

УДК 539.3

DOI: 10.32326/1814-9146-2025-87-3-273-284

ОСЕССИММЕТРИЧНАЯ НЕСТАЦИОНАРНАЯ ДИНАМИКА УПРУГИХ МОМЕНТНЫХ СФЕРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

© 2025 г. Тарлаковский Д.В.^{1,2}, Фарманян А.Ж.¹

¹НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Российская Федерация

²Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Российская Федерация

tdvhome@mail.ru

Поступила в редакцию 20.01.2025

Построены уравнения движения осесимметричной изотропной моментной сферической тонкой оболочки в усилиях и в кинематических параметрах, а также упрощенные модели с использованием полученных ранее двенадцати уравнений движения для нестационарных изотропных моментных сферических оболочек. Полагая, что искомые функции не зависят от азимутального угла, налагаются необходимые ограничения на поля перемещений, что приводит к нулевым значениям некоторых кинематических параметров. Для выполнения этих условий налагается также некоторое ограничение на внешнюю нагрузку. В этом случае модель из двенадцати уравнений в операторном виде в кинематических параметрах сводится к шести уравнениям. Упрощение модели заключается в том, что коэффициенты операторов в частных производных не зависят от азимутального угла в силу ограниченности нескольких кинематических параметров и пренебрежения слагаемыми более высокого порядка малости в разложении по толщине оболочки.

Число уравнений и неизвестных уменьшено благодаря введению дополнительных гипотез из классической теории оболочек. Пренебрегается обжатием нормального волокна и, согласно физической и геометрической гипотезе Кирхгофа – Лява, описаны связь нормального перемещения и тангенциальных составляющих вектора угла поворота нормального волокна и линейная связь нормальной к срединной поверхности координаты вектора угла поворота с его тангенциальными составляющими. Итоговую систему в операторном виде составляют три уравнения движения в кинематических параметрах. Использовано вариационное уравнение Гамильтона с учетом гипотез о связях, налагаемых на кинематические параметры.

Граничные условия не выписываются, поскольку оболочка считается замкнутой.

Ключевые слова: изотропная тонкая моментная упругая оболочка, уравнения движения в усилиях и кинематических параметрах, осесимметричная задача, сферическая оболочка.

Введение

Независимые поля вращений, как и поля перемещений, содержатся в математической модели моментной теории упругости (моментного континуума Коссера). Такая модель теории упругости описывает микроструктуру материала и применяется для описания деформирования зернистых гранулированных, порошкообразных и сыпучих материалов. Математическая модель позволяет строить неклассические модели тонкостенных конструкций – стержней, пластин и оболочек.

Изложение особенностей математической модели и ее становление можно найти, например, в публикациях В. Новацкого [1], С.И. Герасимова, В.И. Ерофеева, И.Н. Солдатов [2], А.Г. Багдоева, В.И. Ерофеева, А.В. Шекояна [3] и др.

Теория моментных упругих оболочек излагалась в статьях А.Е. Грина, П.М. Нагди [4], Д.В. Бабица [5], Г.А. Ванина [6] и др.

В моментной теории упругости метод гипотез для построения прикладных теорий тонких стержней, пластин и оболочек использован М. Бирсаном [7–10], С.А. Амбарцумяном [11, 12], В.В. Пальмовым [13], О. Хоффманом [14], Х. Альтенбахом, В. Еремеевым [15], С.О. Саркисяном [16–19] и др.

Общая теория динамики упругих моментных оболочек построена в статье Q.C. Mai, M.Yu. Ryazantseva, D.V. Tarlakovskii [20].

Уравнения движения нестационарных изотропных моментных сферических оболочек в усилиях и «перемещениях» (кинематических параметрах), а также соответствующие упрощенные модели представлены в [21]. На основе упрощенной модели в настоящей статье получены уравнения движения замкнутой осесимметричной упругой изотропной моментной сферической оболочки в усилиях и кинематических параметрах, записанные в операторном виде, а также соответствующие упрощенные модели.

1. Постановка нестационарной осесимметричной задачи для основной модели моментных сферических оболочек

Полагаем, что сферическая оболочка имеет радиус R и постоянную малую толщину h :

$$\frac{h}{R} = \delta \ll 1. \quad (1)$$

Материал оболочки описывается моделью Коссера [22].

