УДК 539.4

ДИНАМИЧЕСКОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ СЛОИСТЫХ ПЛАСТИН ИЗ ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКИХ И УПРОЧНЯЮЩИХСЯ МАТЕРИАЛОВ

Ю.В. Немировский

Новосибирск

На основе модели жесткопластического тела разработана математическая модель гашения полиметаллическими плоскими преградами энергии взрывных нагрузок при учете эффектов инерции вращения, упрочнения и вязкопластического сопротивления материалов. Сформулирована задача о рациональном распределении материалов в преграде, обеспечивающем минимальную степень остаточной повреждаемости. Выполненные конкретные расчеты показывают, что за счет перераспределения материалов в плоской преграде можно в широком диапазоне изменять остаточную форму прогиба.

В настоящее время в качестве эффективных защитных элементов различных ответственных объектов и технических устройств при воздействии нагрузок взрывного типа могут быть использованы плоские многослойные конструкции. Разработаны разнообразные технологии изготовления полиметаллических плоских элементов практически любых размеров и форм, без серьезных ограничений по выбору материалов [1]. В любой такой конструкции сохранятся индивидуальные свойства материалов отдельных слоев, но при этом она будет обладать специфическими свойствами динамического сопротивления в зависимости от выбора количества материалов, их расположения и относительных параметров толщин слоев. Выбор наиболее эффективной защитной слоистой преграды экспериментальными методами представляется весьма дорогостоящим и трудоемким. Для получения оперативных оценок динамического сопротивления полиметаллических преград без больших материальных и временных затрат необходимо построить достаточно простую математическую модель гашения полиметаллическими плоскими преградами энергии приходящих взрывных волн за счет развития пластических деформаций при учете эффектов инерции вращения, упрочнения и вязкопластического сопротивления материалов.

Рассматривая далее слоистые полиметаллические пластины, симметричные относительно отсчетной (нейтральной) плоскости, при воздействии распределенной динамической нагрузки для безразмерных напряжений в слоях на основе уравнений вязкопластического деформирования Ишлинского–Леви–Мизеса будем иметь зависимости:

$$\sigma_1 = \frac{\Phi(\varepsilon_u)}{\varepsilon_u}(2\varepsilon_1 + \varepsilon_2), \quad \sigma_2 = \frac{\Phi(\varepsilon_u)}{\varepsilon_u}(2\varepsilon_2 + \varepsilon_1), \tag{1}$$

$$\tau = \frac{\Phi(\varepsilon_u)}{\varepsilon_u}\gamma, \quad \varepsilon_1 = -z\chi_1, \quad \varepsilon_2 = -z\chi_2, \quad \gamma = -2z\omega;$$

$$\varepsilon_u = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2^2 + \omega^2}, \quad \Phi(\varepsilon_u) = \sigma_0 + B\varepsilon_u^n,$$

$$\sigma_j = \frac{\overline{\sigma}_j}{\sigma_0^0} \quad (j = 1,2), \quad \tau = \frac{\overline{\tau}}{\sigma_0^0}, \quad \sigma_0 = \frac{\overline{\sigma}_0}{\sigma_0^0}, \quad z = \frac{\overline{z}}{H_0}, \tag{2}$$

$$\chi_i = \frac{\partial^2\overline{v}}{\partial\overline{x}_i^2} \quad (i = 1,2), \quad \omega = \frac{\partial^2\overline{v}}{\partial\overline{x}_1\partial\overline{x}_2}, \quad \overline{v} = \frac{\partial\overline{w}}{\partial\overline{t}},$$

где σ_0^0, H_0 – характерные значения предела текучести и толщины пластины; B – коэффициент вязкого сопротивления. Черточками сверху помечены размерные величины: $\overline{w}$ – прогиб, $\overline{t}$ – время, $\overline{\sigma}_j$ – напряжение, $\overline{\sigma}_0$ – предел текучести, $\overline{z}$ – поперечная координата.

