УДК 620.178.3, 629.735, 62-192 DOI: 10.32326/1814-9146-2025-87-3-328-340

ОЦЕНКА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПРЕДЕЛА ВЫНОСЛИВОСТИ МЕТОДАМИ СТАТИСТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ УСТАЛОСТНЫХ ИСПЫТАНИЙ. ЧАСТЬ 1

Агамиров Л.В.[1,2,3], **Агамиров В.Л.**[1,3], **Вестяк В.А.**[1], **Тутова Н.В.**[3]

[1]*Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Российская Федерация*
[2]*Национальный исследовательский университет «МЭИ», Москва, Российская Федерация*
[3]*Московский технический университет связи и информатики (МТУСИ), Москва, Российская Федерация*

itno_agamirov@mail.ru

Поступила в редакцию 04.05.2025

Проведена оценка пределов выносливости при различных методах усталостных испытаний: в полномасштабном эксперименте на нескольких уровнях амплитуд переменных напряжений; в методах, связанных с оценкой параметров уравнения подобия усталостного разрушения; в испытаниях, проводимых форсированным методом «вверх-вниз». Каждый из этих методов имеет ряд особенностей, определяющих основную цель: последующее статистическое моделирование усталостных испытаний. Для построения модели непараметрического моделирования анализируются усталостные испытания алюминиевых, магниевых, титановых сплавов и легированных сталей различной формы и размеров с разной степенью концентрации напряжений, что необходимо для генерации контрастных значений параметров подобия усталостного разрушения.

Методика комбинированного статистического моделирования с элементами «бутстреп»-оценок и метода Монте-Карло имеет целью генерацию непараметрической функции распределения предела выносливости большого размера. Результаты статистического моделирования могут быть использованы как для оценки статистических ошибок пределов выносливости, доверительных интервалов для этой справочной характеристики, так и для сравнительной оценки различных групп испытаний с помощью соответствующего статистического критерия проверки гипотез. В качестве такого критерия рассматривается биномиальный критерий или критерий знаков. Использована концепция обобщенной относительной кривой усталости, заключающейся в устойчивой стабильности параметров кривой усталости, отнесенных к пределу выносливости для некоторой базовой долговечности, составляющей обычно 10^7 или 10^6 циклов. Эта концепция существенно повышает общий объем и информативность экспериментального материала, что особенно актуально на стадии проектирования авиационной техники, транспортных и машиностроительных конструкций, работающих в условиях переменных во времени напряжений и деформаций.

Ключевые слова: усталостные испытания, предел выносливости, критерий подобия усталостного разрушения, «бутстреп»-моделирование, метод Монте-Карло, критерии проверки статистических гипотез.

Введение

Для надежного обоснования ресурса машин и конструкций, эксплуатируемых под действием переменных во времени напряжений, необходима, в том числе, правильная организация системы усталостных испытаний материалов, конструктивно подобных образцов, элементов конструкций и натурных изделий [1–14]. В зависимости от целей исследований применяются различные методы усталостных испытаний. При наличии достаточно большого объема объектов испытаний и отсутствии значительных временны́х ограничений проводят полноценные испытания на нескольких уровнях амплитуд переменных напряжений для обоснований кривой усталости в широком диапазоне долговечностей до разрушения или до образования усталостных трещин [2, 3, 13–15]. Получение надежно обоснованной (базовой) кривой усталости является идеальным случаем, позволяющим прогнозировать расчетные характеристики выносливости, такие как предел выносливости, осуществлять расчет долговечности при действии немонотонного спектра нагружения, существенно упростить оценку характеристик сопротивления усталости натурной детали и многое другое.

Повышению эффективности исследований усталостных свойств ответственных изделий авиационной техники, транспортных и машиностроительных конструкций способствуют расчетно-экспериментальные методы оценки характеристик сопротивления усталостному разрешению. К числу таких методов следует отнести теорию подобия усталостного разрушения В.П. Когаева [16, 17], концепцию обобщенной кривой усталости М.Н. Степнова, Е.В. Гиацинтова [1], теорию слабого звена В.А. Вейбулла [15], теорию усталостного разрушения Н.Н. Афанасьева [18] и другие.

Во всех случаях главной проблемой с точки зрения статистического анализа результатов усталостных испытаний является то, что предел выносливости невозможно непосредственно измерить (в отличие, например, от временного сопротивления, предела текучести и других справочных характеристик механических свойств материалов), он может быть определен лишь косвенно, например путем экстраполяции (или интерполяции) по кривой усталости. Поэтому методы статистического анализа по отношению к этой важной справочной характеристике, строго говоря, неприемлемы, особенно в части проверки статистических гипотез, которые имеют дело, как правило, с прямыми измерениями случайных величин. Кроме того, вероятностные распределения предела выносливости не обладают надежностью в силу ограниченности размеров выборок даже при наличии кривых усталости, так как испытывать на каждом уровне нагрузки более 5–10 образцов не всегда возможно по причинам, которые отмечены выше. В этих условиях представляется целесообразным разработать и применять на практике непараметрические методы анализа в совокупности с методами статистического моделирования, которые позволяют не выходить за рамки реализованных пусть даже в ограниченном эксперименте результатов наблюдений.

Целью настоящей статьи является разработка и анализ непараметрических методов оценки распределения пределов выносливости с применением статистического моделирования.