В качестве криволинейных координат на срединной поверхности используются сферические координаты:

$$\xi^1 = \beta_2 \quad (0 \leq \beta_2 \leq \pi), \quad \xi^2 = \alpha_2 \quad (-\pi < \alpha_2 \leq \pi). \quad (2)$$

Общую математическую модель динамики упругих моментных оболочек можно найти в [20]. Для тонких моментных упругих оболочек постоянной толщины при гладкой срединной поверхности построены уравнения движения соответствующей сферической оболочки в усилиях и «перемещениях» (кинематических параметрах). В результате получены двенадцать уравнений движения в кинематических параметрах, записанных в операторном виде [21]:

$$\mathbf{L}\mathbf{W} + \mathbf{P} = \frac{\partial^2 \mathbf{W}}{\partial t^2}, \quad \mathbf{L} = (L_{ij})_{12 \times 12}, \quad \mathbf{W} = (w_1, w_2, \dots, w_{12})^T, \quad \mathbf{P} = (p_1, p_2, \dots, p_{12})^T,$$

$$\begin{aligned}
w_1 = u_\beta, \quad w_2 = u_\alpha, \quad w_3 = w, \quad w_4 = \omega_\beta, \quad w_5 = \omega_\alpha, \quad w_6 = \omega, \quad w_7 = \psi_\beta, \quad (3) \\
w_8 = \psi_\alpha, \quad w_9 = \varphi_\beta, \quad w_{10} = \varphi_\alpha, \quad w_{11} = \psi_3, \quad w_{12} = \varphi_3, \\
p_1 = \frac{q_\beta}{\rho h}, \quad p_2 = \frac{q_\alpha}{\rho h}, \quad p_3 = \frac{q}{\rho h}, \quad p_4 = \frac{\tilde{m}_{M\beta}}{Jh}, \quad p_5 = \frac{\tilde{m}_{M\alpha}}{Jh}, \quad p_6 = \frac{\tilde{m}_M}{Jh}, \\
p_7 = \frac{m_\beta}{\rho I}, \quad p_8 = \frac{m_\alpha}{\rho I}, \quad p_9 = \frac{\tilde{m}_{2M\beta}}{IJ}, \quad p_{10} = \frac{\tilde{m}_{2M\alpha}}{IJ}, \quad p_{11} = \frac{m}{\rho I}, \quad p_{12} = \frac{\tilde{m}_{2M}}{IJ}.
\end{aligned}$$

Здесь L_{ij} – дифференциальные операторы, $\mathbf{u} = (u_i + \psi_i x_3) \mathbf{e}_i + (w + \psi_3 x_3) \mathbf{n}$ – вектор перемещения, $\boldsymbol{\omega} = (\omega_i + \varphi_i x_3) \mathbf{e}_i + (\omega + \varphi_3 x_3) \mathbf{n}$ – векторы угла поворота, ρ – плотность материала оболочки; J – массовая мера инерции среды при вращении; $q_\beta, q_\alpha, q, \tilde{m}_{M\beta}, \tilde{m}_{M\alpha}, \tilde{m}_M$ – физические координаты векторов $q^i \mathbf{e}_i + q \mathbf{n}$ и моментов $m^i \mathbf{e}_i + m \mathbf{n}$, $\tilde{m}_M^i \mathbf{e}_i + \tilde{m}_M \mathbf{n}$, имеющих смысл векторов поверхностного давления и моментов, отнесенных к единице площади, а также аналогичного момента второго порядка $\tilde{m}_{2M}^i \mathbf{e}_i + \tilde{m}_{2M} \mathbf{n}$, состоящего из базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ в касательной к срединной поверхности плоскости и единичного нормального к ней вектора $\mathbf{n}$.

Используя результаты из статьи [21], построим уравнения движения замкнутой осесимметричной упругой изотропной моментной сферической оболочки в кинематических параметрах.

Полагая, что все искомые функции не зависят от координаты α_2 , получим равенства:

$$u_\alpha = 0, \quad \psi_\alpha = 0, \quad \omega_\beta = 0, \quad \varphi_\beta = 0. \quad (4)$$

Для их выполнения необходимы следующие требования к внешней нагрузке:

$$q_\alpha = 0, \quad \tilde{m}_{M\beta} = 0, \quad m_\alpha = 0, \quad \tilde{m}_{2M\beta} = 0, \quad \tilde{m}_M = 0, \quad \tilde{m}_{2M} = 0. \quad (5)$$

Тогда для дифференциальных операторов L_{ij} с учетом (4) и (5) получим выражения:

$$\begin{aligned}
L_{11}(u) = \frac{1}{\rho R^2} [\Lambda_2 l_2(u) + \mu_- u], \quad L_{13}(w) = \frac{\Lambda_3}{\rho R^2} \frac{\partial w}{\partial \beta_2}, \quad L_{15}(\omega_\alpha) = \frac{2\alpha}{\rho R} \omega_\alpha, \\
L_{17}(\psi) = \frac{1}{\rho R} \left[-\frac{r^2 \Lambda_2}{R^2} l_{30}(\psi) + \mu_- \psi \right], \quad L_{1,10}(\varphi) = -\frac{2\alpha r^2}{\rho R^2} \varphi, \quad L_{1,11}(\psi_3) = \frac{\lambda}{\rho R} \frac{\partial \psi_3}{\partial \beta_2}, \quad (6)
\end{aligned}$$

$$L_{12} = L_{14} = L_{16} = L_{18} = L_{19} = L_{1,12} = 0;$$

$$L_{2,12}(\varphi_3) = \frac{2\alpha r^2}{\rho R^2} \frac{\partial \varphi_3}{\partial \beta_2}, \quad (7)$$

