численной гомогенизации для определения усредненных механических характеристик кусочно-неоднородных материалов на основе данных цифрового двойника, построенного по данным компьютерной томографии. Достижение цели выполнялось на основе метода конечных элементов, где каждый конечный элемент строился с учетом локального распределения свойств материала, восстановленных по данным компьютерной томографии [15]. Расчет компонентов матрицы упругости элементов неодно-

родной среды выполнялся на основе подхода для моделирования свойств V -периодических композитов [16–18]. Таким образом, совмещение в рамках подхода метода построения численной модели по данным изображений с методикой восстановления эффективных свойств периодического материала позволяет определять усредненные значения механических характеристик в направлениях, соответствующих ортотропии.

Материалы и методы

Разработанный метод численной гомогенизации основан на известном соотношении для построения тензора упругости V -периодического материала:

$$C_{ijkl}^H = \frac{1}{|V|} \int \Delta \varepsilon_{pq}^{(ij)}(\{r\}) C_{pqrs}(\{r\}) \Delta \varepsilon_{rs}^{(kl)}(\{r\}) dV, \quad (1)$$

где C_{ijkl}^H – компоненты гомогенизированного тензора упругости 4-го ранга $[[C^H]]$; $C_{pqrs}(\{r\})$ – компоненты локально изменяющегося тензора упругости $[[C(\{r\})]]$, определяемого текущими координатами глобального радиуса-вектора точки $\{r\}$; $\Delta \varepsilon_{pq}^{(ij)}(\{r\})$ – компоненты тензора отклонения деформаций $[[\Delta \varepsilon^{(ij)}(\{r\})]]$ для нагружения в (ij) -направлении [19]:

$$[[\Delta \varepsilon^{(ij)}(\{r\})]] = [[\varepsilon^{0(ij)}]] - [[\varepsilon^{(ij)}(\{r\})]], \quad (2)$$

$[[\varepsilon^{0(ij)}]]$ – постоянные деформации; $[[\varepsilon^{(ij)}(\{r\})]]$ – изменяющиеся деформации, вычисление которых может быть выполнено на основе дискретизации области с применением соответствующих численных методов [20, 21].

Главной задачей при построении алгоритма оказывается выбор подходящего способа для вычисления отклонения деформаций. В статье [20] рассматривается подход, основанный на использовании метода конечных элементов. При этом исходный элемент неоднородной среды дискретизируется на расчетную сетку таким образом, чтобы каждый отдельный конечный элемент соответствовал материалу с заданными механическими характеристиками, которые могут быть получены на основе данных рентгеновской компьютерной томографии [22, 23]: процесс установления связи между проницаемостью среды и механическими параметрами материала представляет собой создание цифрового двойника объекта.

В силу особенностей восстановления снимков сетка, построенная на основе воксельной модели, является регулярной и ортогональной. Следует отметить, что при рассмотрении пористых сред могут возникать микроэлементы с высокой проницаемостью. В этом случае исключение вырожденности системы достигается присвоением соответствующему конечному элементу фиктивных механических параметров, близких к нулевым. Таким образом, метод не требует исключения из сетки «пустых» конечных элементов и обеспечения тем самым связности полученного ансамбля.

Одним из основных недостатков описанного подхода, как и метода представительных объемных элементов, является требование моделирования каждого микрообъема отдельным конечным элементом, что обуславливает высокие вычислительные затраты. Поэтому оказывается необходимым разработать способ снижения объема проводимых вычислений за счет уменьшения размерности образуемой системы. Ранее был предложен метод построения численной модели на основе данных компьютерной томографии [13], в основе которого лежит учет неоднородного распределения механических свойств материала путем применения взвешенного интегриро-

вания матрицы жесткости каждого конечного элемента сетки. В рамках этого метода под знак интеграла вводится весовая функция, определяющая механические свойства среды:

$$[D(\{r\})] = [D^0] \cdot \omega(\{r\}), \quad (3)$$

где $[D^0]$ – матрица упругости «базового» материала; $\omega(\{r\})$ – весовая функция, значения которой определяются данными с изображений. Полагая в качестве исходного модуля упругости «базовую» величину, значения в микрообъемах можно выразить через нее на основе зависимости (3). Такой способ позволяет учитывать несколько фаз материала при постоянном значении коэффициента Пуассона. Расширение подхода для построения численных моделей с изменяющимся коэффициентом Пуассона будет иметь вид:

$$[D(\{r\})] = [D_{\omega(\{r\})}]. \quad (4)$$

Здесь каждой фазе среды присваивается номер, определяющий уникальные механические свойства среды в текущем микрообъеме на основе обработанных данных с изображений.

Исходя из соотношений (3) и (4), взвешенное интегрирование локальной матрицы жесткости можно записать в виде [13]:

$$[K_k^{\omega}] = \int [B_k(\{\theta\})]^T [D_k(\{\theta\})] [B_k(\{\theta\})] dV, \quad (5)$$

где $[B_k(\{\theta\})]$ – матрица дифференцирования, определяемая локальным радиусом-вектором координат $\{\theta\}$. Интегрирование в (5) может быть реализовано методом средних прямоугольников с использованием в качестве точек центров вокселей [13]. Исследование сходимости метода проводилось в [24].

