

УДК 539.3

DOI: 10.32326/1814-9146-2025-87-3-296-314

КИНЕМАТИЧЕСКОЕ НАГРУЖЕНИЕ ПЛОСКОГО ТЕСТ-ОБРАЗЦА С УЧАСТКАМИ ДВУХСТОРОННЕГО ЗАКРЕПЛЕНИЯ.

1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ*

© 2025 г.

Паймушин В.Н.¹, Шишкин В.М.²

¹*Казанский национальный исследовательский технический университет
им. А.Н. Туполева, Казань, Российская Федерация*

²*Вятский государственный университет, Киров, Российская Федерация*

vpajmushin@mail.ru

Поступила в редакцию 17.04.2025

Построена иерархическая последовательность трансформационных математических моделей геометрически нелинейного деформирования стержня-полосы (тест-образца), состоящего по длине из незакрепленного и двухсторонне закрепленных концевых участков. Предполагается, что его осевое растяжение и сжатие осуществляется путем кинематического нагружения закрепленного участка за счет сил трения, возникающих между стержнем и жесткими элементами приспособления и обеспечивающих реализацию одной из известных схем нагружения в соответствии с существующими стандартами испытаний. На участке двухстороннего закрепления стержня рассматриваемый способ нагружения обеспечивает также и сжатие стержня в поперечном направлении. Построенные для закрепленных участков уравнения основаны на кубической аппроксимации осевых перемещений по толщине и квадратичной аппроксимации прогиба, которые преобразуются в другую модель путем их подчинения в точках граничных поверхностей условиям кинематического сопряжения с жесткими элементами приспособления для испытаний с заданными перемещениями. Для незакрепленного участка по толщине стержня для осевых перемещений принята кубическая, а для прогиба – линейная аппроксимации, в дополнение к которым также использованы известные модели Тимошенко с учетом и без учета поперечного обжата и классическая модель Кирхгофа – Лява. Выведенные для принятых моделей деформирования одномерные геометрически нелинейные кинематические соотношения основаны на использовании соотношений теории упругости, записанных в упрощенном квадратичном приближении. В них сохранены такие геометрически нелинейные слагаемые, которые, имея необходимую степень точности и содержательности, позволяют выявить как классические изгибные, так и неклассические поперечно-сдвиговые формы потери устойчивости стержней при их статических испытаниях на сжатие и изгиб. Для всех принятых моделей деформирования составлены кинематические условия сопряжения участков, с использованием которых, исходя из вариационного принципа Лагранжа, получены уравнения равно-

* Выполнено в рамках государственного задания Минобрнауки России (проект FZSU-2024-0010, разделы 1, 3) и за счет средств РНФ (проект №23-19-00021, раздел 2).

весия участков стержня и статические (силовые) условия сопряжения их решений. Анализ построенных уравнений показал, что поперечное сжатие стержня на участках закрепления при динамических процессах деформирования неразрезных стержней облегчает трансформацию изгибных форм колебаний незакрепленного участка в продольно-поперечно-сдвиговые формы колебаний закрепленного участка.

Ключевые слова: волокнистый композит, стержень-полоса, тест-образец, закрепленный и незакрепленный участки, растяжение и сжатие, геометрическая нелинейность, трансформационная уточненная модель деформирования, кинематическое нагружение.

Введение

Однонаправленные волокнистые композитные материалы (ВКМ) в настоящее время находят широкое применение для изготовления тонкостенных элементов конструкций в изделиях судостроения и аэрокосмической техники. В направлении толщины они, как правило, состоят из достаточно большого количества разнонаправленных монослоев малой толщины, относящихся к классу ортотропных и характеризующихся в осях ортотропии x_1, x_2, z модулями упругости первого рода $E_1, E_2 = E_3$, связанных зависимостями вида $E_1 \nu_{31} = E_3 \nu_{13}, \dots$ ($\nu_{13}, \nu_{31}, \dots$ – коэффициенты Пуассона) и модулями упругости второго рода (модулями сдвига) $G_{12} = G_{13}, G_{23}$. Обладая сравнительно высокими прочностными характеристиками при растяжении, ВКМ характеризуются значительно меньшими значениями прочностных свойств при сжатии. Круг задач и достаточно простые для понимания их решения, связанные с испытаниями на сжатие тест-образцов из таких композитов и анализом видов разрушения при сжатии, в доступной форме освещены в монографии [1]. Известно, что при испытаниях тест-образцов поведение волокнистого композитного материала при сжатии в направлении волокон принципиально отличается от поведения при растяжении: при растяжении как образец, так и структура материала самоориентируются вдоль нагрузки, в то время как при сжатии материал (образец) стремится «уйти» из-под нагрузки [1].

В сравнении с экспериментами на растяжение экспериментальное определение механических свойств волокнистых композитов при сжатии представляет собой гораздо более сложную задачу. Связано это с особенностями передачи нагрузки на рабочую часть образца. Существуют три наиболее используемых стандарта испытаний, в соответствии с которыми обеспечивается торцевое, касательное или комбинированное приложение нагрузки на тест-образец (рис. 1): 1 – $\sigma_{11}^0 \neq 0, \sigma_{33}^0 = 0, \sigma_{13}^0 = 0$; 2 – $\sigma_{33}^0 \neq 0, \sigma_{13}^0 \neq 0, \sigma_{11}^0 = 0$; 3 – $\sigma_{11}^0 \neq 0, \sigma_{33}^0 \neq 0, \sigma_{13}^0 \neq 0$.

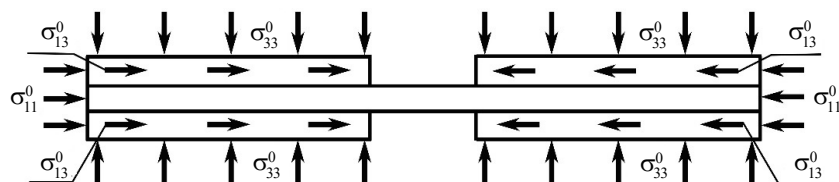


Рис. 1. Схемы нагружения образцов при испытаниях на сжатие

Торцевое нагружение тест-образца осуществляется, например, в соответствии со стандартом ASTM D695. Согласно ему, образец с подкрепленной металлическими пластинами рабочей частью длиной около 40 мм нагружается жесткими плитами

через торцы. Такие испытания являются относительно простыми в реализации, однако разрушение торцов тест-образца от действия контактных напряжений является высоковероятным для высокопрочных однонаправленных волокнистых композитов. Поэтому такую технологию испытаний можно применять только для волокнистых композитов, имеющих небольшое соотношение предела прочности к модулю поперечного сдвига.

Нагружение тест-образцов касательными усилиями ($\sigma_{33}^0 \neq 0$, $\sigma_{13}^0 \neq 0$, $\sigma_{11}^0 = 0$) осуществляется, например, согласно стандарту ASTM D3410. Для передачи нагрузки на образец используется сравнительно сложное приспособление, представляющее два жестких блока с интегрированными клиновыми захватами. От клиновых захватов на тест-образец касательное усилие передается через мягкие накладки. Этот вид испытаний применим для многих видов композиционных материалов, включая однонаправленные высокопрочные композиты на основе углеволокон. Преимущество метода заключается в значительно большей площади передачи нагрузки на образец, так как длину и ширину захватной части можно варьировать в широком диапазоне. Однако, как показывают многочисленные исследования (см., например [2]), имеет место концентрация касательных и поперечных нормальных напряжений в зоне перехода от мягких накладок к рабочей части образца. Такое явление приводит к уменьшению измеряемого предела прочности композиционного материала по сравнению с его реальным значением.

Схема испытаний с комбинированным нагружением тест-образца описана в стандарте ASTM D6641. Приспособление для таких испытаний технически проще приспособления ASTM D3410 ввиду отсутствия клиновых захватов. Усилие, передаваемое на тест-образец, распределяется между торцами и лицевой поверхностью тест-образца, что приводит к уменьшению концентрации напряжений. Очевидным недостатком метода является невозможность точного распределения торцевых и касательных усилий на тест-образец, вследствие чего может возрасти разброс в экспериментальных результатах.

В связи со сложностью и иногда противоречивостью получаемых механических характеристик с помощью трех описанных схем нагружения значительное количество публикаций [2–9] было посвящено исследованию влияния схем нагружения, типоразмеров тест-образцов и используемых накладок на величину предельных напряжений, определяемых в эксперименте. Краткий обзор исследований [2–8] по этой тематике и их анализ были даны, в частности, в статье [9].

Мотивацией выполнения настоящего исследования послужили полученные ранее и приведенные в статьях [10–12] результаты. В них на примере плоской задачи механики стержня-полосы, имеющего на одной из лицевых поверхностей закрепленный участок конечной длины, было показано, что при исследовании процессов деформирования с учетом податливости закрепленного участка требуется введение понятия трансформации параметров напряженно-деформированного состояния (НДС) и применяемых для их описания математических моделей при переходе через границу от незакрепленного участка к закрепленному. Было установлено, что в рамках классической модели Кирхгофа–Лява учет наличия таких закрепленных участков стержней невозможен, а при использовании простейшей сдвиговой модели С.П. Тимошенко такая трансформация возможна при закреплении участка только на одной из лицевых поверхностей. В рамках используемой модели сформулированы кинематические и силовые условия сопряжения закрепленных и незакрепленных участков стержней.