1. Расчетно-экспериментальная оценка предела выносливости

1.1. Оценка параметров кривой усталости методом наименьших квадратов. Задача оценки параметров кривой усталости представляет собой стандартную задачу регрессионного анализа с одним факторным признаком, в роли которого выступает амплитуда цикла переменного напряжения. При этом план испытаний сопровождается неравномерным дублированием опытов, что вызывает необходимость применения взвешенного метода наименьших квадратов (МНК). Формы уравнений кривой усталости подробно описаны в литературе [1–3, 13, 14]. Число параметров уравнения кривой усталости обычно не превышает двух-трех. Рассмотрим упрощенный вариант МНК для двухпараметрической линейной модели вида:

$$y = a + b(x - \bar{x}), \tag{1}$$

где y – вектор наблюдений (зависимая случайная величина), x – вектор факторов (независимая случайная величина). Отметим, что в этом случае распределение случайной величины y предполагается асимптотически нормальным. Относительно распределения независимой случайной величины x никаких предположений не делается. МНК заключается в минимизации «взвешенной» скалярной суммы квадратов:

$$Q = \sum_{i=1}^{m} n_i \omega_i [y_i - a - b(x_i - \bar{x})]^2 \to \min, \tag{2}$$

где $\bar{x} = \sum_{i=1}^{m} n_i \omega_i x_i / \sum_{i=1}^{m} n_i \omega_i$, $\omega_i = 1/S_{y_i}^2$, n_i – объем испытаний на уровне x_i; $S_{y_i}^2$ – дисперсия y на уровне x_i; m – количество уровней x_i.

Оценки параметров (дуга сверху) равенства (1) определяются из соотношений:

$$\frac{\partial Q}{\partial a} = -2\sum_{i=1}^{m} n_i \omega_i [y_i - a - b(x_i - \bar{x})] = 0, \quad \widehat{a} = \frac{\sum_{i=1}^{m} n_i \omega_i y_i}{\sum_{i=1}^{m} n_i \omega_i}, \tag{3}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial b} = -2\sum_{i=1}^{m} n_i \omega_i [y_i - a - b(x_i - \bar{x})](x_i - \bar{x}) = 0, \quad \widehat{b} = \frac{\sum_{i=1}^{m} n_i \omega_i y_i (x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^{m} n_i \omega_i (x_i - \bar{x})^2}. \tag{4}$$

Вторые производные определяют информационную матрицу Фишера:

$$\mu = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 Q}{\partial a^2} & \dfrac{\partial^2 Q}{\partial a \partial b} \\ \dfrac{\partial^2 Q}{\partial b \partial a} & \dfrac{\partial^2 Q}{\partial b^2} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{m} n_i \omega_i & 0 \\ 0 & \sum_{i=1}^{m} n_i \omega_i (x_i - \bar{x})^2 \end{vmatrix}.$$

Элементы обратной матрицы μ^{-1} определяют дисперсии оценок параметров:

$$D\{\widehat{a}\} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{m} n_i \omega_i}, \quad D\{\widehat{b}\} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{m} n_i \omega_i (x_i - \bar{x})^2}.$$

Нижняя l, верхняя u доверительные границы для линии регрессии (1) имеют вид:

$$y_{l,u} = \widehat{y} + t_{\beta, 1-\beta, n-2} D^{0,5}\{\widehat{y}\},$$

$$D\{\widehat{y}\} = D\{\widehat{a}\} + D\{\widehat{b}\}(x - \bar{x})^2 = \frac{1}{\sum_{i=1}^{m} n_i \omega_i} + \frac{(x - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{m} n_i \omega_i (x_i - \bar{x})^2}$$

– дисперсия вектора $\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}(x - \bar{x})$, соответствующая заданным значениям вектора x; $t_{\beta,\,1-\beta,\,n-2}$ – квантиль распределения Стьюдента уровня β или $1 - \beta$ для числа степеней свободы $f = n - 2$, где $n = \sum_{i=1}^{m} n_i$ – общий объем испытаний, β – доверительная вероятность (обычно $\beta = 0{,}95$).

Для оценки параметров квантильной кривой усталости (то есть кривой усталости равной вероятности) при нормальном распределении y_i во все уравнения вместо y_i следует подставлять квантиль $y_{pi} = y_i + z_p S_{y_i}$, а вместо весовой функции ω_i – обратную величину приближенной оценки дисперсии квантиля:

$$\omega_i = \frac{1}{S_{y_i}^2\left(1 + 0{,}5 z_p^2\right)}.$$

Параметры уравнения заменяются их оценками. Если распределение зависимой случайной величины y_i не известно или отличается от нормального закона, в уравнения (3), (4) следует подставлять медиану эмпирического распределения y_i.

Для уравнения кривой усталости, обоснованного для большой группы алюминиевых, магниевых литых и деформируемых сплавов [1],

$$\sigma_a = \sigma_{-1} + A(\lg N)^{-\alpha} \qquad (5)$$

возможны следующие варианты линеаризации для приведения к схеме рассмотренной линейной модели:

$$x = \ln(\sigma_a - \sigma_{-1}), \quad y = \ln \lg N, \quad b = -1/\alpha, \quad A = \exp\,(\bar{x} - a/b)$$

или

$$x = \sigma_a, \quad y = (\lg N)^{-\alpha}, \quad b = 1/A, \quad \sigma_{-1} = \bar{x} - a/b,$$

где N – количество циклов до разрушения.