Построение численной модели на основе данных с изображений определяет метод учета кусочно-однородных свойств материала на макроуровне. Таким образом, применение взвешенного интегрирования уменьшает размер системы и позволяет использовать взаимодействие между неоднородными конечными элементами при определении эффективных свойств материала. В этом случае выражение для определения матрицы упругости неомогенного элемента среды, полученное на основе формулы (1), имеет вид:

$$[D^H] = \frac{1}{|V|} \sum [\Delta \chi_k]^T [K_k^{\omega}] [\Delta \chi_k]. \quad (6)$$

Вычисление составленной матрицы локального отклонения узловых перемещений $[\Delta \chi_k]$ предполагает, что матрица $[\chi_k]$ определяется исходя из матрицы узловых сил $[f_k^{\omega 0}]$, полученной согласно формуле:

$$[f_k^{\omega 0}] = \int [B_k(\{\theta\})]^T [D_k(\{\theta\})] [\varepsilon^0] dV. \quad (7)$$

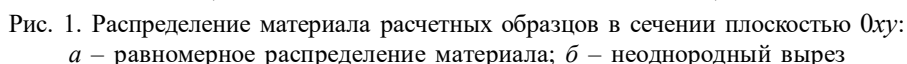
Численное интегрирование выражения (7) определяет матрицу узловых сил, соответствующих единичным деформациям k -го конечного элемента неоднородной среды.

Совместное использование представленных методов для проведения численной гомогенизации элемента среды по-прежнему оставляет открытым вопрос выбора степени дискретизации расчетной области. В этом случае особенностью совместного подхода выступает ограничение на максимальный размер конечного элемента, определяемый характеристическими параметрами неоднородных структурных образований [25]. Отдельное исследование может быть направлено на определение

Оценка полученных разработанным методом результатов может быть выполнена сравнением с аналитическими и численными подходами на примере расчета материалов с характерной структурой. Сходимость сеточного метода может быть исследована на основе применения различной степени дискретизации модели и улучшенных алгоритмов построения нерегулярных ансамблей, учитывающих особенности распределения материала. Эффективность алгоритма может быть проанализирована с учетом времени вычислений.

Расчеты проводились на основе трехмерного гексагонального изопараметрического конечного элемента с трилинейной аппроксимацией [24], учитывающего неоднородное распределение материала с помощью данных с изображений. Построение алгоритма предполагало программную реализацию на языке C++ с применением технологии OpenMP для проведения многопоточных вычислений, а также библиотеки линейной алгебры Eigen для решения системы линейных алгебраических уравнений.

На рис. 1 представлено распределение материала в расчетных образцах: черным цветом обозначен упругий материал, белым – фаза среды, упругость которой принималась близкой к нулевой. Таким образом, рассматривались бинарные изображения, характер распределения упругого материала в которых определял неомогенные свойства среды.



345

рованного выреза к ребрам кубического элемента составляло $1/4$ и $3/4$ соответственно).

Построение расчетных сеток выполнялось с различной степенью дискретизации: применялось от 1 до 40 конечных элементов вдоль направления каждой координатной оси. Наибольшая степень дискретизации области предполагала интегрирование методом Гаусса, что обуславливалось видом подынтегральной функции в формуле (5): в этом случае метод средних прямоугольников требует минимум 2 точки интегрирования в каждом направлении. Построение сетки, состоящей из одного конечного элемента, позволяло получать результаты, близкие к данным аналитического расчета, что определялось особенностями метода взвешенного интегрирования локальной матрицы жесткости. Результаты, соответствующие сеткам промежуточных размеров, позволяли проводить анализ влияния степени дискретизации численной модели на значения гомогенизированных параметров элемента негетерогенной среды.

На рис. 2 представлены результаты расчета первой тестовой модели, где a – отклонение расчетных значений относительно аналитических, %; b – время вычислений, мин. Равномерное распределение фаз позволяет рассматривать материал как изотропный, в силу чего данные приведены только для модуля упругости и модуля сдвига.