На основе выведенных соотношений найдено точное аналитическое решение задачи о поперечных изгибных колебаниях консольно закрепленного плоского стержня в условиях вибрационного нагружения периодической осевой силой, приложенной к торцевому сечению закрепленного участка конечной длины, а также задачи о поперечных изгибных колебаниях плоского стержня с двумя незакрепленными концами и участком закрепления конечной длины между ними при вибрационном нагружении поперечной силой на одном из незакрепленных концов. Были проведены численные эксперименты по определению динамической реакции рассмотренных стержней в рамках отмеченной сдвиговой модели С.П. Тимошенко, подтверждающие наличие трансформации параметров НДС при переходе через границу от незакрепленного участка к закрепленному.

В настоящей статье дано дальнейшее развитие описанных выше результатов [10–12 и др.] и разработана трансформационная математическая модель для описания статического процесса геометрически нелинейного деформирования при кинематическом нагружении плоского композитного тест-образца при испытаниях на осевое сжатие, а также динамического процесса деформирования плоского стержня, имеющего на обеих лицевых поверхностях участки закрепления конечной длины.

1. Трансформационная модель деформирования высокого порядка точности

1.1. Кинематические соотношения. Одна из наиболее употребительных схем испытаний плоских тест-образцов из волокнистых композитов на осевое сжатие показана на рис. 2, где 1 – тест-образец; 2 – жесткие неподвижные накладки; 3 – жесткие подвижные накладки.

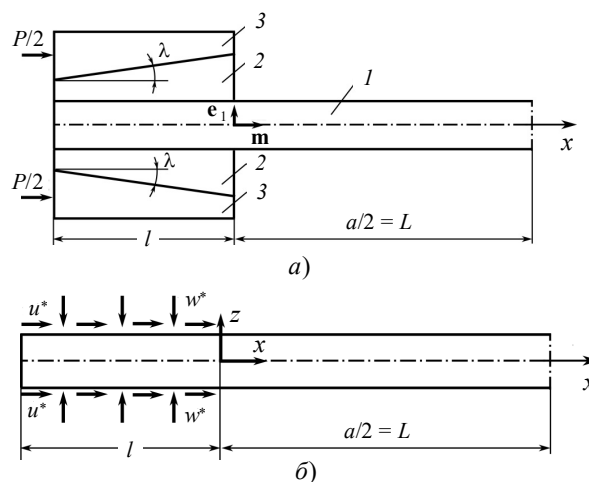


Рис. 2. Схема испытаний плоских тест-образцов на осевое сжатие

Изображенные на рисунке тест-образцы с длиной рабочей части $a = 2L$ и общей длиной $2(l + L)$ имеют концевые участки длиной l (на рис. 2 в силу симметрии показана половина образца), закрепляемые в приспособлении для испытаний. При использовании описанной схемы испытаний усилие сжатия передается за счет сил трения между боковыми гранями образца 1 и жесткими накладками 2, подвергающимися кинематическому нагружению перемещениями u^* и $w^* = cu^*$ (c – некоторое

малое число, обеспечивающее выполнение неравенства $w^* \ll u^*$). Следовательно, если через $U_0(x, z)$ и $W_0(x, z)$ обозначить перемещения точек образца в направлениях осей x и z на участке закрепления образца $-l \leq x \leq 0$, то при рассматриваемом его кинематическом нагружении в точках граничных плоскостей $z = \pm t/2$ при плоской постановке задачи должны быть выполнены условия

$$\begin{aligned} U_0(x, z = -t/2) &= u^*, & W_0(x, z = -t/2) &= w^*, \\ U_0(x, z = t/2) &= u^*, & W_0(x, z = t/2) &= -w^*. \end{aligned} \quad (1)$$

Следуя известным в механике тонкостенных элементов конструкций результатам по разработке высокоточных моделей деформирования [13–22], критический анализ которых был дан, в частности, в [23, 24], на незакрепленном участке $0 \leq x \leq L$ тест-образца для перемещений U и W примем аппроксимации

$$U = u + z\gamma + \frac{z^2}{2}\psi + \frac{z^3}{6}\chi, \quad W = w + z\varphi, \quad 0 \leq x \leq L, \quad (2)$$

введя в рассмотрение шесть одномерных неизвестных функций.

На закрепленном участке $-l \leq x \leq 0$, в отличие от (2), примем аппроксимации

$$U_0 = u_0 + z\gamma_0 + \frac{z^2}{2}\psi_0 + \frac{z^3}{6}\chi_0, \quad W_0 = w_0 + z\varphi_0 + \frac{z^2}{2}\theta_0,$$

которые после удовлетворения условиям (1) в силу следующих из них зависимостей

$$\chi_0 = -\frac{24}{t^2}\gamma_0, \quad \psi_0 = -\frac{8}{t^2}(u^* - u_0), \quad \theta_0 = -\frac{8}{t^2}w_0, \quad \varphi_0 = -\frac{2}{t}w^* \quad (3)$$

преобразуются к виду

$$\begin{aligned} U_0(x, z) &= \left(1 - \frac{4z^2}{t^2}\right)u_0 + z\left(1 - \frac{4z^2}{t^2}\right)\gamma_0 + \frac{4z^2}{t^2}u^*, \\ W_0(x, z) &= -\frac{2z}{t}w^* + \left(1 - \frac{4z^2}{t^2}\right)w_0, \end{aligned} \quad (4)$$

где неизвестными являются три одномерные функции u_0, γ_0, w_0 .

Внеся функции (2), (4) в условия их непрерывности $U(x = 0) = U_0(x = 0)$, $W(x = 0) = W_0(x = 0)$ в сечении $x = 0$, запишем равенства

$$\begin{aligned} \left(u + z\gamma + \frac{z^2}{2}\psi + \frac{z^3}{6}\chi\right)\Big|_{x=0} &= \left[\left(1 - \frac{4z^2}{t^2}\right)u_0 + z\left(1 - \frac{4z^2}{t^2}\right)\gamma_0 + \frac{4z^2}{t^2}u^*\right]\Big|_{x=0}, \\ (w + z\varphi)\Big|_{x=0} &= \left[\left(1 - \frac{4z^2}{t^2}\right)w_0 - \frac{2z}{t}w^*\right]\Big|_{x=0}, \end{aligned}$$

из которых приравниванием коэффициентов при одинаковых степенях z получим шесть кинематических условий сопряжения участков

$$\begin{aligned} u\Big|_{x=0} &= u_0\Big|_{x=0}, \quad \gamma\Big|_{x=0} = \gamma_0\Big|_{x=0}, \quad \psi\Big|_{x=0} = -\frac{8}{t^2}(u_0 - u^*)\Big|_{x=0}, \\ \chi\Big|_{x=0} &= -\frac{24}{t^2}\gamma_0\Big|_{x=0}, \quad w\Big|_{x=0} = w_0\Big|_{x=0}, \quad \varphi\Big|_{x=0} = -\frac{2}{t}w^*. \end{aligned} \quad (5)$$

Для определения компонент деформаций на незакрепленном участке будем использовать геометрически нелинейные кинематические соотношения плоской задачи теории упругости, записанные в геометрически нелинейном приближении [25–27]:

$$\varepsilon_{xx} = U_{,x} + \frac{1}{2} W_{,x}^2, \quad \varepsilon_{zz} = W_{,z} + \frac{1}{2} U_{,z}^2, \quad \gamma_{xy} = U_{,z} + W_{,x} + W_{,z} W_{,x}. \quad (6)$$

Нижние индексы x и z после запятой здесь и далее означают дифференцирование обозначаемой переменной по соответствующей координате (x или z), выражения вида $W_{,x}^2$ – возведение в квадрат производной. При подстановке представлений (2) в (6) можно получить редуцированные кинематические соотношения, записанные в приближении

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= u_{,x} + \frac{1}{2} w_{,x}^2 + z(\gamma_{,x} + w_{,x} \varphi_{,x}) + \frac{z^2}{2} (\psi_{,x} + \varphi_{,x}^2) + \frac{z^3}{6} \chi_{,x}, \\ \varepsilon_{zz} &= \varphi + \frac{1}{2} \left(\gamma + z\psi + \frac{z^2}{2} \chi \right) \approx \varphi + \frac{1}{2} \gamma^2, \\ \gamma_{xz} &= \gamma + z\psi + \frac{z^2}{2} \chi + (w_{,x} + z\varphi_{,x})(1 + \varphi) \approx \gamma + w_{,x} + z(\psi + \varphi_{,x}) + \frac{z^2}{2} \chi, \end{aligned} \quad (7)$$

позволяющие при их использовании выявить наряду с изгибными также и поперечно-сдвиговые формы потери устойчивости (ФПУ) на незакрепленном участке образца в окрестности сечения $x = 0$.

1.2. Уравнения равновесия, соотношения упругости и граничные условия.