$$L_{21} = L_{22} = L_{23} = L_{24} = L_{25} = L_{26} = L_{27} = L_{28} = L_{29} = L_{2,10} = L_{2,11} = 0;$$

$$\begin{aligned}
L_{31}(u) = -\frac{\Lambda_3}{\rho R^2} l_1(u), \quad L_{33}(w) = \frac{1}{\rho R^2} [\mu_+ l_{30}(w) - 4\Lambda_1 w], \quad L_{35}(\omega_\alpha) = \frac{2\alpha}{\rho R} l_1(\omega_\alpha), \\
L_{37}(\psi) = \frac{\mu_-}{\rho R} l_1(\psi), \quad L_{3,10}(\varphi) = -\frac{2\alpha r^2}{\rho R^2} l_1(\varphi), \quad (8)
\end{aligned}$$

$$L_{3,11}(\psi_3) = -\frac{1}{\rho R} \left[\frac{r^2 \mu_+}{R^2} l_{30}(\psi_3) + 2\lambda \psi_3 \right], \quad L_{32} = L_{34} = L_{36} = L_{38} = L_{39} = L_{3,12} = 0;$$

$$L_{46}(\omega) = \frac{B_3}{JR^2} \frac{\partial \omega}{\partial \beta_2}, \quad L_{4,12}(\varphi_3) = \frac{\beta}{JR} \frac{\partial \varphi_3}{\partial \beta_2}, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} L_{41} = L_{42} = L_{43} = L_{44} = L_{45} = L_{47} = L_{48} = L_{49} = L_{4,10} = L_{4,11} = 0; \\ L_{51}(u) = \frac{2\alpha}{JR} u, \quad L_{53}(w) = -\frac{2\alpha}{JR} \frac{\partial w}{\partial \beta_2}, \quad L_{55}(\omega_\alpha) = \frac{1}{J} \left[\frac{\gamma_+ l_2(\omega_\alpha)}{R^2} + \left(\frac{\gamma_-}{R^2} - 4\alpha \right) \omega_\alpha \right], \\ L_{57}(\psi) = \frac{2\alpha}{J} \psi, \quad L_{5,10}(\varphi) = \frac{1}{JR} \left[-\frac{r^2 \gamma_+ l_{30}(\varphi)}{R^2} + \gamma_- \varphi \right], \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} L_{52} = L_{54} = L_{56} = L_{58} = L_{59} = L_{5,11} = L_{5,12} = 0; \\ L_{66}(\omega) = \frac{\gamma_+}{JR^2} l_{30}(\omega) - \frac{4}{J} \left(\alpha + \frac{B_1}{R^2} \right) \omega, \quad L_{6,12}(\varphi_3) = -\frac{1}{JR} \left[\frac{r^2 \gamma_+}{R^2} l_{30}(\varphi_3) + 2\beta \varphi_3 \right], \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} L_{61} = L_{62} = L_{63} = L_{64} = L_{65} = L_{67} = L_{68} = L_{69} = L_{6,10} = L_{6,11} = 0; \\ L_{71}(u) = -\frac{1}{\rho R^3} \left[\Lambda_2 l_{30}(u) + \frac{R^2 \mu_-}{r^2} u \right], \quad L_{73}(w) = -\frac{\mu_-}{\rho R r^2} \frac{\partial w}{\partial \beta_2}, \quad L_{75}(\omega_\alpha) = \frac{2\alpha}{\rho r^2} \omega_\alpha, \\ L_{77}(\psi) = \frac{1}{\rho} \left[\frac{\Lambda_2}{R^2} l_{30}(\psi) - \frac{\mu_+}{r^2} \psi \right], \quad L_{7,10}(\varphi) = \frac{2\alpha}{\rho R} \varphi, \quad L_{7,11}(\psi_3) = \frac{\Lambda_3}{\rho R^2} \frac{\partial \psi_3}{\partial \beta_2}, \end{aligned} \quad (12)$$

$$L_{72} = L_{74} = L_{76} = L_{78} = L_{79} = L_{7,12} = 0;$$

$$L_{8,12}(\varphi_3) = -\frac{2\alpha}{\rho R} \frac{\partial \varphi_3}{\partial \beta_2}, \quad (13)$$

$$L_{81} = L_{82} = L_{83} = L_{84} = L_{85} = L_{86} = L_{87} = L_{88} = L_{89} = L_{8,10} = L_{8,11} = 0;$$

$$L_{96}(\omega) = -\frac{\gamma_-}{JR r^2} \frac{\partial \omega}{\partial \beta_2}, \quad L_{9,12}(\varphi_3) = \frac{B_3}{JR^2} \frac{\partial \varphi_3}{\partial \beta_2}, \quad (14)$$