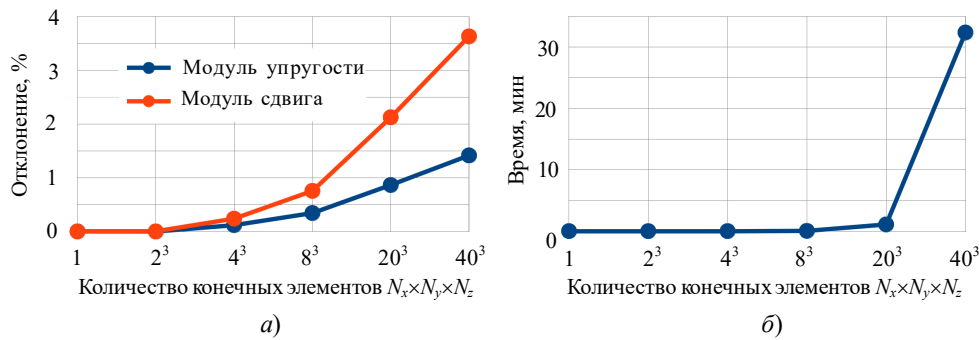


Рис. 2. Результаты проведения численной гомогенизации образца с равномерным распределением фаз материала

Анализ результатов показал, что отклонение полученных значений относительно данных расчета на основе закона механической смеси не превышало 4% для модуля упругости и 1,5% для модуля сдвига при максимальной степени дискретизации. Следует отметить, что погрешность вычислений растет при использовании большего количества конечных элементов, что обуславливается особенностями сеточного метода, а также влиянием кинематических граничных условий. Существенный вклад в оптимальность полученного решения вносило время вычислений, значительный рост которого наблюдался при использовании более 8 конечных элементов на стороне области. Таким образом, результаты показывают быструю сходимость метода численной гомогенизации при расчете образцов с равномерным распределением материала, что позволяет в значительной мере сократить время проводимых вычислений с использованием сеток меньшей размерности.

Следующая задача – это верификация метода на примере расчета образца с распределением материала, соответствующим ортотропной модели. На рис. 3 представлены результаты для всех модулей упругости (E_{ij}) и сдвига (G_{ij}). Прямое моделирование оказывалось необходимым для проведения сопоставительного анализа полученных результатов и предполагало применение метода определения реакции на

эквивалентную силу, недостатком которого в рамках поставленной задачи является неустойчивость решения, связанная с характером наложения граничных условий на поверхность, в силу чего кинематические ограничения налагались на сплошные грани элемента, не содержащие сквозной вырез (в рамках предположения о парности касательных напряжений). На рис. 3а показано отклонение расчетных значений относительно результатов прямого моделирования. На рис. 3б показано время вычислений. Таким образом, наибольшее отклонение результатов наблюдалось при использовании низкой степени дискретизации сетки (см. рис. 3а). Более того, применение 1 и 2 конечных элементов на стороне области не позволяло устанавливать различные показатели упругих свойств материала в перпендикулярных направлениях, характерных для ортотропной модели. Этот эффект объясняется как низкой степенью полиномов при аппроксимации поля перемещений в объеме отдельного конечного элемента, так и симметрией выреза относительно ортогональных координатных плоскостей.

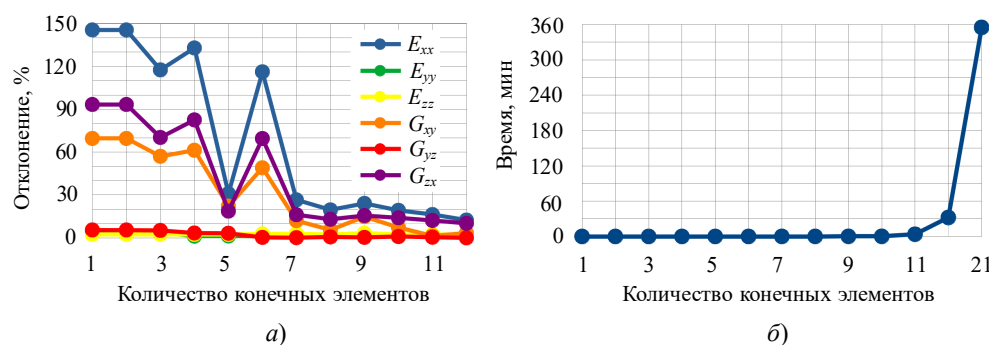


Рис. 3. Результаты проведения численной гомогенизации образца с неравномерным распределением фаз материала

Максимальное отклонение расчетных значений соответствовало модулям, связанным с осью $0x$ (E_{xx} , G_{xy} , G_{zx}), вдоль направления которой наблюдалась наименьшая упругость материала. Построение сетки конечных элементов размером $5 \times 5 \times 5$ приводило к быстрой сходимости результатов, что связано с принадлежностью срединного слоя конечных элементов моделируемому вырезу. Аналогично при использовании на стороне области 7 и более конечных элементов отклонение результатов относительно данных прямого моделирования не превышало 27%. Наибольшая точность достигалась путем построения сетки, соответствующей прямому моделированию: погрешность результатов составляла около 12,5% для модуля упругости и 10,2% для модуля сдвига. Следует отметить, что применение сетки конечных элементов размером $20 \times 20 \times 20$ снижало время расчетов в 8 раз (см. рис. 3б) и приводило к увеличению отклонения значений на 2–4%. Наиболее продолжительные вычисления соответствовали методу расчета реакции на эквивалентную силу и превышали время вычислений представленным методом в 11 раз при использовании одинаковой степени дискретизации. Таким образом, применение 7 конечных элементов на стороне области позволяет проводить численную гомогенизацию моделируемого элемента среды заданной структуры с оптимальным соотношением между точностью и временем вычислений.