Исходя из соотношений (7), для определения вариации потенциальной энергии деформации незакрепленного участка можно получить выражение, записанное в приближении

$$\begin{aligned} \delta \Pi &= \int_0^L \int_{-t/2}^{t/2} (\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \sigma_{zz} \delta \varepsilon_{zz} + \sigma_{xz} \delta \gamma_{xz}) dx dz = \\ &= \int_0^L (T_x \delta u_{,x} + Q_{xz} \delta w_{,x} + M_x \delta \gamma_{,x} + M_{xz}^* \delta \varphi_{,x} + R_x \delta \psi_{,x} + N_x \delta \chi_{,x} + \\ &\quad + T_{xz}^* \delta \gamma + T_z \delta \varphi + M_{xz} \delta \psi + R_{xz} \delta \chi) dx, \end{aligned} \quad (8)$$

где введены обозначения

$$Q_{xz} = T_{xz} + T_x w_{,x} + M_x \varphi_{,x}, \quad T_{xz}^* = T_{xz} + T_z \gamma, \quad M_{xz}^* = M_{xz} + M_x w_{,x} + 2R_x \varphi_{,x}; \quad (9)$$

$$\begin{aligned} T_x &= \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{xx} dz, \quad T_z = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{zz} dz, \quad T_{xz} = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{xz} dz, \\ M_x &= \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{xx} z dz, \quad M_{xz} = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{xz} z dz, \quad R_{xz} = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{xz} \frac{z^2}{2} dz, \\ R_x &= \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{xx} \frac{z^2}{2} dz, \quad N_x = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{xx} \frac{z^3}{6} dz. \end{aligned} \quad (10)$$

Если на закрепленном участке вместо (6) использовать кинематические соотношения, записанные в приближении

$$\varepsilon_{xx}^0 = U_{0,x} + \frac{1}{2}W_{0,x}^2, \quad \varepsilon_{zz}^0 = W_{0,z} + \frac{1}{2}U_{0,z}^2, \quad \gamma_{xz}^0 = U_{0,z} + W_{0,x},$$

то в предположении о том, что $u_{,x}^* = 0$, $w_{,x}^* = 0$, для компонент деформаций при использовании (4) получаются выражения, составленные в приближении

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx}^0 &= \left(1 - \frac{4z^2}{t^2}\right) u_{0,x} + z \left(1 - \frac{4z^2}{t^2}\right) \gamma_{0,x} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{4z^2}{t^2}\right)^2 w_{0,x}^2, \quad \gamma_{xz}^0 = \frac{8z}{t^2} (u^* - u) + \\ &+ \left(1 - \frac{12z^2}{t^2}\right) \gamma_0 + \left(1 - \frac{4z^2}{t^2}\right) w_{0,x}, \quad \varepsilon_{zz}^0 = -2 \frac{w^*}{t} - \frac{8z}{t^2} w_0 + \frac{32z^2}{t^4} \frac{(u^* - u_0)^2}{2} + \\ &+ \frac{16z}{t^2} \left(1 - \frac{12z^2}{t^2}\right) \frac{(u^* - u_0) \gamma_0}{2} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{12z^2}{t^2}\right)^2 \gamma_0^2. \end{aligned} \quad (11)$$

При использовании соотношений (11) и введении в рассмотрение усилий и моментов

$$\begin{aligned} T_x^0 &= \int_{-t/2}^{t/2} \left(1 - \frac{4z^2}{t^2}\right) \sigma_{xx}^0 dz, \quad M_x^0 = \int_{-t/2}^{t/2} z \left(1 - \frac{4z^2}{t^2}\right) \sigma_{xx}^0 dz, \\ T_z^0 &= \int_{-t/2}^{t/2} \left(1 - \frac{12z^2}{t^2}\right) \sigma_{zz}^0 dz, \quad M_z^0 = \int_{-t/2}^{t/2} \frac{8z}{t^2} \left(1 - \frac{12z^2}{t^2}\right) \sigma_{zz}^0 dz, \\ m_z^0 &= \int_{-t/2}^{t/2} \frac{64}{t^4} z^2 \sigma_{zz}^0 dz, \quad T_{xz}^0 = \int_{-t/2}^{t/2} \left(1 - \frac{12z^2}{t^2}\right) \sigma_{xz}^0 dz, \\ M_{xz}^0 &= \int_{-t/2}^{t/2} \frac{8z}{t^2} \sigma_{xz}^0 dz, \quad S_x^0 = \int_{-t/2}^{t/2} \left(1 - \frac{4z^2}{t^2}\right)^2 \sigma_{xx}^0 dz, \\ Q_{xz}^0 &= \int_{-t/2}^{t/2} \left(1 - \frac{4z^2}{t^2}\right) \sigma_{xz}^0 dz, \quad H_z^0 = \int_{-t/2}^{t/2} \frac{8z}{t^2} \sigma_{zz}^0 dz, \end{aligned} \quad (12)$$

приведенных к срединной поверхности $z = 0$, для вариации потенциальной энергии деформации закрепленного участка можно получить выражение

$$\begin{aligned} \delta \Pi_0 &= \int_{-l}^0 \{ T_x^0 \delta u_{0,x} + M_x^0 \delta \gamma_{0,x} + (Q_{xz}^0 + S_x^0 w_{0,x}) \delta w_{0,x} - \\ &- [M_{xz}^0 + m_z^0 (u^* - u_0) + M_z^0 \gamma_0] \delta u_0 - H_z^0 \delta w_0 + \\ &+ [T_{xz}^0 + M_z^0 (u^* - u_0) + T_z^0 \gamma_0] \delta \gamma_0 \} dx. \end{aligned} \quad (13)$$

Использование определяющих соотношений, записанных в приближении ($G_{13} = G_{13}(z)$ – секущий модуль поперечного сдвига)

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^0 &= E_1^* (\varepsilon_{xx}^0 + \nu_{31} \varepsilon_{zz}^0), \quad \sigma_{zz}^0 = E_3^* (\varepsilon_{zz}^0 + \nu_{13} \varepsilon_{xx}^0), \quad \sigma_{xz}^0 = G_{13}^0 (|\gamma_{xz}^0|) \gamma_{xz}^0, \\ \sigma_{xx} &= E_1 \varepsilon_{xx}, \quad \sigma_{zz} = E_3 \varepsilon_{zz}, \quad \sigma_{xz} = G_{13} (|\gamma_{xz}|) \gamma_{xz}, \\ E_1^* &= E_1 / (1 - \nu_{13} \nu_{31}), \quad E_3^* = E_3 / (1 - \nu_{13} \nu_{31}), \end{aligned} \quad (14)$$

в соответствии с (10) и (12) приводит к физическим зависимостям (G_{xz}^0 , G_{xz} – осред-

ненные по толщине секущие модули сдвига материала на закрепленном и незакрепленном участках):

$$\begin{aligned}
T_x^0 &= E_1^* t \left[\frac{8}{15} u_{0,x} + \frac{16}{35} w_{0,x}^2 - \frac{2v_{31}}{3t} w^* + \frac{16}{35} v_{31} \left(\frac{u^* - u_0}{t} \right)^2 + 0,19 v_{31} \gamma_0^2 \right], \\
M_x^0 &= 0,02 E_1^* t^3 \gamma_{0,x} - v_{13} E_1^* t \left[\frac{4}{15} w_0 + 0,08 (u^* - u_0) \gamma_0 \right], \\
S_x^0 &= E_1^* t \left[\frac{16}{35} u_{0,x} + 0,2 w_{0,x}^2 - \frac{16v_{31}}{15t} w^* + 0,61 v_{31} \left(\frac{u^* - u_0}{t} \right)^2 + 0,15 v_{31} \gamma_0^2 \right], \quad (15) \\
H_z^0 &= E_3^* \left[-\frac{16}{3t} w_0 - \frac{64}{15} \left(\frac{u^* - u_0}{t} \right) \gamma_0 + \frac{4v_{13}t}{15} \gamma_{0,x} \right], \\
m_z^0 &= \frac{E_3^*}{t} \left[-\frac{10,66}{t} w^* + 25,6 \left(\frac{u^* - u_0}{t} \right)^2 + 3,2 \gamma_0^2 + 2,1 v_{13} u_{0,x} + 4,03 v_{13} w_{0,x}^2 \right]; \\
M_z^0 &= E_3^* \left[4,24 \frac{w_0}{t} + 6,6 \left(\frac{u^* - u_0}{t} \right) \gamma_0 - 0,08 v_{13} t \gamma_{0,x} \right], \\
T_z^0 &= E_3^* \left[0,38 v_{13} u_{0,x} + 0,15 v_{13} w_{0,x}^2 - \frac{8}{5t} w^* + 3,3 \left(\frac{u^* - u_0}{t} \right)^2 + 4,5 \gamma_0^2 \right], \quad (16) \\
M_{xz}^0 &= \frac{16G_{xz}^0}{3t} (u^* - u_0), \quad Q_{xz}^0 = \frac{4G_{xz}^0 t}{15} (\gamma_0 + 4w_{0,x}), \quad T_{xz}^0 = \frac{4G_{xz}^0 t}{5} \left(\gamma_0 + \frac{1}{3} w_{0,x} \right)
\end{aligned}$$