$$L_{91} = L_{92} = L_{93} = L_{94} = L_{95} = L_{97} = L_{98} = L_{99} = L_{9,10} = L_{9,11} = 0;$$

$$\begin{aligned} L_{10,1}(u) = -\frac{2\alpha}{JR^2} u, \quad L_{10,3}(w) = \frac{2\alpha}{JR^2} \frac{\partial w}{\partial \beta_2}, \quad L_{10,5}(\omega_\alpha) = \frac{1}{JR} \left[-\frac{\gamma_+ l_{30}(\omega_\alpha)}{R^2} + \frac{\gamma_-}{r^2} \omega_\alpha \right], \\ L_{10,7}(\psi) = \frac{2\alpha}{JR} \psi, \quad L_{10,10}(\varphi) = \frac{\gamma_+}{J} \left[\frac{l_{30}(\varphi)}{R^2} - \frac{1}{r^2} \varphi \right], \quad L_{10,11}(\psi_3) = -\frac{2\alpha}{JR} \frac{\partial \psi_3}{\partial \beta_2}, \end{aligned} \quad (15)$$

$$L_{10,2} = L_{10,4} = L_{10,6} = L_{10,8} = L_{10,9} = L_{10,12} = 0;$$

$$\begin{aligned} L_{11,1}(u) = -\frac{\lambda}{\rho R r^2} l_1(u), \quad L_{11,3}(w) = -\frac{1}{\rho R} \left[\frac{\mu_+}{R^2} l_{30}(w) + \frac{2\lambda}{r^2} w \right], \\ L_{11,7}(\psi) = -\frac{\Lambda_3}{\rho R^2} l_1(\psi), \quad L_{11,10}(\varphi) = \frac{2\alpha}{\rho R} l_1(\varphi), \end{aligned} \quad (16)$$

$$L_{11,11}(\psi_3) = \frac{1}{\rho} \left[\frac{\mu_+}{R^2} l_{30}(\psi_3) - \frac{2\Lambda_2}{r^2} \psi_3 \right],$$

$$L_{11,2} = L_{11,4} = L_{11,5} = L_{11,6} = L_{11,8} = L_{11,9} = L_{11,12} = 0;$$

$$L_{12,6}(\omega) = -\frac{1}{JR} \left[\frac{\gamma_+}{R^2} l_{30}(\omega) + \frac{2\beta}{r^2} \omega \right], \quad L_{12,12}(\varphi_3) = \frac{1}{J} \left[\frac{\gamma_+}{R^2} l_{30}(\varphi_3) - \frac{2B_2}{r^2} \varphi_3 \right], \quad (17)$$

$$L_{12,1} = L_{12,2} = L_{12,3} = L_{12,4} = L_{12,5} = L_{12,7} = L_{12,8} = L_{12,9} = L_{12,10} = L_{12,11} = 0.$$

Здесь введены обозначения:

$$\begin{aligned} u_\beta = u, \quad \psi_\beta = \psi, \quad \varphi_\alpha = \varphi, \quad l_{30}(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial \beta_2^2} + \frac{\partial u}{\partial \beta_2} \operatorname{ctg} \beta_2, \quad l_1(u) = \frac{\partial u}{\partial \beta_2} + u \operatorname{ctg} \beta_2, \\ \Lambda_1 = \lambda + \mu, \quad \Lambda_2 = \lambda + 2\mu, \quad \Lambda_3 = 2\Lambda_1 + \mu_+, \quad \mu_\pm = \mu \pm \alpha, \\ B_1 = \beta + \gamma, \quad B_2 = \beta + 2\gamma, \quad B_3 = 2B_1 + \gamma_+, \quad \gamma_\pm = \lambda \pm \varepsilon, \\ \Lambda_{2+} = \Lambda_2 + \mu_+, \quad B_{2+} = B_2 + \gamma_+, \quad I_1 = 1 + \frac{r^2}{R^2}, \quad r^2 = \frac{I}{h}, \quad I = \frac{h^3}{12}. \end{aligned} \quad (18)$$

С учетом (3) и (6)–(18) получаем следующие системы уравнений:

$$\begin{aligned} L_{2,12}(\varphi_3) = 0, \quad L_{46}(\omega) + L_{4,12}(\varphi_3) = 0, \quad L_{66}(\omega) + L_{6,12}(\varphi_3) = \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2}, \\ L_{8,12}(\varphi_3) = 0, \quad L_{96}(\omega) + L_{9,12}(\varphi_3) = 0, \quad L_{12,6}(\omega) + L_{12,12}(\varphi_3) = \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial t^2}; \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} L_{11}(u) + L_{13}(w) + L_{15}(\omega_\alpha) + L_{17}(\psi) + L_{1,10}(\varphi) + L_{1,11}(\psi_3) + p_1 = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ L_{31}(u) + L_{33}(w) + L_{35}(\omega_\alpha) + L_{37}(\psi) + L_{3,10}(\varphi) + L_{3,11}(\psi_3) + p_3 = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \\ L_{51}(u) + L_{53}(w) + L_{55}(\omega_\alpha) + L_{57}(\psi) + L_{5,10}(\varphi) + p_5 = \frac{\partial^2 \omega_\alpha}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} L_{71}(u) + L_{73}(w) + L_{75}(\omega_\alpha) + L_{77}(\psi) + L_{7,10}(\varphi) + L_{7,11}(\psi_3) + p_7 = \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}, \\ L_{10,1}(u) + L_{10,3}(w) + L_{10,5}(\omega_\alpha) + L_{10,7}(\psi) + L_{10,10}(\varphi) + L_{10,11}(\psi_3) + p_{10} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, \\ L_{11,1}(u) + L_{11,3}(w) + L_{11,7}(\psi) + L_{11,10}(\varphi) + L_{11,11}(\psi_3) + p_{11} = \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial t^2}. \end{aligned}$$