При осесимметричном изгибе круглых или кольцевых слоистых пластин уравнения динамического движения с учетом эффекта инерции поворота будут иметь вид:

$$\frac{\partial}{\partial r}(rQ) + \frac{rq}{\zeta} = m\dot{\upsilon},$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(rM_1) - M_2 - \frac{rQ}{\zeta} = m_1\dot{\theta},$$

$$m(r) = 2r\sum_{i=1}^{n}\rho_i(h_i - h_{i-1}), \tag{3}$$

$$m_1(r) = \frac{2r\zeta}{3}\sum_{i=1}^{n}\rho_i(h_i^3 - h_{i-1}^3) \quad (h_0 = 0),$$

где Q, q – безразмерные перерезывающая сила и распределенная поперечная нагрузка; M_1, M_2 – безразмерные радиальный и окружный моменты.

Здесь при учете зависимостей (1), (2) для моментов M_1, M_2 имеем выражения:

$$M_1 = \frac{2\chi_1 + \chi_2}{\chi_u}(M_0 + F(\upsilon)), \quad M_2 = \frac{2\chi_2 + \chi_1}{\chi_u}(M_0 + F(\upsilon)),$$

$$M_0 = 2\sum_{i=1}^{n}\sigma_{0i}(h_i^2 - h_{i-1}^2), \quad F(\upsilon) = 2\sum_{i=1}^{n}\frac{B_i(h_i^{n_i+2} - h_{i-1}^{n_i+2})}{n_i + 2}\chi_u^{n_i},$$

$$\chi_u = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\chi_1^2 + \chi_2^2 + \chi_1\chi_2}, \quad \upsilon = \dot{w}, \quad \theta = \frac{\partial\upsilon}{\partial r}, \tag{4}$$

$$\zeta = \frac{H_0}{R}, \quad h_i = \frac{H_i}{H_0}, \quad w = \frac{\overline{w}}{H_0}, \quad r = \frac{\overline{r}}{R}, \quad t = \frac{\overline{t}}{t_0^0},$$

$$\rho_i = \frac{\overline{\rho}_i H_0 R}{\sigma_0^0(t_0^0)^2}, \quad \chi_1 = \frac{\partial^2\upsilon}{\partial r^2}, \quad \chi_2 = \frac{1}{r}\frac{\partial\upsilon}{\partial r}, \quad M_i = \frac{\overline{M}_i}{\sigma_0^0 H_0{}^2}.$$

где R – безразмерный внешний радиус пластины. Точка обозначает частную производную по безразмерному времени t. Исключая из (3) функцию Q, получим разрешающее уравнение

$$L(\upsilon)=\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rM_1)-M_2\right]+\frac{\partial}{\partial r}\left(m_1\frac{\partial\dot{\upsilon}}{\partial r}\right)-m_2\dot{\upsilon}+rp=0,$$

$$m_2=\frac{m}{\zeta},\quad p=\frac{q}{\zeta^2}. \tag{5}$$

Если рассматривать задачу в декартовой системе координат (x_1, x_2), то разрешающее уравнение будет иметь вид:

$$L(w)=\frac{\partial^2 M_1}{\partial x_1^2}+2\frac{\partial^2 M_2}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{\partial^2 M_2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial}{\partial x_1}(m_1\dot{\theta}_1)+$$

$$+\frac{\partial}{\partial x_2}(m_1\dot{\theta}_2)-m_2\dot{\upsilon}+p=0,\quad \theta_i=\frac{\partial v}{\partial x_i},\quad i=1,2; \tag{6}$$

$$M=\frac{\chi}{\chi_u}[M_0+F(\upsilon)],\quad \chi=\frac{\partial^2\upsilon}{\partial x_1\partial x_2},$$

$$\chi_1=\frac{\partial^2\upsilon}{\partial x_1^2},\quad \chi_2=\frac{\partial^2\upsilon}{\partial x_2^2},\quad \chi_u=\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\chi_1^2+\chi_1\chi_2+\chi_2^2+\chi},\quad M=\frac{\overline{M}_{12}}{\sigma_0^0 H_0^2}. \tag{7}$$

Выражения для M_1, M_2 имеют вид (4), $\overline{M}_{12}$ – крутящий момент.

Разрешающие уравнения (5), (6) при учете зависимостей (4), (7) являются замкнутыми относительно скорости прогиба υ квазилинейными дифференциальными уравнениями в частных производных параболического типа, содержащими первые производные от υ по времени t и производные вплоть до четвертого порядка по координатам r, или x_1, x_2. Для численного интегрирования соответствующих начально-краевых задач могут быть использованы разработанные в [2] обобщенные методы Рунге–Кутта в сочетании на каждом временном слое итерационных процедур интегрирования по координатам, подобных решению задач теории ползучести [3]. Для прямоугольных пластин процедура интегрирования по этому методу описана в работе [4].