для закрепленного участка и

$$\begin{aligned}
T_x &= B_{11} \left[u_{,x} + \frac{1}{2} w_{,x}^2 + \frac{t^2}{24} (\psi_{,x} + \varphi_{,x}^2) \right], \quad T_z = B_{33} \left(\varphi + \frac{1}{2} \gamma^2 \right), \\
M_x &= D_{11} \left(\gamma_{,x} + w_{,x} \varphi_{,x} + \frac{t^2}{40} \chi_{,x} \right), \\
R_x &= \frac{E_1 t^3}{8} \left[\frac{1}{3} \left(u_{,x} + \frac{1}{2} w_{,x}^2 \right) + \frac{t^2}{40} (\psi_{,x} + \varphi_{,x}^2) \right], \quad (17) \\
N_x &= \frac{E_1 t^5}{48} \left[\frac{1}{10} (\gamma_{,x} + w_{,x} \varphi_{,x}) + \frac{t^2}{336} \chi_{,x} \right], \\
T_{xz} &= B_{13} \left(\gamma + w_{,x} + \frac{t^2}{24} \chi \right), \quad M_{xz} = D_{13} (\psi + \varphi_{,x}), \\
R_{xz} &= D_{13} \left[\frac{1}{2} (\gamma + w_{,x}) + \frac{3t^2}{80} \chi \right]
\end{aligned}$$

для незакрепленного участка. В (17) введены обозначения для жесткостных коэффициентов

$$B_{11} = E_1 t, \quad B_{33} = E_3 t, \quad D_{11} = \frac{B_{11} t^2}{12}, \quad B_{13} = G_{xz} t, \quad D_{13} = \frac{B_{13} t^2}{12}.$$

Если на закрепленном участке образца $-l \leq x \leq 0$ для определения деформации поперечного сдвига γ_{xz}^0 использовать геометрически нелинейное соотношение теории упругости, записанное в приближении

$$\gamma_{xz}^0 = U_{0,z} + W_{0,x} + W_{0,z} W_{0,x},$$

то в рамках принятых для перемещений U_0 и W_0 аппроксимаций (4) приходим к выражению

$$\begin{aligned} \gamma_{xz}^0 = & \frac{8z}{t^2} (u^* - u_0) + \left(1 - \frac{12z^2}{t^2}\right) \gamma_0 + \left(1 - \frac{4z^2}{t^2}\right) w_{0,x} - \\ & - \frac{2}{t} \left(1 - \frac{4z^2}{t^2}\right) w^* w_{0,x} - \frac{8z}{t^2} \left(1 - \frac{4z^2}{t^2}\right) w_0 w_{0,x}. \end{aligned} \quad (18)$$

В соответствии с (18) вариация потенциальной энергии деформации поперечного сдвига будет

$$\begin{aligned} & \int_{-l}^0 \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{xz}^0 \delta \gamma_{xz}^0 dx dz = \\ & = \int_{-l}^0 \left\{ -M_{xz}^0 \delta u_0 + T_{xz}^0 \delta \gamma_0 - H_{xz}^0 w_{0,x} \delta w_0 + [Q_{xz}^0 (1 - 2w^*/t) - H_{xz}^0 w_0] \right\} \delta w_{0,x}, \end{aligned} \quad (19)$$

где, в отличие от (16),

$$\begin{aligned} M_{xz}^0 &= \frac{G_{xz}^0}{3t} \left[16(u^* - u_0) - \frac{28}{3} w_0 w_{0,x} \right] = \frac{G_{xz}^0}{t} [5,33(u^* - u_0) - 3,11 w_0 w_{0,x}], \\ Q_{xz}^0 &= \frac{4G_{xz}^0 t}{15} \left[\gamma_0 + 4 \left(1 - \frac{w^*}{t}\right) w_{0,x} \right], \quad T_{xz}^0 = \frac{4G_{xz}^0 t}{5} \left[\gamma_0 + \frac{1}{3} \left(1 - \frac{2w^*}{t}\right) w_{0,x} \right], \\ H_{xz}^0 &= \int_{-t/2}^{t/2} \frac{8z}{t^2} \left(1 - \frac{4z^2}{t^2}\right) \sigma_{xz}^0 dz = \frac{G_{xz}^0}{t} [2,13(u^* - u_0) - 8,32 w_0 w_{0,x}]. \end{aligned} \quad (20)$$

Видно, что формулы для определения Q_{xz}^0 и T_{xz}^0 в (16) и (20) совпадают с точностью $1 + \varepsilon \approx 1$, где ε – малая величина порядка w^*/t .

При рассматриваемом виде нагружения тест-образца для вывода уравнений равновесия участков, соответствующих им граничных условий и силовых условий сопряжения этих участков воспользуемся принципом возможных перемещений, составив вариационное уравнение $\delta \Pi_0 + \delta \Pi = 0$. При использовании (8) и (13) его можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} & \frac{(Q_{xz}^0 + S_x^0 w_{0,x}) \delta w_0}{\Big|_{x=0}} - \frac{(Q_{xz}^0 + S_x^0 w_{0,x}) \delta w_0}{\Big|_{x=-l}} + \\ & + (T_x^0 \delta u_0) \Big|_{x=0} + (M_x^0 \delta \gamma_0) \Big|_{x=0} - (T_x^0 \delta u_0) \Big|_{x=-l} - (M_x^0 \delta \gamma_0) \Big|_{x=-l} + \\ & + (T_x \delta u) \Big|_{x=L} - (T_x \delta u_0) \Big|_{x=0} + (Q_{xz} \delta w) \Big|_{x=L} - (Q_{xz} \delta w) \Big|_{x=0} + \\ & + (M_x \delta \gamma) \Big|_{x=L} - (M_x \delta \gamma_0) \Big|_{x=0} + (M_{xz}^* \delta \varphi) \Big|_{x=L} - (M_{xz}^* \delta \varphi) \Big|_{x=0} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (R_x \delta \psi) \Big|_{x=L} + \left(\frac{8}{t^2} R_x \delta u_0 \right) \Big|_{x=0} + (N_x \delta \chi) \Big|_{x=L} + \left(\frac{24}{t^2} N_x \delta \gamma_0 \right) \Big|_{x=0} - \\
& - \int_{-l}^0 \{ [T_{x,x}^0 + M_{xz}^0 + M_z^0 \gamma_0 - m_z^0 (u_0 - u^*)] \delta u_0 + \\
& + [M_{x,x}^0 - T_{xz}^0 - T_z^0 \gamma_0 + M_z^0 (u_0 - u^*)] \delta \gamma_0 + [(Q_{xz}^0 + S_x^0 w_{0,x})_{,x} + H_z^0] \delta w_0 \} dx - \\
& - \int_0^L [T_{x,x} \delta u + Q_{xz,x} \delta w + (M_{xz,x}^* - T_z) \delta \varphi + (M_{x,x} - T_{xz}^*) \delta \gamma + \\
& + (R_{x,x} - M_{xz} - M_z \gamma) \delta \psi + (N_{x,x} - R_{xz}) \delta \chi] dx = 0. \quad (21)
\end{aligned}$$

Из (21) следуют:

– система трех уравнений равновесия тест-образца для закрепленного участка $-l \leq x \leq 0$

$$\begin{aligned}
& T_{x,x}^0 + M_{xz}^0 + M_z^0 \gamma_0 - m_z^0 (u_0 - u^*) = 0, \\
& M_{x,x}^0 - T_{xz}^0 - T_z^0 \gamma_0 + M_z^0 (u_0 - u^*) = 0, \quad (Q_{xz}^0 + S_x^0 w_{0,x})_{,x} + H_z^0 = 0; \quad (22)
\end{aligned}$$

– система шести уравнений равновесия тест-образца для незакрепленного участка $0 \leq x \leq L$

$$\begin{aligned}
& T_{x,x} = 0, \quad Q_{xz,x} = 0, \quad M_{xz,x}^* - T_z = 0, \quad M_{x,x} - T_{xz}^* = 0, \\
& R_{x,x} - M_{xz} = 0, \quad N_{x,x} - R_{xz} = 0; \quad (23)
\end{aligned}$$

– граничные условия в сечении $x = -l$ для уравнений (22)

$$T_x^0 = 0, \quad M_x^0 = 0, \quad Q_{xz}^0 + S_x^0 w_{0,x} = 0; \quad (24)$$

– граничные условия (условия симметрии) в сечении $x = L$ для уравнений (23)

$$u = 0, \quad \gamma = 0, \quad Q_{xz} = 0, \quad M_{xz}^* = 0, \quad \psi = 0, \quad \chi = 0. \quad (25)$$

В сечении $x = 0$ для уравнений (22), (23) должны быть выполнены кинематические условия сопряжения участков (5), при использовании которых из (21) следуют соответствующие им силовые условия сопряжения

$$T_x^0 - T_x + \frac{8}{t^2} R_x = 0, \quad M_x^0 - M_x + \frac{24}{t^2} N_x = 0, \quad Q_{xz}^0 + S_x^0 w_{0,x} - Q_{xz} = 0. \quad (26)$$

1.3. Предельно упрощенная трансформационная модель деформирования.