Однородная система уравнений (19), очевидно, удовлетворяется, если положить

$$\omega = 0, \quad \varphi_3 = 0. \quad (21)$$

Таким образом, в осесимметричном случае разрешающие уравнения – это система (3) из шести уравнений относительно шести неизвестных $u, w, \omega_\alpha, \psi, \varphi, \psi_3$:

$$\begin{aligned} \overset{0}{\mathbf{L}} \overset{0}{\mathbf{W}} + \overset{0}{\mathbf{P}} = \frac{\partial^2 \overset{0}{\mathbf{W}}}{\partial t^2}, \quad \overset{0}{\mathbf{L}} = (L_{ij})_{6 \times 6}, \quad i, j = 1, 3, 5, 7, 10, 11, \\ \overset{0}{\mathbf{W}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & w_5 & w_6 \end{pmatrix}^T, \quad \overset{0}{\mathbf{P}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 & p_6 \end{pmatrix}^T, \\ w_1 = u, \quad w_2 = w, \quad w_3 = \omega_\alpha, \quad w_4 = \psi_\beta, \quad w_5 = \varphi, \quad w_6 = \psi_3, \end{aligned} \quad (22)$$

$$p_1^0 = \frac{q_\beta}{\rho h}, \quad p_2^0 = \frac{q}{\rho h}, \quad p_3^0 = \frac{\tilde{m}_{M\alpha}}{Jh}, \quad p_4^0 = \frac{m_\beta}{\rho I}, \quad p_5^0 = \frac{\tilde{m}_{2M\alpha}}{JI}, \quad p_6^0 = \frac{m}{\rho I}.$$

Естественно, упрощаются уравнения движения и физические соотношения, которые с учетом (4), (5) и (21) приобретают вид:

уравнения движения

$$\begin{aligned} \rho h \frac{\partial^2 u_\beta}{\partial t^2} &= \frac{1}{R} \left[\frac{\partial T_{\beta\beta}}{\partial \beta_2} + (T_{\beta\beta} - T_{\alpha\alpha}) \operatorname{ctg} \beta_2 + T_{\beta 3} \right] + q_\beta, \\ \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \frac{1}{R} \left[\frac{\partial T_{\beta 3}}{\partial \beta_2} + T_{\beta 3} \operatorname{ctg} \beta_2 - T_{\beta\beta} - T_{\alpha\alpha} \right] + q, \\ \rho I \frac{\partial^2 \psi_\beta}{\partial t^2} &= \frac{1}{R} \left[\frac{\partial M_{\beta\beta}}{\partial \beta_2} + (M_{\beta\beta} - M_{\alpha\alpha}) \operatorname{ctg} \beta_2 \right] - T_{3\beta} + m_\beta, \\ \rho I \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial t^2} &= \frac{1}{R} \left(\frac{\partial M_{\beta 3}}{\partial \beta_2} + M_{\beta 3} \operatorname{ctg} \beta_2 \right) - N + m, \\ hJ \frac{\partial^2 \omega_\alpha}{\partial t^2} &= \frac{1}{R} \left[\frac{\partial R_{\beta\alpha}}{\partial \beta_2} + (R_{\beta\alpha} + R_{\alpha\beta}) \operatorname{ctg} \beta_2 + R_{\alpha 3} \right] + T_{3\beta} - T_{\beta 3} + \tilde{m}_{M\alpha}, \\ IJ \frac{\partial^2 \varphi_\alpha}{\partial t^2} &= \frac{1}{R} \left[\frac{\partial S_{\beta\alpha}}{\partial \beta_2} + (S_{\beta\alpha} + S_{\alpha\beta}) \operatorname{ctg} \beta_2 \right] + M_{3\beta} - M_{\beta 3} - R_{3\alpha} + \tilde{m}_{2M\alpha}, \\ \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} &= 0, \quad \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial t^2} = 0; \end{aligned} \quad (23)$$