Обсуждение

Проведение численной гомогенизации элемента неоднородной среды предполагает вычислительно затратный процесс при использовании данных с изображений высокого разрешения. Размер системы, требующей решения, определяется степенью дискретизации области. Существующие подходы позволяют проводить прямое моделирование, в рамках которого аппроксимация объема достигается построением расчетных элементов, размер которых соответствует микроэлементу среды. Недостатками подобных подходов оказываются необходимость в решении системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) большого размера и проведение значительного количества вычислительных экспериментов для определения усредненных механических свойств материала. В настоящей статье был предложен новый подход, основанный на методе конечных элементов, позволяющий уменьшить размерность СЛАУ путем учета неравномерного распределения свойств материала на макроуровне.

Верификация подхода выполнялась сравнением с методами аналитического расчета (закон механической смеси) для равномерного распределения материала и с методами прямого моделирования (реакция на эквивалентную силу) для неоднородных свойств среды. Результаты показали быструю сходимость при построении сеток относительно небольшой степени дискретизации, что приводило к оптимальному времени вычислений. Недостатком представленного метода является необходимость в корректном выборе размера конечных элементов, основанном на характере неоднородной структуры материала. Так, моделирование сквозного выреза не позволяло выделять оси ортотропии при использовании сеток низкой степени дискретизации. Также можно сделать вывод о большей жесткости конструкции при использовании конечных элементов, соответствующих границе смежных фаз среды, относительно сеток с наличием подобъемов, полностью погруженных в моделируемый вырез. Этот эффект объясняется особенностями построения каждого конечного элемента неоднородной среды и определяет наличие связи между размером неоднородных образований и степенью дискретизации расчетной области.

Ранее было показано [19], что проведение численной гомогенизации области одним конечным элементом с линейной аппроксимацией поля перемещений, построенным на основе взвешенного интегрирования, позволяет учитывать равномерное распределение свойств материала (например, пористость) аналогично формуле закона механической смеси, а также выявлять неоднородное распределение фаз среды при отсутствии симметрии относительно ортогональных координатных плоскостей, нормали к которым параллельны нормальным к граням расчетного элемента неомогенной среды с геометрией в виде куба. Таким образом, применение сеток более высокой степени дискретизации определялось необходимостью в проведении расчетов структур, соответствующих модели ортотропного материала. Более того, применение множества фаз среды в рамках моделирования области одним конечным элементом предполагало дополнительные расчетные трудности, связанные с необходимостью корректного определения отклонения деформаций (формула (2)), что исключалось при проведении вычислений на основе конечно-элементного ансамбля.

Следует отметить, что разработанный метод позволяет определять эффективные свойства элемента среды по отношению к исходным величинам, соответствующим образующему материалу на уровне отдельного микрообъема. Таким образом, остается открытым вопрос определения физических свойств исходных параметров образующих фаз среды, значения которых могут быть получены путем проведения натур-

ных экспериментов образцов из однородных материалов. В дополнение к представленным результатам исследования могут быть также вычислены коэффициенты Пуассона, анализ полученных значений для которых может быть проведен на основе методов тензометрии.

Заключение

Представлен новый подход к численной гомогенизации выделенной области методом конечных элементов на основе данных цифрового двойника. Разработанный алгоритм позволяет определять эффективные свойства материала с учетом неравномерного распределения параметров среды. Преимущество метода – снижение размерности системы, что приводит к оптимальному времени вычислений в сравнении с существующими аналогами прямого моделирования. Недостатком метода является необходимость в установлении степени дискретизации сетки, соответствующей характерному размеру структурных неоднородных образований материала. Сопоставительный анализ результатов с данными аналитического расчета и прямого моделирования показал быструю сходимость значений при использовании небольшого количества конечных элементов. Применение разработанного метода на практике позволяет проводить численную гомогенизацию для образцов из неоднородных материалов, соответствующих множеству фаз среды.