Если в (4) принять равенство $w_0 = 0$, что в соответствии с (3) эквивалентно представлению $W_0 = z \varphi_0$, то во всех приведенных выше соотношениях отбрасываются подчеркнутые слагаемые. В результате для описания НДС закрепленного участка вместо системы уравнений (22) приходим к системе двух уравнений равновесия, имеющих вид

$$\begin{aligned}
& T_{x,x}^0 + M_{xz}^0 + M_z^0 \gamma_0 - m_z^0 (u_0 - u^*) = 0, \\
& M_{x,x}^0 - T_{xz}^0 - T_z^0 \gamma_0 + M_z^0 (u_0 - u^*) = 0. \quad (27)
\end{aligned}$$

Путем использования соответствующих соотношений упругости

$$\begin{aligned}
T_x^0 &= \frac{2E_1^*}{3} \left(\frac{4t}{5} u_{0,x} - v_{31} w^* \right), \quad M_x^0 = 0,02E_1^* t^3 \gamma_{0,x} - 0,08E_1^* v_{13} t (u^* - u_0) \gamma_0, \\
M_z^0 &= -0,08E_3^* t v_{13} \gamma_{0,x}, \quad m_z^0 = -\frac{32E_3^*}{3t^2} w^*, \quad T_{xz}^0 = \frac{4G_{13}^0}{5} \gamma_0, \\
M_{xz}^0 &= \frac{16G_{13}}{3t} (u^* - u_0), \quad T_z^0 = -\frac{8E_3^*}{5} w^*
\end{aligned} \quad (28)$$

в предположении $u_{,x}^* = 0$, $w_{,x}^* = 0$ выразим уравнения (27) через искомые функции u_0 и γ_0 :

$$\begin{aligned}
\frac{8E_1^* t}{15} u_{0,xx} - \frac{16G_{13}^0}{3t} (u_0 - u^*) - \frac{0,08E_3^* v_{13} t \gamma_{0,x} \gamma_0}{3t^2} + \frac{32E_3^*}{3t^2} w^* (u_0 - u^*) &= 0, \\
0,02E_1^* t^3 \gamma_{0,xx} - \frac{4G_{13}^0 t}{5} \gamma_0 - E_3^* t \left(\frac{0,38v_{13} u_{0,x}}{5t} - \frac{8}{5t} w^* \right) \gamma_0 - \frac{0,08E_3^* v_{13} t \gamma_{0,x} (u_0 - u^*)}{5t} &= 0.
\end{aligned} \quad (29)$$

Заметим, что в уравнениях (29) все подчеркнутые геометрически нелинейные слагаемые содержат коэффициент Пуассона v_{13} . При их отбрасывании вместо (29) приходим к несвязанным линейным уравнениям равновесия закрепленного участка:

$$u_{0,xx} - k_3^2 u_0 = -k_3^2 u^*, \quad (30)$$

$$\gamma_{0,xx} + k_4 u^* \gamma_{0,x} - k_5^2 \gamma_0 = 0, \quad (31)$$

где в силу $E_1^* v_{31} = E_3^* v_{13}$

$$k_3^2 = \frac{10}{E_1^* t^2} \left(G_{13}^0 - 2E_3^* \frac{w^*}{t} \right), \quad k_4 = \frac{4v_{13}}{t^2}, \quad k_5^2 = \frac{40}{E_1^* t^2} \left(G_{13}^0 - 2E_3^* \frac{w^*}{t} \right) = 4k_3^2. \quad (32)$$

Следует особо отметить, что в формулах (32) в принятом приближении $-2w^*/t = \varepsilon_{zz}^0$, а $-2E_3^* w^*/t = E_3^* \varepsilon_{zz}^0 = \sigma_{zz}^0$ – напряжение сжатия в закрепленной части образца, формирующееся в процессе его кинематического нагружения. Видно, что при достижении σ_{zz}^0 значения G_{13}^0 , соответствующего потере устойчивости стержня по сдвиговой форме, уравнения (30), (31) приводятся к виду

$$u_{0,xx} = 0, \quad \gamma_{0,xx} + k_4 u^* \gamma_{0,x} = 0,$$

которыми описывается закритическое состояние стержня.

2. Уравнения движения, соответствующие использованию аппроксимаций (2), (4)

Для исследования динамических процессов деформирования соответствующие уравнения движения могут быть получены исходя из вариационного уравнения принципа Даламбера – Лагранжа

$$\delta \Pi_0 + \delta \Pi = \delta A_p + \delta A_{ин}, \quad (33)$$

где δA_p – вариация работы внешних сил, приложенных к незакрепленному участку, $\delta A_{ин}$ – вариация работы инерционных сил. В предположении о том, что $\ddot{u}^* = 0$, $\ddot{w}^* = 0$ и внешняя поверхностная нагрузка, приложенная к граничным плоскостям $z = \pm t/2$, задана в виде $\mathbf{p}^\pm = p_x^\pm \mathbf{e}_1 + p_z^\pm \mathbf{m}$, для δA_p можно получить выражение

$$\delta A_p = \int_0^a (X_u \delta u + X_\gamma \delta \gamma + X_\psi \delta \psi + X_\chi \delta \chi + X_w \delta w + X_\phi \delta \phi) dx, \quad (34)$$

где

$$\begin{aligned} X_u &= p_x^- + p_x^+, \quad X_\gamma = \frac{t}{2}(p_x^+ - p_x^-), \quad X_\psi = \frac{t^2}{8}(p_x^- + p_x^+), \\ X_\chi &= \frac{t^3}{48}(p_x^+ - p_x^-), \quad X_w = p_z^+ + p_z^-, \quad X_\phi = \frac{t}{2}(p_z^+ - p_z^-). \end{aligned} \quad (35)$$

Аналогично для $\delta A_{\text{ин}}$ составим выражение ($\ddot{\phi} = \phi_{,\tau\tau} = \partial^2 \phi / \partial \tau^2, \dots$; точки над переменными величинами означают дифференцирование по времени τ ; ρ – плотность):

$$\begin{aligned} \delta A_{\text{ин}} &= -\rho \int_{-l/2}^{l/2} \left[\int_{-l}^0 (\ddot{U}_0 \delta U_0 + \ddot{W}_0 \delta W_0) dx + \int_0^a (\ddot{U} \delta U + \ddot{W} \delta W) dx \right] dz = \\ &= -\rho \left[\int_{-l}^0 \left(\frac{8t}{15} \ddot{u}_0 + 0,02t^3 \ddot{\gamma}_0 \delta \gamma_0 + \frac{t}{5} \ddot{w}_0 \delta w_0 \right) dx + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^a (\ddot{X}_u \delta u + \ddot{X}_\gamma \delta \gamma + \ddot{X}_\psi \delta \psi + \ddot{X}_\chi \delta \chi + \ddot{X}_w \delta w + \ddot{X}_\phi \delta \phi) \right], \end{aligned} \quad (36)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} \ddot{X}_u &= t\ddot{u} + \frac{t^3}{24}\ddot{\psi}, \quad \ddot{X}_\gamma = \frac{t^3}{12}\ddot{\gamma} + \frac{t^5}{480}\ddot{\chi}, \quad \ddot{X}_w = t\ddot{w}, \quad \ddot{X}_\phi = \frac{t^3}{12}\ddot{\phi}, \\ \ddot{X}_\psi &= \frac{t^3}{24}\ddot{u} + \frac{t^5}{320}\ddot{\psi}, \quad \ddot{X}_\chi = \frac{t^5}{480}\ddot{\gamma} + \frac{t^7}{2304}\ddot{\psi}. \end{aligned} \quad (37)$$

При использовании выражений (21), (34), (36) из вариационного уравнения (33) следуют уравнения движения

$$\begin{aligned} T_{x,x}^0 + M_{xz}^0 + M_z^0 \gamma_0 - m_z^0 (u_0 - u^*) - \rho \frac{8t}{15} \ddot{u}_0 &= 0, \\ M_{x,x}^0 - T_{xz}^0 - T_z^0 \gamma_0 + M_z^0 (u_0 - u^*) - 0,02\rho t^3 \ddot{\gamma}_0 &= 0, \\ (Q_{xz}^0 + S_x^0 w_{0,x})_{,x} + H_z^0 - \rho \frac{t}{5} \ddot{w}_0 &= 0, \end{aligned} \quad (38)$$

для закрепленного участка $-l \leq x \leq 0$ и уравнения движения

$$\begin{aligned} T_{x,x} + X_u - \ddot{X}_u &= 0, \quad Q_{xz,x} + X_w - \ddot{X}_w = 0, \quad M_{xz,x}^* - T_z + X_\phi - \ddot{X}_\phi = 0, \\ M_{x,x} - T_{xz}^* + X_\gamma - \ddot{X}_\gamma &= 0, \quad R_{x,x} - M_{xz} - M_z \gamma + X_\psi - \ddot{X}_\psi = 0, \\ N_{x,x} - R_{xz} + X_\chi - \ddot{X}_\chi &= 0 \end{aligned} \quad (39)$$

для незакрепленного участка.