физические соотношения

$$\begin{aligned} \frac{T_{\beta\beta}}{h} &= \frac{1}{R} \left(\Lambda_2 \frac{\partial u}{\partial \beta_2} + \lambda u \operatorname{ctg} \beta_2 + 2\Lambda_1 w \right) - \frac{r^2}{R^2} \left(\Lambda_2 \frac{\partial \psi}{\partial \beta_2} + \lambda \psi \operatorname{ctg} \beta_2 \right) + \lambda \psi_3, \\ \frac{T_{\alpha\alpha}}{h} &= \frac{1}{R} \left(\lambda \frac{\partial u}{\partial \beta_2} + \Lambda_2 u \operatorname{ctg} \beta_2 + 2\Lambda_1 w \right) - \frac{r^2}{R^2} \left(\lambda \frac{\partial \psi}{\partial \beta_2} + \Lambda_2 \psi \operatorname{ctg} \beta_2 \right) + \lambda \psi_3, \\ \frac{T_{\beta 3}}{h} &= \frac{\mu_+}{R} \left(\frac{\partial w}{\partial \beta_2} - u \right) - \frac{r^2 \mu_+}{R^2} \frac{\partial \psi_3}{\partial \beta_2} + \mu_- \psi + 2\alpha \left(\omega_\alpha - \frac{r^2}{R} \varphi \right), \\ \frac{T_{3\beta}}{h} &= \frac{\mu_-}{R} \left(\frac{\partial w}{\partial \beta_2} - u \right) - \frac{\mu_+ r^2}{R^2} \frac{\partial \psi_3}{\partial \beta_2} + \mu_+ \psi - 2\alpha \left(\omega_\alpha + \frac{r^2}{R} \varphi \right), \\ \frac{N}{h} &= \frac{\lambda}{R} \left(\frac{\partial u}{\partial \beta_2} + u \operatorname{ctg} \beta_2 + 2w \right) + \frac{2\Lambda_1 r^2}{R^2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \beta_2} + \psi \operatorname{ctg} \beta_2 \right) + \Lambda_2 \psi_3, \\ T_{\beta\alpha} &= T_{\alpha\beta} = T_{\alpha 3} = T_{3\alpha} = 0; \\ \frac{RM_{\beta\beta}}{I} &= -\frac{1}{R} \left(\Lambda_2 \frac{\partial u}{\partial \beta_2} + \lambda u \operatorname{ctg} \beta_2 + 2\Lambda_1 w \right) + \Lambda_2 \frac{\partial \psi}{\partial \beta_2} + \lambda \psi \operatorname{ctg} \beta_2 + 2\Lambda_1 \psi_3, \\ \frac{RM_{\alpha\alpha}}{I} &= -\frac{1}{R} \left(\lambda \frac{\partial u}{\partial \beta_2} + \Lambda_2 u \operatorname{ctg} \beta_2 + 2\Lambda_1 w \right) + \lambda \frac{\partial \psi}{\partial \beta_2} + \Lambda_2 \psi \operatorname{ctg} \beta_2 + 2\Lambda_1 \psi_3, \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned}
\frac{M_{\beta 3}}{I} &= \frac{\mu_+}{R} \left[\frac{1}{R} \left(u - \frac{\partial w}{\partial \beta_2} \right) - \left(\psi - \frac{\partial \psi_3}{\partial \beta_2} \right) \right] + 2\alpha\varphi, \\
\frac{M_{3\beta}}{I} &= \frac{\mu_-}{R} \left[\frac{1}{R} \left(u - \frac{\partial w}{\partial \beta_2} \right) - \left(\psi - \frac{\partial \psi_3}{\partial \beta_2} \right) \right] - 2\alpha\varphi, \quad M_{\alpha 3} = M_{3\alpha} = M_{\beta\alpha} = M_{\alpha\beta} = 0; \quad (25) \\
\frac{R_{\beta\alpha}}{h} &= \frac{1}{R} \left(\gamma_+ \frac{\partial \omega_\alpha}{\partial \beta_2} - \gamma_- \omega_\alpha \operatorname{ctg} \beta_2 \right) - \frac{r^2}{R^2} \left(\gamma_+ \frac{\partial \varphi}{\partial \beta_2} - \gamma_- \varphi \operatorname{ctg} \beta_2 \right), \\
\frac{R_{\alpha\beta}}{h} &= \frac{1}{R} \left(\gamma_- \frac{\partial \omega_\alpha}{\partial \beta_2} - \gamma_+ \omega_\alpha \operatorname{ctg} \beta_2 \right) - \frac{r^2}{R^2} \left(\gamma_- \frac{\partial \varphi}{\partial \beta_2} - \gamma_+ \varphi \operatorname{ctg} \beta_2 \right), \\
\frac{R_{\alpha 3}}{h} &= -\frac{\gamma_+}{R} \omega_\alpha + \gamma_- \varphi, \quad \frac{R_{3\alpha}}{h} = -\frac{\gamma_-}{R} \omega_\alpha + \gamma_+ \varphi, \\
R_{\beta\beta} &= R_{\alpha\alpha} = R_{\beta 3} = R_{3\beta} = N_\omega = 0, \quad (26) \\
\frac{RS_{\beta\alpha}}{I} &= -\frac{1}{R} \left(\gamma_+ \frac{\partial \omega_\alpha}{\partial \beta_2} - \gamma_- \omega_\alpha \operatorname{ctg} \beta_2 \right) + \left(\gamma_+ \frac{\partial \varphi}{\partial \beta_2} - \gamma_- \varphi \operatorname{ctg} \beta_2 \right), \\
\frac{RS_{\alpha\beta}}{I} &= -\frac{1}{R} \left(\gamma_- \frac{\partial \omega_\alpha}{\partial \beta_2} - \gamma_+ \omega_\alpha \operatorname{ctg} \beta_2 \right) + \left(\gamma_- \frac{\partial \varphi}{\partial \beta_2} - \gamma_+ \varphi \operatorname{ctg} \beta_2 \right), \\
\frac{RS_{\alpha 3}}{I} &= \gamma_+ \left(\frac{1}{R} \omega_\alpha - \varphi \right), \quad S_{\beta\beta} = S_{\alpha\alpha} = S_{\beta 3} = 0.
\end{aligned}$$