Для уравнения кривой усталости, применяющегося для сталей [15],

$$\sigma_a = \sigma_{-1} + B \cdot N^{-\beta} \qquad (6)$$

соответствующие преобразования для приведения к схеме рассмотренной линейной модели имеют вид:

$$x = \ln\,(\sigma_a - \sigma_{-1}), \quad y = \ln\, N, \quad b = -1/\beta, \quad B = \exp\,(\bar{x} - a/b).$$

Степенная форма кривой усталости

$$\sigma_a = C\,(N)^{-m} \qquad (7)$$

является частным случаем соотношения (6). Параметр σ_{-1} является по сути пределом неограниченной выносливости. Геометрически – это асимптота, к которой стремится кривая усталости при $N \to \infty$. Определять этот параметр рекомендуется последовательными приближениями величины σ_{-1} в диапазоне от 0 до минимального значения амплитуды напряжения цикла, реализованного в эксперименте, минимизируя остаточную дисперсию Q (2). При этом $(\sigma_a - \sigma_{-1})$ должно оставаться больше нуля. Для легких сплавов величина предела неограниченной выносливости σ_{-1} [1] находится в диапазоне $(0{,}45–0{,}5)\sigma_{10^7}$, $\sigma_{10^7} = \sigma_a$ при $N = 10^7$. Для натурных изделий этот параметр обычно равен нулю в соответствии со степенной формой кривой усталости (7).

Фактор x представляет собой амплитуду напряжения цикла σ_a или некоторую функцию (например, логарифм) от этой величины для приведения уравнения кривой усталости к базовой форме (1), например $x = \ln(\sigma_a - \sigma_{-1})$ для уравнения (5) или $x = \ln \sigma_a$ для формулы (6). При равных выборочных дисперсиях $S_{y_i}^2 = \text{const}$ весовая функция $\omega_i = 1$ для всех i. При малых размерах выборки $n_i = 1, 2, 3$ также следует принимать $\omega_i = 1$ для всех i.

Дисперсия случайной величины $y = \ln \lg N$ на основе теоремы о дисперсии функции случайной величины в первом приближении определяется из соотношения

$$S_y^2 \approx \left[\frac{\partial(\ln \lg N)}{\partial \lg N}\right]^2 S_{\lg N}^2 = \frac{S_{\lg N}^2}{(\lg \overline{N})^2}, \tag{8}$$

где $S_{\lg \overline{N}}^2$ – выборочная дисперсия логарифма долговечности, определяемая на каждом уровне амплитуды напряжения цикла; $\lg \overline{N}$ – выборочное среднее значение логарифма долговечности на данном уровне амплитуды.

Примеры представления результатов усталостных испытаний для оценки предела выносливости, параметров уравнения кривой усталости и последующего статистического моделирования для гладких образцов диаметром 8 мм титанового сплава ВТ3-1 представлены в таблицах 1, 2 [19].

Таблица 1

Логарифмы долговечности $\lg N$ гладких образцов при изгибе с вращением $\alpha_\sigma = 1{,}0$ (теоретический коэффициент концентрации напряжений)

№	$\sigma_a = 550$ МПа	$\sigma_a = 500$ МПа	$\sigma_a = 450$ МПа	$\sigma_a = 400$ МПа
1	4,637	5,002	5,369	6,114
2	4,77	5,038	5,599	6,336
3	4,783	5,073	5,618	6,621
4	4,809	5,079	5,629	6,851
5	4,845	5,192	5,803	6,911
6	4,921	5,298	5,829	7,368
7	5,137	5,482	5,903	7,454
8	5,164	5,51	6,078	
9	5,459	5,63	6,343	
10		5,653	6,445	
11		5,739	6,633	
12		5,985	6,77	
13		6,224	7,103	
14		6,373	7,211	
15		6,48	7,232	
16		6,762	7,441	
17		6,935	7,454	
18		7,414	7,632	
n	9	18	18	7
$\lg \overline{N}$	**4,94722**	**5,82606**	**6,44956**	**6,80786**
$S_{\lg N}$	**0,25734**	**0,7251**	**0,75352**	**0,49712**

Таблица 2

Логарифмы долговечности $\lg N$ образцов с кольцевым надрезом при изгибе с вращением $\alpha_\sigma = 1{,}4$

№	σ_a = 550 МПа	σ_a = 450 МПа	σ_a = 400 МПа	σ_a = 350 МПа	σ_a = 310 МПа
1	3,968	4,659	4,486	5,445	5,384
2	4,342	4,736	5,34	6,073	6,072
3	4,375	4,761	5,437	6,392	6,541
4	4,436	4,79	5,476	6,42	6,549
5	4,484	4,878	5,536	6,549	6,575
6		5,039	5,659	6,591	6,666
7		5,085	5,944	6,652	6,981
8		5,109	6,568	6,901	7,832
9		5,304	6,63	6,933	7,88
10		5,514	6,653	7,079	7,883
11				7,16	7,906
12				7,167	7,945
13				7,202	7,989
14				7,58	
n	5	10	10	14	13
$\lg \overline{N}$	**4,321**	**4,9875**	**5,7729**	**6,72457**	**7,09254**
$S_{\lg N}$	**0,20479**	**0,27442**	**0,68995**	**0,54522**	**0,86633**