3. Иерархическая последовательность упрощенных моделей деформирования незакрепленного участка тест-образца

3.1. Модель С.П. Тимошенко с учетом поперечного обжатия. Если для перемещений U и W принять представления

$$U = u + z\gamma, \quad W = w + z\phi, \quad 0 \leq x \leq L, \quad (40)$$

то для определения компонент деформации вместо (7) приходим к более простым соотношениям

$$\varepsilon_{xx} = u_{,x} + \frac{1}{2} w_{,x}^2 + z(\gamma_{,x} + w_{,x} \varphi_{,x}), \quad (41)$$

$$\varepsilon_{zz} = \varphi + \frac{1}{2} \gamma^2, \quad \gamma_{xz} = \gamma + w_{,x} + z \varphi_{,x}.$$

Компонентам деформации (41) будет соответствовать выражение для вариации потенциальной энергии деформации незакрепленного участка

$$\delta \Pi = \int_0^L (T_x \delta u_{,x} + Q_{xz} \delta w_{,x} + M_x \delta \gamma_{,x} + M_{xz}^* \delta \varphi_{,x} + T_{xz}^* \delta \gamma + T_z \delta \varphi) dx, \quad (42)$$

где в рассматриваемом приближении вместо (9) имеют место выражения

$$\begin{aligned} Q_{xz} &= T_{xz} + T_x w_{,x} + M_x \varphi_{,x}, & T_{xz}^* &= T_{xz} + T_z \gamma, \\ M_{xz}^* &= M_{xz} + M_x w_{,x}. \end{aligned} \quad (43)$$

При сохранении для закрепленного участка образца представлений (4) и соответствующих им кинематических соотношений (11), в которых деформация ε_{zz}^0 вычисляется без сохранения подчеркнутых нелинейных слагаемых, можно получить вариационное уравнение вида (21). Из этого уравнения в силу кинематических условий сопряжения участков, записываемых в приближении

$$u|_{x=0} = u_0|_{x=0}, \quad \gamma|_{x=0} = \gamma_0|_{x=0}, \quad w|_{x=0} = w_0|_{x=0}, \quad \varphi|_{x=0} = -\frac{2}{t} w^* \quad (44)$$

взамен (5), следуют силовые условия сопряжения участков

$$(T_x^0 - T_x)|_{x=0} = 0, \quad (M_x^0 - M_x)|_{x=0} = 0, \quad (Q_{xz}^0 + S_x^0 w_{0,x} - Q_{xz})|_{x=0} = 0, \quad (45)$$

уравнения равновесия для закрепленного участка (22) и соответствующие им статические граничные условия

$$T_x^0|_{x=-l} = 0, \quad M_x^0|_{x=-l} = 0, \quad (Q_{xz}^0 + S_x^0 w_{0,x})|_{x=-l} = 0, \quad (46)$$

формулируемые в сечении $x = -l$, а также уравнения равновесия для незакрепленного участка

$$T_{x,x} = 0, \quad Q_{xz,x} = 0, \quad M_{x,x} - T_{xz}^* = 0, \quad M_{xz,x}^* - T_z = 0 \quad (47)$$

и соответствующие им граничные условия

$$u|_{x=L} = 0, \quad \gamma|_{x=L} = 0, \quad Q_{xz}|_{x=L} = 0, \quad M_{xz}^*|_{x=L} = 0, \quad (48)$$

формулируемые в сечении $x = L$.

При использовании соотношений (41) в предположении $v_{13} = 0$ вместо (17) приходим к соотношениям упругости

$$T_x = B_{11} \left(u_{,x} + \frac{1}{2} w_{,x}^2 \right), \quad T_z = B_{33} \left(\varphi + \frac{1}{2} \gamma^2 \right), \quad (49)$$

$$M_x = D_{11} (\gamma_{,x} + w_{,x} \varphi_{,x}), \quad T_{xz} = B_{13} (\gamma + w_{,x}), \quad M_{xz} = D_{13} \varphi_{,x}.$$

3.2. Простейшая сдвиговая модель С.П. Тимошенко. Если вместо (40) принять наиболее часто употребляемое представление

$$U = u + z\gamma, \quad W = w \quad (50)$$

и упрощение $\sigma_{zz} = 0$, то вместо (41) при среднем изгибе приходим к упрощенным соотношениям

$$\varepsilon_{xx} = u_{,x} + \frac{1}{2} w_{,x}^2 + z\gamma_{,x}, \quad \gamma_{xz} = \gamma + w_{,x}. \quad (51)$$

В силу соотношений (51) и $\sigma_{zz} = 0$ вместо (42) приходим к выражению

$$\delta\Pi = \int_0^L (T_x \delta u_{,x} + Q_{xz} \delta w_{,x} + M_x \delta \gamma_{,x} + T_{xz} \delta \gamma) dx, \quad (52)$$

в котором, в отличие от (43) и (49),

$$\begin{aligned} Q_{xz} &= T_{xz} + T_x w, & T_x &= B_{11} \left(u_{,x} + \frac{1}{2} w_{,x}^2 \right), \\ M_x &= D_{11} \gamma_{,x}, & T_{xz} &= B_{13} (\gamma + w_{,x}). \end{aligned} \quad (53)$$

В рассматриваемом приближении для незакрепленного участка будут иметь место уравнения равновесия

$$T_{x,x} = 0, \quad Q_{xz,x} = 0, \quad M_{x,x} - T_{xz} = 0. \quad (54)$$

Для них и уравнений (22) в сечении $x = 0$ сохраняют силу условия сопряжения участков (44) (без последнего условия) и (45), а также условия (48) (без последнего условия).

3.3. Классическая модель Кирхгофа–Лява. Модель основана на представлении функций U и W в виде

$$U = u - z w_{,x}, \quad W = w \quad (55)$$

и предположении о том, что $\sigma_{zz} = 0$. В соответствии с (55) при среднем изгибе имеют место соотношение

$$\varepsilon_{xx} = u_{,x} + \frac{1}{2} w_{,x}^2 - z w_{,xx} \quad (56)$$

и выражение

$$\begin{aligned} \delta\Pi &= \int_0^L (T_x \delta u_{,x} + T_x w_{,x} \delta w_{,x} - M_x \delta w_{,xx}) dx = T_x \delta u \Big|_{x=L} - T_x \delta u \Big|_{x=0} - \\ &- M_x \delta w_{,x} \Big|_{x=L} + M_x \delta w_{,x} \Big|_{x=0} + S_{xz} \delta w \Big|_{x=0}^z=L - \int_0^L (T_{x,x} \delta u + S_{xz,x} \delta w) dx, \end{aligned} \quad (57)$$

где, в отличие от (53),

$$\begin{aligned} T_x &= B_{11} \left(u_{,x} + \frac{1}{2} w_{,x}^2 \right), & M_x &= -D_{11} w_{,xx}, \\ S_{xz} &= M_{x,x} + T_x w_{,x} = -D_{11} w_{,xxx} + T_x w_{,x}. \end{aligned} \quad (58)$$

В рассматриваемом приближении для незакрепленного участка стандартным путем выводится система уравнений равновесия

$$T_{x,x} = 0, \quad S_{xz,x} = (-D_{11} w_{,xxx} + T_x w_{,x})_{,x} = 0, \quad (59)$$

для которых в сечении $x = L$ формулируются граничные условия

$$u \Big|_{x=L} = 0, \quad w_{,x} \Big|_{x=L} = 0, \quad (-D_{11} w_{,xxx} + T_x w_{,x}) \Big|_{x=L} = 0, \quad (60)$$

а в сечении $x = 0$ формулируются кинематические и силовые условия сопряжения участков

$$(u - u_0)|_{x=0} = 0, \quad (w_{,x} + \gamma_0)|_{x=0} = 0, \quad (T_x - T_x^0)|_{x=0} = 0, \quad (M_x - M_x^0)|_{x=0} = 0. \quad (61)$$

Кроме того, для второго уравнения системы (59) в сечении $x = 0$ формулируется граничное условие $w|_{x=0} = 0$.

Заключение

Предложенная уточненная трансформационная математическая модель и построенные на ее основе соответствующие уравнения предназначены для описания процесса геометрически и физически нелинейного деформирования стержня-полосы (тест-образца) из волокнистого композита прямоугольного поперечного сечения, имеющего участки крепления в приспособлении для испытаний на осевое растяжение (сжатие). Возможность выявления на их основе неклассических поперечно-сдвиговых форм потери устойчивости образцов при их испытаниях обусловлена, главным образом, появлением и сохранением в уравнениях таких слагаемых, которые обеспечивают необходимую степень точности и содержательности при постановке и решении соответствующих задач. Вследствие особенностей закрепления стержня (тест-образца) в приспособлении для испытаний на растяжение и сжатие, как показывает анализ существующей научной литературы и результатов физических экспериментов, имеет место концентрация поперечных касательных и нормальных напряжений в зоне перехода закрепленного участка к рабочей части. Локализованный характер формирующегося в таких зонах НДС для нахождения решений формулируемых краевых задач требует использования численных методов, устойчивых к сильному сгущению сетки для точного определения компонент НДС. Одним из таких методов, как показано в статье [28], является метод конечных сумм в варианте интегрирующих матриц [29]. Его применение требует сведения исходных уравнений задачи к интегральным уравнениям с операторами Вольтерра второго рода, что предполагается показать в последующих статьях.