Здесь $\mathbf{T} = T^{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$ и $\mathbf{M} = M^{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$ – тензоры тангенциальных усилий и моментов; $T^{i3} \mathbf{e}_i$, $T^{3i} \mathbf{e}_i$ – векторы перерезывающих усилий; $M^{i3} \mathbf{e}_i$, $M^{3i} \mathbf{e}_i$ – векторы дополнительных моментов; N – вектор нормального усилия; $\mathbf{R} = R^{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$, $\mathbf{S} = S^{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$, $R^{i3} \mathbf{e}_i$, $R^{3i} \mathbf{e}_i$ и $S^{i3} \mathbf{e}_i$; N_ω – аналогичные связанные с моментными свойствами среды величины.

2. Постановка нестационарной осесимметричной задачи для упрощенных моделей моментных сферических оболочек

Согласно [23–25] полагаем, что обжатие нормального волокна отсутствует, то есть $\psi_3 = 0$. Вслед за Кирхгофом – Лявом принимаем гипотезу прямой нормали и предположения об угле поворота:

$$\begin{aligned}
\psi &= -\frac{1}{R} \left(\frac{\partial w}{\partial \beta_2} - u \right), \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0, \\
\varphi &= \frac{\omega_\alpha}{R}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0.
\end{aligned} \quad (27)$$

Для обеспечения этих гипотез налагаем на внешние нагрузки условия: $m = 0$, $m_\beta = 0$, $\tilde{m}_{2M\alpha} = 0$. Вариационное уравнение для основной модели принимает вид [20]:

$$\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_2} dt \iint_{\Pi} \left\{ \sum_{i=1,3,5} \left[\sum_{j=1,3,5,7,10} L_{ij}^{(1)} \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ w_j \end{smallmatrix} \right) + p_i - \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} \right] \delta w_i + \right. \\
\left. + \sum_{i=7,10} \left[\sum_{j=1,3,5,7,10} L_{ij}^{(1)} \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ w_j \end{smallmatrix} \right) \right] \delta w_i \right\} dS = 0.
\end{aligned} \quad (28)$$

Из (28) с учетом (27), кинематических параметров и теоремы Остроградского – Гаусса [24] получаем систему уравнений движения оболочки, состоящую из трех уравнений с тремя неизвестными u, w, ω_α :

$$\begin{aligned} {}^0\mathbf{L} {}^0\mathbf{W} + {}^0\mathbf{P} &= \frac{\partial^2 {}^0\mathbf{W}}{\partial t^2}, \\ {}^0\mathbf{L} &= \left(L_{ij} \right)_{3 \times 3}, \quad i, j = 1, 3, 5, \quad {}^0\mathbf{W} = \begin{pmatrix} w_1, w_2, w_3 \end{pmatrix}^T, \quad {}^0\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_1, p_2, p_3 \end{pmatrix}^T, \\ w_1 &= u, \quad w_2 = w, \quad w_3 = \omega_\alpha, \quad p_1 = \frac{q_\beta}{\rho h}, \quad p_2 = \frac{q}{\rho h}, \quad p_3 = \frac{\tilde{m}_{M\alpha}}{Jh}. \end{aligned}$$

Здесь

$$L_{ij}^{(2)}(u) = \tilde{L}_{ij}^{(2)}(u) + \tilde{\tilde{L}}_{ij}^{(2)}(u), \quad i, j = 1, 2, 3,$$