Список литературы

1. Bolshakov P., Kharin N., Kashapov R., Sachenkov O. Structural design method for constructions: simulation, manufacturing and experiment. *Materials*. 2021. Vol. 14. Iss. 20. P. 6064-1 – 6064-12. <https://doi.org/10.3390/ma14206064>.
2. Акифьев К.Н., Харин Н.В., Стаценко Е.О., Саченков О.А., Большаков П.В. Пилотное исследование потери устойчивости на сжатие решетчатого эндопротеза с помощью рентгеновской томографии. *Российский журнал биомеханики*. 2023. Т. 27. №4. С. 40–49. DOI: 10.15593/RZhBiomeh/2023.4.03.
3. Зерщиков К., Семенов Ю. Структура полимерных композиционных материалов, армированных стеклянными волокнами различной длины, исследованная методом компьютерной томографии. *Механика композиционных материалов и конструкций*. 2024. Т. 30. №2. С. 141–152. <https://doi.org/10.33113/mkmmk.ras.2024.30.02.01>.
4. Грязнов М.Ю., Шотин С.В., Чувильдеев В.Н., Мурашов А.А., Семеничева А.В. Физико-механические свойства биметаллического материала на основе нелегированного титана и титанового сплава Ti6Al4V, полученного с использованием технологии послойного лазерного сплавления. *Проблемы прочности и пластичности*. 2024. Т. 86. №3. С. 371–381. DOI: 10.32326/1814-9146-2024-86-3-371-381.
5. Абашев Д.Р., Бондарь В.С., Воробьев И.А., Шарова В.И. Определение упругих и прочностных параметров полимерных композиционных материалов и изготовленных из них цилиндрических оболочек. *Проблемы прочности и пластичности*. 2024. Т. 86. №1. С. 47–59. DOI: 10.32326/1814-9146-2024-86-1-47-59.
6. Филиппов А.Р. Методика динамических испытаний высокопрочных композитов на растяжение. *Проблемы прочности и пластичности*. 2024. Т. 86. №1. С. 106–119. DOI: 10.32326/1814-9146-2024-86-1-106-119.
7. Kharin N., Bolshakov P., Kuchumov A.G. Numerical and experimental study of a lattice structure for orthopedic applications. *Materials*. 2023. Vol. 16. Iss. 2. P. 744-1 – 744-13. <https://doi.org/10.3390/ma16020744>.
8. Грязнов М.Ю., Шотин С.В., Чувильдеев В.Н., Сысоев А.Н., Пискунов А.В., Котков Д.Н., Семеничева А.В., Сахаров Н.В., Мурашов А.А. Механические свойства нелегированного титана BT1-0, полученного методами послойного лазерного сплавления и ин-

тенсивной пластической деформации. *Проблемы прочности и пластичности*. 2022. Т. 84. № 4. С. 570–581. DOI: 10.32326/1814-9146-2022-84-4-570-581.

9. Царева И.Н., Бердник О.Б., Кривина Л.А., Кузьмин В.И., Разов Е.Н. Структура и прочностные свойства плазменного покрытия, полученного из порошкового материала диоксида циркония, плакированного никелем. *Проблемы прочности и пластичности*. 2022. Т. 84. №3. С. 397–408. DOI: 10.32326/1814-9146-2022-84-3-397-408.

10. Ерофеев В.И., Иляхинский А.В., Родюшкин В.М., Иляхинский И.А., Пичков С.Н., Хлыбов А.А. Неразрушающий контроль состояния материала пар трения насосов установок ВВЭР. *Проблемы прочности и пластичности*. 2022. Т. 84. №3. С. 376–385. DOI: 10.32326/1814-9146-2022-84-3-376-385.

11. Almeida J., Castro S., Leão H., Pitangueira R. Exploring the influence of heterogeneity on determination of a RVE for concrete structures. *Proceedings of the XLV Ibero-Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering*. ABMEC Maceió, Alagoas. 11–14 Nov. 2024. P. 1–8. <https://doi.org/10.55592/cilamce.v6i06.10251>.

12. Voyiadjis G., Kattan P. Use of fabric tensors in damage and healing mechanics of materials. *International Journal of Damage Mechanics*. 2025. ICDM-4 Special Issues P. 1–49. <https://doi.org/10.1177/10567895251319408>.

13. Gerasimov O.V., Kharin N.V., Fedyanin A.O., Bolshakov P.V., Baltin M.E., Statsenko E.O., Fadeev F.O., Islamov R.R., Baltina T.V., Sachenkov O.A. Bone stress-strain state evaluation using CT based FEM. *Frontiers in Mechanical Engineering*. 2021. Vol. 7. P. 1–8. <https://doi.org/10.3389/fmech.2021.688474>.

14. Alshoaibi A., Fageehi Y. Advances in finite element modeling of fatigue crack propagation. *Applied Sciences*. 2024. Vol. 14. Iss. 20. P. 9297-1–9297-20. <https://doi.org/10.3390/app14209297>.

15. Герасимов О.В., Шарафутдинова К.Р., Караман В.С., Салеева Г.Т., Саченков О.А. Оценка напряженного состояния позвоночных столбов собак на основе данных компьютерной томографии. *Российский журнал биомеханики*. 2024. Т. 28. №1. С. 40–53. <https://doi.org/10.15593/RzhBiomeh/2024.1.03>.

16. Hassani B., Hinton E. A review of homogenization and topology optimization I – homogenization theory for media with periodic structure. *Computers and Structures*. 1998. Vol. 69. Iss. 6. P. 707–717. [https://doi.org/10.1016/S0045-7949\(98\)00131-X](https://doi.org/10.1016/S0045-7949(98)00131-X).

17. Hassani B., Hinton E. A review of homogenization and topology optimization II – analytical and numerical solution of homogenization equations. *Computers and Structures*. 1998. Vol. 69. Iss. 6. P. 719–738. [https://doi.org/10.1016/S0045-7949\(98\)00132-1](https://doi.org/10.1016/S0045-7949(98)00132-1).