Однако во многих случаях можно получить достаточно надежные приближенные решения на основе метода Бубнова–Галеркина. Если для простоты и компактности формул использовать одинаковую степень аппроксимации вязкого упрочнения для всех слоев $n_i = S$ и при использовании метода Бубнова–Галеркина ограничиться первым приближением, то есть принять

$$w=A(t)\psi(x_1,x_2),$$

то из уравнения

$$\iint_S L(w)\psi(x_1,x_2)dS=0$$

для $\upsilon(t)$ получим следующее дифференциальное уравнение:

$$\dot{\upsilon}-d_1\upsilon^S=p_0 d_2\varphi(t)+d_3, \tag{8}$$

$$p = p_0\varphi(t), \quad d_1 = \frac{e_1}{e_2}, \quad d_2 = \frac{e_3}{e_2}, \quad d_3 = \frac{e_4}{e_2},$$

$$e_1 = \iint_S \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\left[\frac{2\chi_1 + \chi_2}{\chi_u} F_1\right] + 2\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}\left(\frac{\chi}{\chi_u} F_1\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\left[\frac{2\chi_2 + \chi_1}{\chi_u} F_1\right]\right\}\psi dS,$$

$$e_2 = \iint_S \left[m_2\psi - \frac{\partial}{\partial x_1}\left(m_1 \frac{\partial \psi}{\partial x_1}\right) - \frac{\partial}{\partial x_2}\left(m_1 \frac{\partial \psi}{\partial x_2}\right)\right]\psi dS,$$

$$e_3 = \iint_S \psi dS, \tag{9}$$

$$e_4 = \iint_S \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\left[\frac{2\chi_1 + \chi_2}{\chi_u} M_0\right] + 2\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}\left(\frac{\chi}{\chi_u} M_0\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\left[\frac{2\chi_2 + \chi_1}{\chi_u} M_0\right]\right\}\psi dS,$$

$$F_1 = \frac{2\chi_u^S}{S+2}\sum_{i=1}^{n} B_i (h_i^{S+2} - h_{i-1}^{S+2}),$$

$$\chi_u = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2}\right)^2 + \frac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_2^2} + \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x_2^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^2}.$$

При $S = 1$ уравнение (8) будет линейным и его решение при нулевой начальной скорости имеет вид:

$$\upsilon(t) = \frac{d_3}{d_1}(e^{d_1 t} - 1) + p_0 d_2 e^{d_1 t}\int_0^t \varphi(t) e^{-d_1 t} dt. \tag{10}$$

Время остановки t_* определяется из уравнения

$$\upsilon(t_*) = 0 \quad (t_* > 0), \tag{11}$$

а амплитуда остаточного прогиба A_* равна

$$A_* = \int_0^{t_*} \upsilon(t) dt. \tag{12}$$

Решение имеет смысл при $p_0 > p_0^*$, где p_0^* – предельная нагрузка, определяемая из уравнения (8) при $\dot{\upsilon}(0) = \upsilon(0) = 0$ и равная [5]:

$$p_0^* = -\frac{d_3}{d_2\varphi(0)}. \tag{13}$$

Если материалы всех слоев являются идеально пластическими, то решение в этом случае [5] получим из формул (10)–(12) при $d_1 \to 0$. Для жесткопластических упрочняющихся материалов на основе уравнений теории Генки–Ильюшина [6] будем иметь соотношения типа (1)–(7), если в них вместо скорости прогиба υ ввести прогиб w. Тогда в случае линейно упрочняющихся материалов для амплитуды прогиба $A(t)$ будем иметь уравнение

$$\ddot{A} - d_1 A = f(t), \quad f(t) \equiv p_0 d_2 \varphi(t) + d_3 .$$

Его решение при начальных условиях $\dot{A}(0) = A(0) = 0$ имеет вид:

$$A(t) = \frac{1}{2r_1}\left(e^{r_1 t}\int_0^t f(t)e^{-r_1 t}dt - e^{-r_1 t}\int_0^t f(t)e^{r_1 t}dt \right) \quad (r_1^2 = d_1),$$

$$\dot{A}(t) = \frac{1}{2r_1}\left(e^{r_1 t}\int_0^t f(t)e^{-r_1 t}dt + e^{-r_1 t}\int_0^t f(t)e^{r_1 t}dt \right). \tag{14}$$