1.2. Оценка предела выносливости на базе критерия подобия усталостного разрушения. Основное уравнение теории подобия усталостного разрушения В.П. Когаева имеет вид:

$$\lg(\xi - 1) = \nu_\sigma\left(\lg\left(L/\overline{G}\right)_0 - \lg\left(L/\overline{G}\right)\right) + z_p s, \qquad (9)$$

где $\xi = \sigma_{\max}/u$; $\sigma_{\max} = \alpha_\sigma \sigma_{-1d}$ – максимальное значение первого главного напряжения в зоне концентрации, соответствующее пределу выносливости детали σ_{-1d}; α_σ – теоретический коэффициент концентрации напряжений; $u = 0{,}5\sigma_{-1}$ – значение предела выносливости гладкого круглого бруса бесконечно большого диаметра при изгибе с вращением, определяющего нижнюю границу повреждающих напряжений; z_p – квантиль нормированного нормального распределения уровня вероятности P; s – среднее квадратичное отклонение случайной величины $y = \lg(\xi - 1)$; L – часть периметра поперечного сечения, в котором действуют максимальные напряжения; $\overline{G}$ – относительный максимальный градиент первого главного напряжения в зоне концентрации напряжений; $\lg\left(L/\overline{G}\right)_0$ – параметр подобия образца стандартного размера. Так, например, при изгибе с вращением для круглого гладкого образца диаметром d $L = \pi d$, $\overline{G} = G/\sigma_{\max} = 2/\rho + 2/d$ [16], где ρ – радиус кривизны для образцов с корсетной рабочей частью, ρ и d задаются в миллиметрах. Например, для образцов без корсетной рабочей части ($\rho = \infty$) $d = 7{,}5$ мм, $\lg\left(L/\overline{G}\right)_0 = 1{,}946$. Это значение параметра подобия используется в [16, 17, 20, 21]. Для образцов с корсетной частью $\rho = 40$ мм, $d = 8$ мм, $\lg\left(L/\overline{G}\right)_0 = 1{,}923$.

Параметр $L/\overline{G}$ называется критерием подобия усталостного разрушения, а уравнение (9) – уравнением подобия, так как если деталь и модель имеют различные абсолютные и относительные размеры, но имеют одинаковые значения параметра подобия, то функции их распределения совпадают. Эта закономерность, справедливость которой подтверждается многими экспериментами, имеет большое практическое значение, так как она дает возможность находить в первом приближении функции распределения натурных деталей на основе испытаний образцов и моделей. В статьях [22, 23] обосновано уравнение подобия на основе распределения Вейбулла:

$$\lg(\xi - 1) = \nu_\sigma [\lg (L/\overline{G})_0 - \lg (L/\overline{G}) + w_p], \tag{10}$$

где $w_p = \lg \ln [1/(1-P)] - \lg \ln 2$, получающегося из условия $w_p = 0$ при $P = 0{,}5$.

Параметр ν_σ существенно зависит от базовой долговечности. В первом приближении, в диапазоне долговечностей 10^6–$5 \cdot 10^7$, этот параметр определяется соотношением:

$$\nu_{\sigma N} = \nu_\sigma \cdot \sigma_{-1N} / \sigma_{-1}, \tag{11}$$

где индексом N обозначены характеристики для текущей долговечности, а σ_{-1} соответствует пределу выносливости для базовой долговечности, для которой определяется ν_σ (обычно в качестве такой долговечности принимается база $N_0 = 10^6$ или 10^7 циклов). Таким образом, для построения кривой усталости натурной детали необходимо располагать параметрами медианной кривой усталости гладких лабораторных образцов и справочным значением параметра ν_σ. Тогда функция распределения предела выносливости натурной детали будет иметь вид:

$$\sigma_{-1d} = \frac{0{,}5\sigma_{-1N}}{\alpha_\sigma} \left[1 + 10^{\nu_{\sigma N}(1{,}946 - \lg (L/\overline{G}) + w_p)}\right]. \tag{12}$$

В формуле (12) σ_{-1N} определяется по уравнениям кривой усталости (5), (6).

В таблицах 3, 4 представлены результаты расчетов параметров уравнения подобия усталостного разрушения и расчетные значения пределов выносливости для алюминиевых, магниевых, титановых сплавов и легированных сталей [1, 19–24].

Таблица 3

Параметры уравнения подобия усталостного разрушения и пределы выносливости легких сплавов

Сплав	α_σ	$\lg (L/\overline{G})$	Пределы выносливости σ_a, МПа			
			$\lg N = 5$	$\lg N = 6$	$\lg N = 7$	$\lg N = 7{,}7$
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
АВ	1,00	1,923	250	176	135	115
	1,00	3,6	207	136	112	95
	1,00	3,224	235	161	122	104
	1,00	2,5026	247	167	130	110
	1,45	1,266	260	190	140	119
	1,86	0,98	274	200	148	126
	2,27	0,7718	287	214	155	132
		$\nu_{\sigma N}$	0,0813	0,1195	0,0889	0,0901
МЛ5	1,00	1,923	146	93	74	58
	1,00	2,26	121	82	67	54
	1,57	1,578	144	108	80	64
	1,87	1,379	170	123	94	75
	2,28	1,1702	194	144	108	86
		$\nu_{\sigma N}$	0,2644	0,4027	0,3364	0,3468