Список литературы

1. Полилов А.Н. *Этюды по механике композитов*. М.: Физматлит, 2016. 320 с.
2. Xie M., Adams D.F. Effect of loading method on compression testing of composite materials. *Journal of Composite Materials*. 1995. Vol. 29. No 12. P. 1581–1600. <https://doi.org/10.1177/002199839502901203>.
3. Lee J., Soutis C. A study on the compressive strength of thick carbon fibre-epoxy laminates. *Composites Science and Technology*. 2007. Vol. 67. Iss. 10. P. 2015–2026. DOI: 10.1016/j.compscitech.2006.12.001.
4. Lee J., Soutis C. Thickness effect on the compressive strength of T800/924C carbon fibre-epoxy laminates. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*. 2005. Vol. 36. Iss. 2. P. 213–227. DOI: 10.1016/j.compositesa.2004.06.010.
5. Adams D.F., Odom E.M. Influence of specimen tabs of the compressive strength of a unidirectional composite material. *Journal of Composite Materials*. 1991. Vol. 25. Iss. 6. P. 774–786.
6. Adams D.F., Lewis E.Q. Influence of specimen gage length and loading method on the axial compressive strength of a unidirectional composite material. *Experimental Mechanics*. 1991. Vol. 31. P. 14–20.
7. Xie M., Adams D.F. A plasticity model for unidirectional composite materials and its applications in modeling composites testing. *Composites Science and Technology*. 1995. Vol. 54. P. 11–21.

8. Odom E.M., Adams D.F. Failure modes of unidirectional carbon/epoxy composite compression specimens. *Composites*. 1990. Vol. 21. Iss. 4. P. 289–296. [https://doi.org/10.1016/0010-4361\(90\)90343-U](https://doi.org/10.1016/0010-4361(90)90343-U).
9. Паймушин В.Н., Холмогоров С.А., Макаров М.В., Левшонкова Н.В., Шишов М.А. Формы потери устойчивости и разрушения тест-образцов из волокнистых композитов со структурой $[0^\circ]_s$ при испытаниях на осевое сжатие. *Теория и эксперимент. Ученые записки Казанского университета. Серия физико-математические науки*. 2025. Т. 167. №2. С. 282–310.
10. Paimushin V.N. Plane mechanical problems of straight beams with a deformable fixed section of finite length. *Russian Mathematics*. 2022. Vol. 66. No 3. P. 75–81. DOI: 10.3103/S1066369X22030082.
11. Paimushin V.N., Shishkin V.M. Deformation of thin-walled structural elements having fixed areas of finite dimensions on the boundary front surfaces. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2023. Vol. 64. Iss. 2. P. 308–324. <https://doi.org/10.15372/PMTF20230215>.
12. Paimushin V.N., Firsov V.A., Shishkin V.M., Gazizullin R.K. Transformational deformation models of continuous thin-walled structural elements with support elements of finite sizes: Theoretical foundations, computational, and physical experiments. *ZAMM Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*. 2023. Vol. 104. Iss. 2. P. 1–32. <https://doi.org/10.1002/zamm.202300214>.
13. Reddy J.N. A simple higher-order theory for laminated composite plates. *Journal of Applied Mechanics*. 1984. Vol. 51. Iss. 4. P. 745–752. <https://doi.org/10.1115/1.3167719>.
14. Librescu L. Refined geometrically non-linear theories of anisotropic laminated shells. *Quarterly of Applied Mathematics*. 1987. Vol. 45. No 1. P. 1–22. DOI: <https://doi.org/10.1090/qam/885164>.
15. Schmidt R., Reddy J.N. A refined small strain and moderate rotation theory of elastic anisotropic shells. *Journal of Applied Mechanics*. 1988. Vol. 55. Iss. 3. P. 611–617. DOI: 10.1115/1.3125837.
16. Librescu L., Schmidt R. Refined theories of elastic anisotropic shells accounting for small strains and moderate rotations. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 1988. Vol. 23. Iss. 3. P. 217–229. [https://doi.org/10.1016/0020-7462\(88\)90013-3](https://doi.org/10.1016/0020-7462(88)90013-3).
17. Reddy J.N. A general non-linear third-order theory of plates with moderate thickness. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 1990. Vol. 25. Iss. 6. P. 677–686. [https://doi.org/10.1016/0020-7462\(90\)90006-U](https://doi.org/10.1016/0020-7462(90)90006-U).
18. Librescu L., Schmidt R. Substantiation of a shear-deformable theory of anisotropic composite laminated shells accounting for the interlaminar continuity conditions. *International Journal of Engineering Science*. 1991. Vol. 29. Iss. 6. P. 669–683. [https://doi.org/10.1016/0020-7225\(91\)90097-M](https://doi.org/10.1016/0020-7225(91)90097-M).
19. Basar Y., Ding Y., Schultz R. Refined shear-deformation models for composite laminates with finite rotations. *International Journal of Solids and Structures*. 1993. Vol. 30. Iss. 19. P. 2611–2638. [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(93\)90102-D](https://doi.org/10.1016/0020-7683(93)90102-D).
20. Gruttmann F., Wagner W. A linear quadrilateral shell element with fast stiffness computation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2005. Vol. 194. Iss. 39–41. P. 4279–4300. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2004.11.005>.
21. Gruttmann F., Wagner W. Structural analysis of composite laminates using a mixed hybrid shell element. *Computational Mechanics*. 2006. Vol. 37. P. 479–497. <https://doi.org/10.1007/s00466-005-0730-1>.
22. Schmidt R., Vu. T.D. Nonlinear dynamic FE simulation of smart piezolaminated structures based on first- and third-order transverse shear deformation theory. *Advanced Materials Research*. 2009. Vol. 79–82. P. 1313–1316. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMR.79-82.1313>.
23. Yankovskii A.P. Critical analysis of the equations of statics in the bending theories of composite plates obtained on the basis of variational principles of elasticity theory 1. General theories of high order. *Mechanics of Composite Materials*. 2020. Vol. 56. Iss. 3. P. 271–290. <https://doi.org/10.1007/s11029-020-09880-8>.
24. Yankovskii A.P. Critical analysis of the equations of statics in the bending theories of

composite plates obtained on the basis of variational principles of elasticity theory 2. Particular low-order theories. *Mechanics of Composite Materials*. 2020. Vol. 56. Iss. 4. P. 437–454. <https://doi.org/10.1007/s11029-020-09895-1>.

25. Паймушин В.Н., Шалашилин В.И. Непротиворечивый вариант теории деформаций сплошных сред в квадратичном приближении. *Доклады Академии наук*. 2004. Т. 396. №4. С. 492–495.

26. Паймушин В.Н., Шалашилин В.И. О соотношениях теории деформаций в квадратичном приближении и проблемы построения уточненных вариантов геометрически нелинейной теории слоистых элементов конструкций. *Прикладная математика и механика*. 2005. Т. 69. №5. С. 861–881.

27. Paimushin V.N., Chate A.K., Kholmogorov S.A., Makarov M.V., Gazizullin R.K. Multi-scale buckling modes in the mechanics of fiber-reinforced plastics. Part of the book series: *Advanced Structured Materials*. Vol. 207. Springer, 2024. 164 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-031-48216-8>.

28. Даутов Р.З., Паймушин В.Н. О методе интегрирующих матриц решения краевых задач для обыкновенных уравнений четвертого порядка. *Изв. вузов. Математика*. 1996. №10. С. 13–25.

29. Вахитов М.Б. Интегрирующие матрицы – аппарат численного решения дифференциальных уравнений строительной механики. *Изв. вузов. Авиационная техника*. 1966. №3. С. 50–61.

References

1. Polilov A.N. *Etyudy po mekhanike kompozitov* [Studies on Mechanics of Composites]. Moscow. Fizmatlit. 2016. 320 p. (In Russian).

2. Xie M., Adams D.F. Effect of loading method on compression testing of composite materials. *J. Compos. Mater.* 1995. Vol. 29. No 12. P. 1581–1600. <https://doi.org/10.1177/002199839502901203>.

3. Lee J., Soutis C. A study on the compressive strength of thick carbon fibre-epoxy laminates. *Compos. Sci. Technol.* 2007. Vol. 67. Iss. 10. P. 2015–2026. DOI:10.1016/j.compscitech.2006.12.001.

4. Lee J., Soutis C. Thickness effect on the compressive strength of T800/924C carbon fibre-epoxy laminates. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*. 2005. Vol. 36. Iss. 2. P. 213–227. DOI: 10.1016/j.compositesa.2004.06.010.

5. Adams D.F., Odom E.M. Influence of specimen tabs on the compressive strength of a unidirectional composite material. *J. Compos. Mater.* 1991. Vol. 25. Iss. 6. P. 774–786.

6. Adams D.F., Lewis E.Q. Influence of specimen gage length and loading method on the axial compressive strength of a unidirectional composite material. *Exp. Mech.* 1991. Vol. 31. P. 14–20.

7. Xie M., Adams D.F. A plasticity model for unidirectional composite materials and its applications in modeling composites testing. *Compos. Sci. Techno.* 1995. Vol. 54. P. 11–21.

8. Odom E.M., Adams D.F. Failure modes of unidirectional carbon/epoxy composite compression specimens. *Composites*. 1990. Vol. 21. Iss. 4. P. 289–296. [https://doi.org/10.1016/0010-4361\(90\)90343-U](https://doi.org/10.1016/0010-4361(90)90343-U).