18. Bolshakov P., Kuchumov A.G., Kharin N., Akifyev K., Statsenko E., Silberschmidt V.V. Method of computational design for additive manufacturing of hip endoprosthesis based on basic-cell concept. *International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering*. 2024. Vol. 40. Iss. 3. P. e3802-1–e3802-23. <https://doi.org/10.1002/cnm.3802>.

19. Герасимов О.В., Семенова Е.В., Шакирова Л.Р., Балтина Т.В., Бережной Д.В., Саченков О.А. Метод определения упругих свойств элемента негетерогенной среды на основе данных компьютерной томографии. *Российский журнал биомеханики*. 2024. Т. 28. №3. С. 47–59. <https://doi.org/10.15593/RzhBiomeh/2024.3.04>.

20. Andreassen E.A., Andreassen C.S. How to determine composite material properties using numerical homogenization. *Computational Materials Science*. 2014. Vol. 83. P. 488–495. <https://doi.org/10.1016/j.commatsci.2013.09.006>.

21. Dong G., Tang Y., Zhao Y.F. A 149 line homogenization code for three-dimensional cellular materials written in MATLAB. *Journal of Engineering Materials and Technology*. 2019. Vol. 141. Iss. 1. P. 011005-1–011005-1 011005-24. <https://doi.org/10.1115/1.4040555>.

22. Park M., Venter M., Du Plessis A. Estimating mechanical properties of AM lattices using CT-scans and FE models. *Proceedings of the 13th South African Conference on Computational and Applied and Applied Mechanics*. Stellenbosch, South African Republic. 22-23 Jan. 2024. P. 238–252.

23. Klontzas M., Triantafyllou M., Vassalou E., Karantanis A. CT and CT Arthrography of the Shoulder. *ATI Lab*. 2025. P. 17–43. https://doi.org/10.1007/174_2024_557.

24. Герасимов О.В., Бережной Д.В., Большаков П.В., Стаценко Е.О., Саченков О.А. Построение механической модели элементов гетерогенной среды на основе численно-

цифрового алгоритма обработки данных компьютерной томографии. *Российский журнал биомеханики*. 2019. Т. 23. № 1. С. 104–116. DOI: 10.15593/RZhBiomeh/2019.1.10.

25. Al-Jamal A., Barsoum I., Abu Al-Rub R. Defect-sensitivity of stochastic and periodic minimal surface titanium cellular materials. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2025. Vol. 289. Article No 110063. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2025.110063>.

26. Герасимов О.В., Рахматулин Р.Р., Балтина Т.В., Саченков О.А. Определение напряженно-деформированного состояния костей по данным компьютерной томографии. *Изв. вузов. Машиностроение*. 2023. Т. 8. №761. С. 3–15. <https://doi.org/10.18698/0536-1044-2023-8-3-15>.

References

1. Bolshakov P., Kharin N., Kashapov R., Sachenkov O. Structural design method for constructions: simulation, manufacturing and experiment. *Materials*. 2021. Vol. 14. Iss. 20. P. 6064-1 – 6064-12. <https://doi.org/10.3390/ma14206064>.

2. Akifyev K.N., Kharin N.V., Statsenko E.O., Sachenkov O.A., Bolshakov P.V. Pilotnoe issledovanie poteri ustoychivosti na szhatie reshchatogo endoproteza s pomoshchyu rentgenovskoy tomografii [Pilot study of lattice endoprosthesis buckling by compression in-situ using X-ray tomography]. *Rossiyskiy zhurnal biomekhaniki [Russian Journal of Biomechanics]*. 2023. Vol. 27. No 4. P. 40–49 (In Russian).

3. Zershchikov K.Yu., Semenov Yu.V. Struktura polimernykh kompozitsionnykh materialov, armirovannykh steklyannymi voloknami razlichnoy dliny, issledovannaya metodom kompyuternoy tomografii [The investigation of polymer composite materials structure reinforced with glass fibers of various lengths, studied by computed tomography]. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktiv*. 2024. Vol. 30. No 2. P. 141–152 (In Russian).

4. Gryaznov M.Yu., Shotin S.V., Chuvildeev V.N., Murashov A.A., Semenycheva A.V. Fiziko-mekhanicheskie svoystva bimetallicheskogo materiala na osnove nelegirovannogo titana i titanovogo splava Ti6Al4V, poluchennogo s ispolzovaniem tekhnologii posloynogo lazernogo splavleniya [Physical and mechanical properties of new bimetallic material based on unalloyed titanium and ti6al4v titanium alloy obtained by selective laser melting]. *Problemy prochnosti i plastichnosti [Problems of Strength and Plasticity]*. 2024. Vol. 86. No 3. P. 371–381 (In Russian).