Таблица 3 (*продолжение*)

1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
ВМ65-1	1,00	1,923	178	128	113	102
	1,00	2,26	169	123	109	99
	1,57	1,578	178	130	115	105
	1,87	1,379	188	145	121	110
	2,28	1,1702	195	158	126	115
		$\nu_{\sigma N}$	0,0894	0,1806	0,1050	0,1151
ВТ3-1	1,00	1,946	550	473	409	374
	1,90	2,44	526	450	395	367
	1,40	1,23	654	528	444	400
	2,36	0,74	711	551	457	412
		$\nu_{\sigma N}$	0,1631	0,1068	0,0790	0,0658

Таблица 4

Параметры уравнения подобия усталостного разрушения и пределы выносливости легированных сталей

Сплав	α_σ	$\lg (L/\bar{G})$	Пределы выносливости σ_a, МПа			
			$\lg N = 4{,}6$	$\lg N = 5$	$\lg N = 6$	$\lg N = 6{,}7$
12Х2НФА	1	1,946	788	718	600	592
	1	1,9055	794	715	596	595
	1,5	1,23248	913	816	623	585
	2	0,90633	976	846	670	606
	2,6	0,652247	1060	861	619	618
		$\nu_{\sigma N}$	0,1705	0,1227	0,0465	0,0187
30ХГСА	1	1,946	602	552	490	466
	1	1,9055	603	555	490	470
	1,5	1,23248	810	686	540	488
	2	0,90633	850	736	510	514
	2,6	0,652247	996	806	567	524
		$\nu_{\sigma N}$	0,2770	0,2205	0,0755	0,0728
45ХН2МФА	1	1,946	882	784	680	670
	1	1,9055	875	784	683	658
	1,5	1,23248	1030	882	735	751
	2	0,90633	1040	910	752	756
	2,6	0,652247	1080	944	790	734
		$\nu_{\sigma N}$	0,1335	0,1186	0,0891	0,0820

2. Статистическое моделирование усталостных испытаний

2.1. Статистическое моделирование распределения предела выносливости при построении кривой усталости. Моделирование осуществляется в соответствии с реальными данными усталостных испытаний. В таблицах 1, 2 представлены подобные данные на примере усталостных испытаний гладких образцов диаметром 8 мм и образцов с кольцевым надрезом ($\alpha_\sigma = 1{,}4$) титанового сплава ВТ3-1 при изгибе с вращением.

Основные этапы моделирования следующие:

1. Ввод исходных данных в соответствии с результатами усталостных испытаний (таблицы 1, 2).

2. Генерация на каждом уровне амплитуды напряжения случайных чисел k_{ij}, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n_i}$, и формирование «бутстреп»-выборки [25, 26] из опытных значений логарифмов долговечностей $\lg N(k_{i,j})$, m – количество уровней амплитуд, n_i – объем испытаний на i-м уровне.

3. Вычисление выборочных средних (или медиан) и дисперсий логарифмов долговечностей на i-м уровне амплитуды напряжения.

4. Оценка параметров кривой усталости в соответствии с методикой, описанной выше.

5. Оценка пределов ограниченной выносливости, соответствующих базовым долговечностям, например $\lg N_b = 5$; 5,5; 6, 6,5; 7. Для кривой усталости (5) $\sigma_{ab} = \sigma_{-1} + A(\lg N_b)^{-\alpha}$.

6. Повторение пунктов 2–5 M раз (значение M может колебаться в диапазоне 500–10000) и формирование случайной функции распределения предела выносливости для каждого базового значения долговечности.

Программа моделирования на языке C++ представлена в репозитарии авторов (https://github.com/AVL095/fatigue_tests_1). Полученная функция распределения предела выносливости может использоваться в различных целях: например, для оценки случайной ошибки определения этой характеристики, построения доверительных интервалов, сравнительной статистической оценки двух групп усталостных испытаний.

2.2. Статистическое моделирование предела выносливости на базе критерия подобия усталостного разрушения. Статистическое моделирование методом Монте-Карло с целью последующего сравнительного анализа конкурирующих кривых усталости заключается в генерации равномерно распределенных случайных чисел в диапазоне от 0 до 1 (вектор w_p) и формировании случайного вектора σ_{-1d} по формуле (12). Исходные данные для моделирования определяются экспериментальным или расчетным путем. В качестве примера таких данных в таблицах 3, 4 представлены результаты обработки усталостных испытаний алюминиевых, магниевых, титановых сплавов и легированных сталей различного типоразмера, необходимого для функционирования модели. Программа статистического моделирования с последующим парным сравнением кривых усталости представлена в репозитарии https://github.com/AVL095/fatigue_tests_2.

В дальнейшем предполагается рассмотреть методику сравнительной попарной оценки нескольких групп усталостных испытаний на базе статистического моделирования и биномиального критерия.

Заключение

Разработаны методы оценки пределов выносливости при построении кривых усталости, параметров уравнения подобия усталостного разрушения с целью последующего статистического моделирования усталостных испытаний.