9. Paimushin V.N., Kholmogorov S.A., Makarov M.V., Levshonkova N.V., Shishov M.A. Formy poteri ustoychivosti i razrusheniya test-obraztsov iz voloknistykh kompozitov so strukturoy $[0^\circ]_s$ pri ispytaniyakh na osevoe szhatie. Teoriya i eksperiment [Buckling modes and failure of test specimens from fiber-reinforced composites with a $[0^\circ]_s$ layup under axial compression. Theory and experiment]. *Uchenye zapiski Kazanskogo universiteta. Seriya fiziko-matematicheskie nauki*. 2025. Vol. 167. No 2. P. 282–310 (In Russian).

10. Paimushin V.N. Plane mechanical problems of straight beams with a deformable fixed section of finite length. *Russian Mathematics*. 2022. Vol. 66. No 3. P. 75–81. DOI: 10.3103/S1066369X22030082.

11. Paimushin V.N., Shishkin V.M. Deformation of thin-walled structural elements having fixed areas of finite dimensions on the boundary front surfaces. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 2023. Vol. 64. Iss. 2. P. 308–324. <https://doi.org/10.15372/PMTF20230215>.

12. Paimushin V.N., Firsov V.A., Shishkin V.M., Gazizullin R.K. Transformational deformation models of continuous thin-walled structural elements with support elements of finite sizes: Theoretical foundations, computational, and physical experiments. *ZAMM Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*. 2023. Vol. 104. Iss. 2. P. 1–32. <https://doi.org/10.1002/zamm.202300214>.
13. Reddy J.N. A simple higher-order theory for laminated composite plates. *J. Appl. Mech.* 1984. Vol. 51. Iss. 4. P. 745–752. <https://doi.org/10.1115/1.3167719>.
14. Librescu L. Refined geometrically non-linear theories of anisotropic laminated shells. *Quart. Appl. Math.* 1987. Vol. 45. No 1. P. 1–22. DOI: <https://doi.org/10.1090/qam/885164>.
15. Schmidt R., Reddy J.N. A refined small strain and moderate rotation theory of elastic anisotropic shells. *J. Appl. Mech.* 1988. Vol. 55. Iss. 3. P. 611–617. DOI: 10.1115/1.3125837.
16. Librescu L., Schmidt R. Refined theories of elastic anisotropic shells accounting for small strains and moderate rotations. *Int. J. Non-Linear Mech.* 1988. Vol. 23. Iss. 3. P. 217–229. [https://doi.org/10.1016/0020-7462\(88\)90013-3](https://doi.org/10.1016/0020-7462(88)90013-3).
17. Reddy J.N. A general non-linear third-order theory of plates with moderate thickness. *Int. J. Non-Linear Mech.* 1990. Vol. 25. Iss. 6. P. 677–686. [https://doi.org/10.1016/0020-7462\(90\)90006-U](https://doi.org/10.1016/0020-7462(90)90006-U).
18. Librescu L., Schmidt R. Substantiation of a shear-deformable theory of anisotropic composite laminated shells accounting for the interlaminar continuity conditions. *Int. J. Eng. Sci.* 1991. Vol. 29. Iss. 6. P. 669–683. [https://doi.org/10.1016/0020-7225\(91\)90097-M](https://doi.org/10.1016/0020-7225(91)90097-M).
19. Basar Y., Ding Y., Schultz R. Refined shear-deformation models for composite laminates with finite rotations. *Int. J. Solids Struct.* 1993. Vol. 30. Iss. 19. P. 2611–2638. [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(93\)90102-D](https://doi.org/10.1016/0020-7683(93)90102-D).
20. Gruttmann F., Wagner W. A linear quadrilateral shell element with fast stiffness computation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2005. Vol. 194. Iss. 39–41. P. 4279–4300. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2004.11.005>.
21. Gruttmann F., Wagner W. Structural analysis of composite laminates using a mixed hybrid shell element. *Comp. Mech.* 2006. Vol. 37. P. 479–497. <https://doi.org/10.1007/s00466-005-0730-1>.
22. Schmidt R., Vu. T.D. Nonlinear dynamic FE simulation of smart piezolaminated structures based on first- and third-order transverse shear deformation theory. *Adv. Mat. Res.* 2009. Vol. 79–82. P. 1313–1316. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMR.79-82.1313>.
23. Yankovskii A.P. Critical analysis of the equations of statics in the bending theories of composite plates obtained on the basis of variational principles of elasticity theory 1. General theories of high order. *Mech. Compos. Mater.* 2020. Vol. 56. Iss. 3. P. 271–290. <https://doi.org/10.1007/s11029-020-09880-8>.
24. Yankovskii A.P. Critical analysis of the equations of statics in the bending theories of composite plates obtained on the basis of variational principles of elasticity theory 2. Particular low-order theories. *Mech. Compos. Mater.* 2020. Vol. 56. Iss. 4. P. 437–454. <https://doi.org/10.1007/s11029-020-09895-1>.
25. Paimushin V.N., Shalashilin V.I. Consistent variant of continuum deformation theory in the quadratic approximation. *Doklady Physics*. 2004. Vol. 49. No 6. P. 374–377. DOI: 10.1134/1.1774064.
26. Paimushin V.N., Shalashilin V.I. The relations of deformation theory in the quadratic approximation and the problems of constructing improved versions of the geometrically non-linear theory of laminated structures. *J. Appl. Math. Mech.* 2005. Vol. 69. No 5. P. 773–791. DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2005.09.013.
27. Paimushin V.N., Chate A.K., Kholmogorov S.A., Makarov M.V., Gazizullin R.K. Multiscale buckling modes in the mechanics of fiber-reinforced plastics. Part of the book series: *Advanced Structured Materials*. Vol. 207. Springer. 2024. 164 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-031-48216-8>.
28. Dautov R.Z., Paimushin V.N. O metode integriruyushchikh matrits resheniya kraevykh zadach dlya obyknovennykh uravneniy chetvertogo poryadka [The method of integrating matrices for solving boundary value problems for fourth order ordinary equations]. *Izvestiya vuzov. Matematika*. 1996. Vol. 10. P. 13–25 (In Russian).

29. Vakhitov M.B. Integriruyushchiye matritsy apparat chislennogo resheniya differentsialnykh uravneniy stroitel'noy mekhaniki [Integrating matrices apparatus for numerical solution of differential equations of structural mechanics]. *Izvestiya vuzov. Aviatcionnaya tekhnika* [Russian Aeronautics]. 1966. Vol. 3. P. 50–61 (In Russian).

KINEMATIC LOADING OF SEMI-INFINITE SPECIMEN WITH TWO SIDED FIXED SECTIONS. 1. THEORETICAL BASIS*

Paimushin V.N.¹, Shishkin V.M.²

¹*Kazan National Research Technical University n.a. A.N. Tupolev,
Kazan, Russian Federation*

²*Iyarka State University, Kirov, Russian Federation*

vpajmushin@mail.ru

Received by the Editor 2025/04/17

A hierarchical sequence of transformation mathematical models of geometrically nonlinear deformation of a semi-infinite rod (test specimen) consisting of an free and two sided fixed end sections along its length is constructed. It is assumed that its axial tension and compression are carried out by kinematic loading of the fixed section due to friction forces arising between the bar and rigid elements of the device. It ensuring the implementation of one of the known loading schemes in accordance with existing test standards. In the two sided fixed section of the rod, the loading method under consideration also ensures compression of the rod in the transverse direction. The equations constructed for the fixed sections are based on the cubic approximation of the axial displacements through the thickness and the quadratic approximation of the deflection. Equations transformed into another model by subordinating them at the points of the boundary surfaces to the conditions of kinematic conjugation with the rigid elements of the device for testing with specified displacements. For the free section, a cubic approximation is adopted for the axial displacements through the rod thickness, and a linear approximation is adopted for the deflection. In addition the well-known Timoshenko models with and without transverse compression and the classical Kirchhoff – Love model are also used. The one-dimensional geometrically nonlinear kinematic relations derived for the adopted deformation models are based on the use of the relations of the elasticity theory, written in a simplified quadratic approximation. They retain such geometrically nonlinear terms that, having the required degree of accuracy and meaningfulness, allow us to identify both classical bending and non-classical transverse-shear buckling modes of rods during their static tests for compression and bending. For all adopted deformation models, kinematic conditions for conjugation of sections have been compiled, using which, based on the Lagrange variational principle, equilibrium equations for rod sections and static (force) conditions for conjugation of their solutions have been obtained. Based on the analysis of the constructed equations, it has been shown that transverse compression of the rod in the fastening sections during dynamic deformation processes of continuous rods facilitates the transformation of bending modes of oscillations of the unfastened section into longitudinal-transverse-shear modes of oscillations of the fastened section.

Keywords: fibrous composite, semi-infinite rod, test specimen, fixed and free sections, tension and compression, geometric nonlinearity, transformational refined deformation model, kinematic loading.

*The study was carried out within the framework of the state assignment of the Ministry of Education and Science of Russia (project FZSU-2024-0010, sections 1, 3) and at the expense of the Russian Science Foundation (project No 23-19-00021, section 2).