5. Abashev D.R., Bondar V.S., Vorobyev I.A., Sharova V.I. Opredelenie uprugikh i prochnostnykh parametrov polimernykh kompozitsionnykh materialov i izgotovlennykh iz nikh tsilindricheskikh obolochek [Elastic and strength parameters determination of polymer composite materials and cylindrical shells]. *Problemy prochnosti i plastichnosti [Problems of Strength and Plasticity]*. 2024. Vol. 86. No 1. 2024. P. 47–59 (In Russian).

6. Filippov A.R. Metodika dinamicheskikh ispytaniy vysokoprochnykh kompozitov na rastyazhenie [Method of dynamic tensile testing of high strength fibers]. *Problemy prochnosti i plastichnosti [Problems of Strength and Plasticity]*. 2024. Vol. 86. No 1. 2024. P. 106–119 (In Russian).

7. Kharin N., Bolshakov P., Kuchumov A.G. Numerical and experimental study of a lattice structure for orthopedic applications. *Materials*. 2023. Vol. 16. Iss. 2. P. 744-1 – 744-13. <https://doi.org/10.3390/ma16020744>.

8. Gryaznov M.Yu., Shotin S.V., Chuvildeev V.N., Sysoev A.N., Piskunov A.V., Kotkov D.N., Semenycheva A.V., Sakharov N.V., Murashov A.A. Mekhanicheskie svoystva nelegirovannogo titana VT1-0, poluchennogo metodami posloynogo lazernogo splavleniya i intensivnoy plasticheskoy deformatsii [Mechanical properties of unalloyed titanium VT1-0 processed using selective laser melting and severe plastic deformation]. *Problemy prochnosti i plastichnosti [Problems of Strength and Plasticity]*. 2022. T. 84. No 4. P. 570–581 (In Russian).

9. Tsareva I.N., Berdnik O.B., Krivina L.A., Kuzmin V.I., Razov E.N. Struktura i prochnostnye svoystva plazmennogo pokrytiya, poluchennogo iz poroshkovogo materiala dioksida tsirkoniya, plakirovannogo nikelom [Structure and strength properties of plasma coating obtained from powdered material of zirconium dioxide clad with nickel]. *Problemy prochnosti i plastichnosti [Problems of Strength and Plasticity]*. 2022. Vol. 84. No3. P. 397–408 (In Russian).

10. Erofeev V.I., Ilyakhinskii A.V., Rodyushkin V.M., Ilyakhinskii I.A., Pichkov S.N., Khly-

bov A.A. Nerazrushayushchiy kontrol sostoyaniya materiala par treniya nasosov ustanovok VVER [Non-destructive testing of material condition friction steam of WWER Pumps]. *Problemy prochnosti i plastichnosti* [Problems of Strength and Plasticity]. 2022. Vol. 84. No 3. P. 376–385 (In Russian).

11. Almeida J., Castro S., Leão H., Pitangueira R. Exploring the influence of heterogeneity on determination of a RVE for concrete structures. *Proceedings of the XLV Ibero-Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering*. ABMEC Maceió, Alagoas. 11–14 Nov. 2024. P. 1–8. <https://doi.org/10.55592/cilamce.v6i06.10251>.

12. Voyiadjis G., Kattan P. Use of fabric tensors in damage and healing mechanics of materials. *Int. J. Damage Mech.* 2025. ICDM-4 Special Issues P. 1–49. <https://doi.org/10.1177/10567895251319408>.

13. Gerasimov O.V., Kharin N.V., Fedyanin A.O., Bolshakov P.V., Baltin M.E., Statsenko E.O., Fadeev F.O., Islamov R.R., Baltina T.V., Sachenkov O.A. Bone stress-strain state evaluation using CT based FEM. *Front. Mech. Eng.* 2021. Vol. 7. P. 1–8. <https://doi.org/10.3389/fmech.2021.688474>.

14. Alshoaibi A., Fageehi Y. Advances in finite element modeling of fatigue crack propagation. *Applied Sciences*. 2024. Vol. 14. Iss. 20. P. 9297–1–9297–20. <https://doi.org/10.3390/app14209297>.

15. Gerasimov O.V., Sharafutdinova K.R., Karaman V.S., Saleeva G.T., Sachenkov O.A. Otsenka napryazhennogo sostoyaniya pozvonochnykh stolbov sobak na osnove dannykh kompyuternoy tomografii [CT-based assessment of the stress state of dog spines]. *Rossiyskiy zhurnal biomekhaniki* [Russian Journal of Biomechanics]. 2024. Vol. 28. No 1. P. 40–53 (In Russian).

16. Hassani B., Hinton E. A review of homogenization and topology optimization I – homogenization theory for media with periodic structure. *Computers and Structures*. 1998. Vol. 69. Iss. 6. P. 707–717. [https://doi.org/10.1016/S0045-7949\(98\)00131-X](https://doi.org/10.1016/S0045-7949(98)00131-X).

17. Hassani B., Hinton E. A review of homogenization and topology optimization II – analytical and numerical solution of homogenization equations. *Computers and Structures*. 1998. Vol. 69. Iss. 6. P. 719–738. [https://doi.org/10.1016/S0045-7949\(98\)00132-1](https://doi.org/10.1016/S0045-7949(98)00132-1).