Время остановки t_* определяется из уравнения $\dot{A}(t_1^*) = 0$, а амплитуда остаточного прогиба равна $A^* = A(t_1^*)$. Выбор функции $\psi(x_1, x_2)$ определяется формой пластины и условиями закрепления на контуре. Например, для защемленной эллиптической пластины

$$\psi(x_1, x_2) = \left(\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} - 1 \right)^2 , \tag{15}$$

а для прямоугольной пластины

$$\psi(x_1, x_2) = \sin^r\left(\frac{\pi x_1}{a_1} \right)\sin^q\left(\frac{\pi x_2}{a_2} \right), \tag{16}$$

где a_1, a_2 – безразмерные размеры полуосей эллипса и сторон прямоугольника, $r =$ $= 1$ соответствует шарнирному опиранию на краях $x_1 = 0$, a_1; $r = 2$ соответствует защемлению на этих краях; $q = 1$ соответствует шарнирному закреплению на краях $x_2 = 0$, a_2 и $q = 2$ – защемлению на этих краях.

Полученные аналитические формулы для амплитуды остаточного прогиба A_* позволяют рассмотреть задачу о рациональном распределении материалов в слоистой преграде, обеспечивающих минимальную степень остаточной повреждаемости преграды при взаимодействии нагрузок взрывного типа. Для этого целесообразно предварительно ввести определенный критерий качества. Будем рассматривать эталонную однослойную конструкцию и сравнивать между собой пластины одинаковых форм при одинаковых условиях нагружения и закрепления при совпадении их массы, то есть при выполнении условия

$$\rho H = F(h_1, ..., h_n), \quad F = \sum_{i=1}^{n} \rho_i (h_i - h_{i-1}). \tag{17}$$

Оптимальной будем считать конструкцию, в которой для амплитуды остаточного прогиба выполняется требование

$$A_{**} = \min_{0 \le h_1 \le h_2 \le \ldots \le h_n} A_*(h_1, \ldots, h_n). \qquad (18)$$

Решение такой задачи сводится к определению минимума функции

$$Z(h_1, \ldots, h_n) = A_* + \lambda F,$$

где λ – множитель Лагранжа. (Процедура эта известна и здесь описываться не будет.)

Ясно, что для слоистых конструкций помимо параметров толщины слоев важное значение имеет также выбор материалов и порядок их расположения.

Приведем некоторые результаты расчетов для защемленных прямоугольных пластин из вязкопластических материалов, нагружаемых распределенной поперечной нагрузкой интенсивности $p(t) = P_m \exp(-t/\theta)$, $P_m = 16$ МПа, $\theta = 3{,}36 \cdot 10^{-5}$ с.

Механические характеристики материалов взяты из [7, 8] и приведены в табл. 1.

Таблица 1

№ материала	Материал	σ_0, МПа	B, кПа·с	ρ, кг/м^3
1	Сталь 3	340	40	7850
2	Медь	70	25	8930
3	Сталь 20	250	31,5	7850

При одинаковой массе однослойных конструкций (2000 кг) и одинаковой площади ($a = 2$ м, $b = 1$ м) для рассматриваемых материалов получены толщины и остаточные прогибы (табл. 2).

Таблица 2

№ материала	Материал	$2H \cdot 10^3$, м	$A_* \cdot 10^3$, м
1	Сталь 3	13	1,4
2	Медь	11,4	9,1
3	Сталь 20	13	1,9

Далее для сравнения со слоистыми конструкциями использовалась эталонная конструкция из материала Ст 3. В табл. 3, 4 приведены значения амплитуд остаточных прогибов для конструкций из двух ("двухслойные") и трех ("трехслойные" пластины) материалов соответственно. Координаты раздела слоев (h_1, h_2, h_3) отсчитываются от нейтральной поверхности.