Проведен анализ результатов усталостных испытаний литых и деформируемых алюминиевых, магниевых, титановых сплавов и легированных сталей, необходимый для построения моделей «бутстреп»-моделирования и метода Монте-Карло. Анализу подвергались образцы различного типоразмера разной степени концентрации напряжений для получения контрастных значений параметра подобия усталостного разрушения.

Разработана методика комбинированного статистического моделирования при построении кривых усталости на базе критерия подобия усталостного разрушения с элементами «бутстреп»-оценок и метода Монте-Карло, позволяющая обосновать непараметрическую функцию распределения предела выносливости, которая может быть использована для оценки случайной ошибки определения предела выносливости, построения доверительных интервалов и других характеристик распределения.

Список литературы

1. Степнов М.Н., Гиацинтов Е.В. *Усталость легких конструкционных сплавов*. М.: Машиностроение, 1973. 317 с.

2. *Расчеты и испытания на прочность. Методы расчета характеристик сопротивления усталости. Межгосударственный стандарт. ГОСТ 25.504-82.* 1983. С. 78–132.

3. *Расчеты и испытания на прочность в машиностроении. Планирование и статистическая обработка результатов статических испытаний и испытаний на усталость. РД 50-705-91.* М.: Издательство стандартов, 1992. 167 с.

4. Boyer H.E. *Atlas of Stress-Strain Curves.* ASM International, 2002. 816 p.

5. Correia J., Calvente M., Blasón S. et al. Fatigue life prediction of notched details made of puddle iron based on variable fatigue strength reduction factors concept. *International Symposium on Notch Fracture* (*ISNF*). Santander (Cantabria, Spain), 29–31 March. 2017. P. 1–6.

6. Mirza O., Milner L., Mashiri F. Experimental investigation of retrofitting techniques for steel bridge girders subject to fatigue failure. *Journal of Steel Structures & Construction*. 2018. Vol. 4. Iss. 1. P. 1–8. DOI: 10.4172/2472-0437.1000138.

7. Bandara C., Siriwardane S., Dissanayake U.I., Dissanayake R. Full range S-N curves for fatigue life evaluation of steels using hardness measurements. *International Journal of Fatigue*. 2015. Vol. 82. Pt. 2. P. 325–331. https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2015.03.021.

8. Lyamkin V., Starke P., Boller C. Cyclic indentation as an alternative to classic fatigue evaluation. *7th International Symposium on Aircraft Materials* (*ACMA* 2018). Compiegne, France. 24–26 April, 2018. P. 1–7.

9. Strzelecki P., Sempruch J. Experimental method for plotting S-N curve with a small number of specimens. *Polish Maritime Research.* 2016. Vol. 23. Iss. 4. P. 129–137. https://doi.org/10.1515/pomr-2016-0079.

10. Goedel F., Pravia Z.M.C., Gustavo P.M. Methodology for assessment of statistical planning effects on the S-N curve determination using Monte Carlo simulations. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*. 2018. Vol. 42. Iss. 4. P. 871–882. https://doi.org/10.1111/ffe.12957.

11. Bandara C.S., Siriwardane S.C., Dissanayake U.I., Dissanayake R. Developing a full range S-N curve and estimating cumulative fatigue damage of steel elements. *Computational Materials Science*. 2015. Vol. 96. Pt. A. P. 96–101. https://doi.org/10.1016/j.commatsci.2014.09.009.

12. ASTM E739 2015. Standard practice for statistical analysis of linear or linearized stress-life (S-N) and strain-life (e-N) fatigue data. *American Society for Testing and Materials*. 2015. 7 p.

13. Агамиров Л.В. *Методы статистического анализа механических испытаний*. М.: Интермет Инжиниринг, 2004. 128 с.

14. Агамиров Л.В., Вестяк В.А. *Вероятностные методы расчета показателей надежности авиационных конструкций при переменных нагрузках.* М.: Изд-во МАИ, 2022. 256 с.

15. Weibull W.A. A *Statistical Theory of the Strength of Materials*. Stockholm, Sweden: Generalstabens litografiska anstalts föörlag, 1939. 45 p.

16. Когаев В.П. *Расчеты на прочность при напряжениях, переменных во времени.* М.: Машиностроение, 1977. 232 с.

17. Когаев В.П. *Расчет деталей машин на прочность при многоцикловом нагружении.* М.: Машиностроение, 1985. 64 с.

18. Афанасьев Н.Н. *Статистическая теория усталостной прочности металлов*. Киев: Изд-во АН УССР, 1953. 128 с.

19. Степнов М.Н., Агамиров Л.В. О статистических закономерностях сопротивления усталости титанового сплава ВТ3-1. *Заводская лаборатория*. 1980. №1. 30 с.

20. Когаев В.П. Зависимость параметров уравнения подобия усталостного разрушения от числа циклов для легированных сталей. *Проблемы машиностроения и автоматизации*. 1988. №22. С. 72–87.

21. Когаев В.П., Гусенков А.П., Алимов М.А., Марцинкевич А.Ю. Расчет статистических характеристик сопротивления усталости деталей из легированных сталей. *Заводская лаборатория*. 1989. Т. 55. №4. С. 92–98.

22. Агамиров Л.В., Вестяк В.А. Статистическое оценивание сопротивления усталости деталей на базе теории подобия усталостного разрушения. *Изв. РАН. МТТ*. 2020. №3. С. 104–113. DOI: 10.31857/S0572329920030022.