18. Bolshakov P., Kuchumov A.G., Kharin N., Akifyev K., Statsenko E., Silberschmidt V.V. Method of computational design for additive manufacturing of hip endoprosthesis based on basic-cell concept. *Int. J. Numer. Methods Biomed. Eng.* 2024. Vol. 40. Iss. 3. P. e3802–1 – e3802–23. <https://doi.org/10.1002/cnm.3802>.

19. Gerasimov O.V., Semenova E.V., Shakirova L.R., Baltina T.V., Berezhnoy D.V., Sachenkov O.A. Metod opredeleniya uprugikh svoystv elementa negomogennoy sredy na osnove dannykh kompyuternoy tomografii [CT-based method for determining the elastic properties of an inhomogeneous medium element]. *Rossiyskiy zhurnal biomekhaniki* [Russian Journal of Biomechanics]. 2024. Vol. 28. No 3. P. 47–59 (In Russian).

20. Andreassen E.A., Andreassen C.S. How to determine composite material properties using numerical homogenization. *Comput. Mater. Sci.* 2014. Vol. 83. P. 488–495. <https://doi.org/10.1016/j.commatsci.2013.09.006>.

21. Dong G., Tang Y., Zhao Y.F. A 149 line homogenization code for three-dimensional cellular materials written in MATLAB. *Journal of Engineering Materials and Technology*. 2019. Vol. 141. Iss. 1. P. 011005–1–011005–1 011005–24. <https://doi.org/10.1115/1.4040555>.

22. Park M., Venter M., Du Plessis A. Estimating mechanical properties of AM lattices using CT-scans and FE models. *Proceedings of the 13th South African Conference on Computational and Applied and Applied Mechanics*. Stellenbosch, South African Republic. 22–23 Jan. 2024. P. 238–252.

23. Klontzas M., Triantafyllou M., Vassalou E., Karantanas A. CT and CT Arthrography of the Shoulder. *ATI Lab*. 2025. P. 17–43. https://doi.org/10.1007/174_2024_557.

24. Gerasimov O.V., Berezhnoi D.V., Bolshakov P.V., Statsenko E.O., Sachenkov O.A. Postroenie mekhanicheskoy modeli elementov geterogennoy sredy na osnove chislenno-tsifrovogo algoritma obrabotki dannykh kompyuternoy tomografii [Mechanical model of a heterogeneous continuum based on numerical-digital algorithm processing computer tomography data]. *Rossiyskiy zhurnal biomekhaniki* [Russian Journal of Biomechanics]. 2019. Vol. 23. No 1. P. 104–116 (In Russian).

25. Al-Jamal A., Barsoum I., Abu Al-Rub R. Defect-sensitivity of stochastic and periodic minimal surface titanium cellular materials. *Int. J. Mech. Sci.* 2025. Vol. 289. Article No 110063. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2025.110063>.

26. Gerasimov O.V., Rakhmatulin R.R., Baltina T.V., Sachenkov O.A. Opredelenie napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya kostey po dannym kompyuternoy tomografii [Determination of the bones stress-strain state by the computer tomography data]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Mashinostroyeniye* [BMSTU Journal of Mechanical Engineering]. 2023. Vol. 8. No 761. P. 3–15 (In Russian).

DEVELOPMENT OF A NUMERICAL HOMOGENIZATION ALGORITHM BASED ON THE FINITE ELEMENT METHOD USING DIGITAL TWIN DATA*

Semenova E.V., Smirnova V.V., Berezhnoy D.V., Gerasimov O.V.

Kazan (Volga Region) Federal University, Kazan, Russian Federation

valeriy.karasikov@gmail.com

Received by the Editor 2025/04/10

Modern approaches to material production highlight the need to determine their mechanical characteristics. In this context, methods utilizing data from digital twins obtained through non-destructive testing have become widespread. The paper examines a numerical homogenization method that accounts for the structural distribution of material within an element of a non-homogeneous medium based on computed tomography data using the finite element method. A distinctive feature of this approach is the construction of a mesh where each finite element considers the local heterogeneous distribution of the material in the computational domain. The application of this approach to a set of test problems demonstrated rapid convergence with direct modeling, as well as improved computation time due to the reduction in system dimensionality. The analysis of the results included an assessment of how the discretization level of the numerical model affects both the accuracy and duration of calculations. It was found that for samples with a uniform material distribution, the error of the results relative to analytical calculation methods does not exceed 3%. For samples with an inhomogeneous structure, deviations did not exceed 12.5%, largely due to the sensitivity of the direct modeling method to the choice of boundary conditions. The application of the developed method for determining the effective mechanical parameters of an element of an inhomogeneous medium based on its digital twin enables the attainment of reliable results with optimal computation time.

Keywords: numerical homogenization, digital twin, computed tomography, finite element method.

*The research was supported by the Russian Science Foundation (grant No 25-21-00434).