Таблица 3

№ варианта	№ слоя	Расположение материалов	Границы раздела слоев ($h_1 \cdot 10^3$, $h_2 \cdot 10^3$, м)	Остаточный прогиб ($A_* \cdot 10^3$, м)
1	(2)	Медь	4,7	7,8
	(1)	Сталь 3	2,3	
2	(2)	Сталь 20	3,8	1,7
	(1)	Сталь 3	5,9	
3	(2)	Сталь 3	1,7	2,8
	(1)	Медь	8,4	
4	(2)	Сталь 20	2,7	2,9
	(1)	Медь	6,7	
5	(1)	Сталь 3	3,4	1,3
	(2)	Сталь 20	5,4	
6	(1)	Медь	3,7	5,9
	(2)	Сталь 20	4,6	

Таблица 4

№ варианта	№ слоя	Расположение материалов	Границы раздела слоев ($h_1 \cdot 10^3$, $h_2 \cdot 10^3$, м)	Остаточный прогиб ($A_* \cdot 10^3$, м)
1	(3)	Сталь 20	3,4	2,5
	(2)	Медь	2,3	
	(1)	Сталь 3	1,3	
2	(3)	Медь	3,9	1,3
	(2)	Сталь 20	1,9	
	(1)	Сталь 3	0,9	
3	(3)	Сталь 20	3,2	1,8
	(2)	Сталь 3	2,7	
	(1)	Медь	1,1	
4	(3)	Сталь 3	3,4	5,9
	(2)	Сталь 20	1,8	
	(1)	Медь	0,9	
5	(3)	Медь	4,0	5,2
	(2)	Сталь 3	1,6	
	(1)	Сталь 20	0,8	
6	(3)	Сталь 3	2,5	4,0
	(2)	Медь	3,2	
	(1)	Сталь 20	0,8	

Видно, что за счет перераспределения материалов в слоистой пластине можно в широком диапазоне изменять остаточную форму при воздействии нагрузок взрывного типа. Это обстоятельство является очень важным как при оценке защитных качеств слоистых преград, так и при разработке технологических приемов изготовления полиметаллических конструкций методом штамповки взрывом.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 05-01-00161-а).

Литература

1. *Король, В.К.* Основы производства многослойных металлов / В.К. Король, М.С. Гильдергорн. – М.: Металлургия. – 237 с.

2. *Немировский, Ю.В.* Обобщение методов Рунге–Кутта и их применение к интегрированию начально-краевых задач математической физики / Ю.В. Немировский, А.П. Янковский // Сибирский журнал вычислительной математики. – 2005. – Т. 8, № 1. – С. 51–76.

3. *Качанов, Л.М.* Теория ползучести / Л.М. Качанов. – М.: Физматгиз, 1960.

4. *Немировский, Ю.В.* Упругопластическая динамика прямоугольных композитных пластин / Ю.В. Немировский, А.П. Янковский // Проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сб. / Нижегород. ун-т. – 2006. – Вып. 68. – С. 78–85.

5. *Немировский, Ю.В.* Рациональное проектирование плоских слоистых преград при воздействии взрывных нагрузок / Ю.В. Немировский // Современные методы математического моделирования природных и антропогенных катастроф: Тр. VII Всероссийск. научн. конф., Красноярск 13–17 окт. 2003 . – Красноярск, 2003. – Т. 1. – С. 191–194.

6. *Васидзу, К.* Вариационные методы в теории упругости и пластичности / К. Васидзу. – М.: Мир, 1987. – 542 с.

7. *Степанов, Г.В.* Упругопластическое деформирование материалов под воздействием импульсных нагрузок / Г.В. Степанов. – Киев: Наукова думка, 1979. – 226 с.

8. Высокоскоростное взаимодействие тел / Под ред. В.М. Фомина. – Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1999. – 326 с.

[03. 09. 2007]

DYNAMIC RESISTANCE OF LAMINATED PLATES OF VISCOPLASTIC AND HARDENING MATERIALS

Yu.V. Nemirovskiy

Based on the model of a rigid-plastic body a mathematical model of suppressing explosion load energy using poly-metallic plane barriers is developed allowing for the effects of rotation inertia, strengthening and viscoplastic resistance of the materials. A problem on the rational distribution of materials in the barrier, providing a minimum degree of residual damage, is formulated. The specific calculations made show that it is possible to change the residual form of the bending in a wide range due to the material redistribution in the plane barrier.