23. Агамиров Л.В. Расчетное обоснование кривой усталости элементов конструкций на базе критерия подобия усталостного разрушения. *Вестник машиностроения*. 2000. №11. С. 27–31.

24. Степнов М.Н., Фертман А.М., Агамиров Л.В., Гиацинтов Е.В. Оценка параметров уравнения подобия усталостного разрушения титанового сплава ВТ3-1. *Машиноведение*. 1989. №4. С. 19–22.

25. Davison A.C., Hinkley D.V. *Bootstrap Methods and their Application.* Cambridge: Cambridge University Press, 2006. 592 p.

26. Davison R.A., Kuonen D. An introduction to the bootstrap with applications in R. *Statistical Computing and Statistical Graphics Newsletter*. 2002. Vol. 13. Iss. 1. P. 6–11.

References

1. Stepnov M.N., Giatsintov E.V. *Ustalost legkikh konstruktsionnykh splavov* [*Fatigue of Light Structural Alloys*]. Moscow. Mashinostroenie Publ. 1973. 317 p. (In Russian).

2. *Raschety i ispytaniya na prochnost. Metody rascheta kharakteristik soprotivleniya ustalosti* [*Strength calculation and testing. Methods of fatigue strength behaviour calculation*]. Mezhgosudarstvennyy standart. GOST 25.504-82. 1983. P. 78–132 (In Russian).

3. *Raschety i ispytaniya na prochnost v mashinostroenii. Planirovanie i statisticheskaya obrabotka rezultatov staticheskikh ispytaniy i ispytaniy na ustalost. RD 50-705-91* [*Calculations and Tests for Strength in Mechanical Engineering. Planning and Statistical Processing of Static and Fatigue Test Results. Methodical instructions. RD 50-705-91*]. Moscow. Izdatelstvo standartov. 1992. 167 p. (In Russian).

4. Boyer H.E. *Atlas of Stress-Strain Curves*. ASM International. 2002. 816 p.

5. Correia J., Calvente M., Blasón S. et al. Fatigue life prediction of notched details made of puddle iron based on variable fatigue strength reduction factors concept. *International Symposium on Notch Fracture* (*ISNF*). Santander (Cantabria, Spain), 29–31 March 2017. P. 1–6.

6. Mirza O., Milner L., Mashiri F. Experimental investigation of retrofitting techniques for steel bridge girders subject to fatigue failure. *Journal of Steel Structures & Construction.* 2018. Vol. 4. Iss. 1. P. 1–8. DOI: 10.4172/2472-0437.1000138.

7. Bandara C., Siriwardane S., Dissanayake U.I., Dissanayake R. Full range S-N curves for fatigue life evaluation of steels using hardness measurements. *Int. J. Fatigue*. 2015. Vol. 82. Pt. 2. P. 325–331. https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2015.03.021.

8. Lyamkin V., Starke P., Boller C. Cyclic indentation as an alternative to classic fatigue evaluation. *7th International Symposium on Aircraft Materials* (*ACMA* 2018). Compiegne, France. 24–26 April 2018. P. 1–7.

9. Strzelecki P., Sempruch J. Experimental method for plotting S-N curve with a small number of specimens. *Polish Maritime Research*. 2016. Vol. 23. Iss. 4. P. 129–137. https://doi.org/10.1515/pomr-2016-0079.

10. Goedel F., Pravia Z.M.C., Gustavo P.M. Methodology for assessment of statistical planning effects on the S-N curve determination using Monte Carlo simulations. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*. 2018. Vol. 42. Iss. 4. P. 871–882. https://doi.org/10.1111/ffe.12957.

11. Bandara C.S., Siriwardane S.C., Dissanayake U.I., Dissanayake R. Developing a full range S-N curve and estimating cumulative fatigue damage of steel elements. *Comp. Mater. Sci.* 2015. Vol. 96. Pt. A. P. 96–101. https://doi.org/10.1016/j.commatsci.2014.09.009.

12. ASTM E739 2015. Standard practice for statistical analysis of linear or linearized stress-life (S-N) and strain-life (e-N) fatigue data. *American Society for Testing and Materials*. 2015. 7 p.

13. Agamirov L.V. *Metody statisticheskogo analiza mekhanicheskikh ispytaniy* [*Methods of Statistical Analysis of Mechanical Tests*]. Moscow. Intermet Inzhiniring Publ. 2004. 128 p. (In Russian).

14. Agamirov L.V., Vestyak V.A. *Veroyatnostnye metody rascheta pokazateley nadezhnosti aviatsionnykh konstruktsiy pri peremennykh nagruzkakh* [*Probabilistic Methods of Calculation of Reliability Indices of Aircraft Structures under Variable Loads*]. Moscow. MAI Publ. 2022. 256 p. (In Russian).

15. Weibull W.A. A *Statistical Theory of the Strength of Materials*. Stockholm, Sweden. Generalstabens litografiska anstalts föörlag. 1939. 45 p.

16. Kogaev V.P. *Raschety na prochnost pri napryazheniyakh, peremennykh vo vremeni* [*Strength Calculations at Stresses Variable in Time*]. Moscow. Mashinostroenie Publ. 1977. 232 p. (In Russian).

17. Kogaev V.P. *Raschet detaley mashin na prochnost pri mnogotsiklovom nagruzhenii* [*Calculation of Machine Parts for Strength under Multicycle Loading*]. Moscow. Mashinostroenie Publ. 1985. 64 p. (In Russian).

18. Afanasyev N.N. *Statisticheskaya teoriya ustalostnoy prochnosti metallov* [*Statistical Theory of Fatigue Strength of Metals*]. Kiev. AN USSR Publ. 1953. 128 p. (In Russian).

19. Stepnov M.N., Agamirov L.V. O statisticheskikh zakonomernostyakh soprotivleniya ustalosti titanovogo splava VT3-1 [About statistical regularities of fatigue resistance of titanium alloy VT3-1]. *Zavodskaya laboratoriya*. 1980. 30 p. (In Russian).

20. Kogaev V.P. Zavisimost parametrov uravneniya podobiya ustalostnogo razrusheniya ot chisla tsiklov dlya legirovannykh staley [Dependence of the fatigue fracture similarity equation parameters on the number of cycles for alloy steels]. *Problemy mashinostroeniya i avtomatizatsii* [*Engineering and Automation Problems*]. 1988. No 22. P. 72–87 (In Russian).

21. Kogaev V.P., Gusenkov A.P., Alimov M.A., Martsinkevich A.Yu. Raschet statisticheskikh kharakteristik soprotivleniya ustalosti detaley iz legirovannykh staley [Calculation of statistical characteristics of fatigue resistance of alloy steel parts]. *Zavodskaya laboratoriya*. 1989. Vol. 55. No 4. P. 92–98 (In Russian).

22. Agamirov L.V., Vestyak V.A. Statistical estimation of fatigue resistance for parts using the theory of fatigue failure similarity. *Mechanics of Solids*. 2020. Vol. 55. No 3. P. 387–395. DOI: 10.3103/S0025654420030024.

23. Agamirov L.V. Raschetnoe obosnovanie krivoy ustalosti elementov konstruktsiy na baze kriteriya podobiya ustalostnogo razrusheniya [Calculation substantiation of fatigue curve of structural elements on the basis of fatigue fracture similarity criterion]. *Vestnik mashinostroeniya* [*Machine Building Vestnik*]. 2000. No 11. P. 27–31. (In Russian).

24. Stepnov M.N., Fertman A.M., Agamirov L.V., Giatsintov E.V. Otsenka parametrov uravneniya podobiya ustalostnogo razrusheniya titanovogo splava VT3-1 [Estimation of parameters of fatigue fracture similarity equation of titanium alloy VT3-1]. *Mashinovedenie* [*Machine Science*]. 1989. №4. P. 19–22 (In Russian).

25. Davison A.C., Hinkley D.V. *Bootstrap Methods and their Application*. Cambridge. Cambridge University Press. 2006. 592 p.

26. Davison R.A., Kuonen D. An introduction to the bootstrap with applications in R. *Statistical Computing and Statistical Graphics Newsletter*. 2002. Vol. 13. Iss. 1. P. 6–11.

ESTIMATION OF ENDURANCE LIMIT DISTRIBUTION BY METHODS OF STATISTICAL MODELING OF FATIGUE TESTS. PART 1

Agamirov L.V.[1,2,3]**, Agamirov V.L.**[1,3]**, Vestyak V.A.**[1]**, Toutova N.V.**[3]

[1]*Moscow Aviation Institute (National Research University)*, *Moscow*, *Russian Federation*
[2]*Moscow Power Engineering Institute (MPEI)***,** *Moscow*, *Russian Federation*
[3]*Moscow Technical University of Communications and Informatics (MTUCI)*, *Moscow*, *Russian Federation*

itno_agamirov@mail.ru

Received by the Editor 2025/05/04

The work is devoted to the estimation of endurance limits in different fatigue testing methods: full-scale experiment at several levels of variable stress amplitudes, methods related to the estimation of parameters of the fatigue fracture similarity equation, tests carried out by the forced up-down method. Each of these methods has a number of features that determine the main objective: the subsequent statistical modeling of fatigue tests. To build a non-parametric simulation model, the paper analyzes fatigue tests of aluminum, magnesium, titanium alloys and alloy steels of different shapes and sizes with different degrees of stress concentration, which is necessary to generate contrasting values of fatigue fracture similarity parameters.
The technique of combined statistical modeling with elements of “bootstrap” estimation and Monte Carlo algorithm has the purpose of generating a non-parametric distribution function of large size endurance limit. The results of statistical modeling can be used both for estimation of statistical errors of endurance limits, confidence intervals for this reference characteristic, and for comparative evaluation of different groups of tests using an appropriate statistical criterion for hypothesis testing. In the paper, the binomial criterion or sign criterion is considered as such a criterion. The paper uses the concept of generalized relative fatigue curve, which consists in the steady stability of fatigue curve parameters referred to the endurance limit for some basic durability, which is usually 10^7 or 10^6 cycles. This concept significantly increases the total volume and informativeness of the experimental material, which is especially relevant at the design stage of aircraft, transportation and machine-building structures operating under conditions of time-variable stresses and deformations.

Keywords: fatigue tests, endurance limit, up-down method, fatigue fracture similarity criterion, bootstrap modeling, Monte Carlo algorithm, statistical hypothesis testing criteria.