где

$$\begin{aligned} L_{11}^{(2)}(u) &= L_{11}^{(0)}(u) + \frac{1}{R} L_{17}^{(0)}(u) + \frac{1}{R} L_{71}^{(0)}(u) + \frac{1}{R^2} L_{77}^{(0)}(u), \\ L_{13}^{(2)}(w) &= L_{13}^{(0)}(w) - \frac{1}{R} L_{17}^{(0)} \left(\frac{\partial w}{\partial \beta_2} \right) + \frac{1}{R} L_{73}^{(0)}(w) - \frac{1}{R^2} L_{77}^{(0)} \left(\frac{\partial w}{\partial \beta_2} \right), \\ L_{15}^{(2)}(\omega_\alpha) &= L_{15}^{(0)}(\omega_\alpha) + \frac{1}{R} L_{1,10}^{(0)} + \frac{1}{R} L_{75}^{(0)}(\omega_\alpha) + \frac{1}{R^2} L_{7,10}^{(0)}(\omega_\alpha), \\ L_{31}^{(2)}(u) &= L_{31}^{(0)}(u) + \frac{1}{R} L_{37}^{(0)}(u) + \frac{1}{R} \frac{\partial L_{71}^{(0)}(u)}{\partial \beta_2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial L_{77}^{(0)}(u)}{\partial \beta_2}, \\ L_{33}^{(2)}(w) &= L_{33}^{(0)}(w) - \frac{1}{R} L_{37}^{(0)} \left(\frac{\partial w}{\partial \beta_2} \right) + \frac{1}{R} \frac{\partial L_{73}^{(0)}(w)}{\partial \beta_2} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial L_{77}^{(0)}(\partial w / \partial \beta_2)}{\partial \beta_2}, \\ L_{35}^{(2)}(\omega_\alpha) &= L_{35}^{(0)}(\omega_\alpha) + \frac{1}{R} L_{3,10}^{(0)} + \frac{1}{R} \frac{\partial L_{75}^{(0)}(\omega_\alpha)}{\partial \beta_2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial L_{7,10}^{(0)}(\omega_\alpha)}{\partial \beta_2}, \\ L_{51}^{(2)}(u) &= L_{51}^{(0)}(u) + \frac{1}{R} L_{57}^{(0)}(u) + \frac{1}{R} L_{10,1}^{(0)}(u) + \frac{1}{R^2} L_{10,7}^{(0)}(u), \\ L_{53}^{(2)}(w) &= L_{53}^{(0)}(w) - \frac{1}{R} L_{57}^{(0)} \left(\frac{\partial w}{\partial \beta_2} \right) + \frac{1}{R} L_{10,3}^{(0)}(w) - \frac{1}{R^2} L_{10,7}^{(0)} \left(\frac{\partial w}{\partial \beta_2} \right), \\ L_{55}^{(2)}(\omega_\alpha) &= L_{55}^{(0)}(\omega_\alpha) + \frac{1}{R} L_{5,10}^{(0)} + \frac{1}{R} L_{10,5}^{(0)}(\omega_\alpha) + \frac{1}{R^2} L_{10,10}^{(0)}(\omega_\alpha). \end{aligned}$$

Естественно, что упрощаются и физические соотношения (22)–(26), которые с учетом (27) приобретают вид:

физические соотношения

$$\frac{T_{\beta\beta}}{h} = \frac{1}{R} \left(\Lambda_2 \frac{\partial u}{\partial \beta_2} + \lambda u \operatorname{ctg} \beta_2 + 2\Lambda_1 w \right) + \frac{r^2}{R^3} \left[\Lambda_2 \frac{\partial}{\partial \beta_2} \left(\frac{\partial w}{\partial \beta_2} \right) + \lambda \frac{\partial w}{\partial \beta_2} \operatorname{ctg} \beta_2 \right],$$

$$\begin{aligned}
\frac{T_{\alpha\alpha}}{h} &= \frac{1}{R} \left(\lambda \frac{\partial u}{\partial \beta_2} + \Lambda_2 u \operatorname{ctg} \beta_2 + 2\Lambda_1 w \right) + \frac{r^2}{R^3} \left[\lambda \frac{\partial}{\partial \beta_2} \left(\frac{\partial w}{\partial \beta_2} \right) + \Lambda_2 \frac{\partial w}{\partial \beta_2} \operatorname{ctg} \beta_2 \right], \\
\frac{T_{\beta 3}}{h} &= -\frac{T_{3\beta}}{h} = 2\alpha \left[\frac{1}{R} \left(\frac{\partial w}{\partial \beta_2} - u \right) + \omega_\alpha \right], \\
\frac{N}{h} &= \frac{\lambda}{R} \left(\frac{\partial u}{\partial \beta_2} + u \operatorname{ctg} \beta_2 + 2w \right) - \frac{2\Lambda_1 r^2}{R^3} \left[\frac{\partial}{\partial \beta_2} \left(\frac{\partial w}{\partial \beta_2} \right) + \frac{\partial w}{\partial \beta_2} \operatorname{ctg} \beta_2 \right], \\
T_{\beta\alpha} &= T_{\alpha\beta} = T_{\alpha 3} = T_{3\alpha} = 0; \\
\frac{RM_{\beta\beta}}{I} &= -\frac{1}{R} \left[\Lambda_2 \frac{\partial}{\partial \beta_2} \left(\frac{\partial w}{\partial \beta_2} \right) + \lambda \frac{\partial w}{\partial \beta_2} \operatorname{ctg} \beta_2 + 2\Lambda_1 w \right], \\
\frac{RM_{\alpha\alpha}}{I} &= -\frac{1}{R} \left[\lambda \frac{\partial}{\partial \beta_2} \left(\frac{\partial w}{\partial \beta_2} \right) + \Lambda_2 \frac{\partial w}{\partial \beta_2} \operatorname{ctg} \beta_2 + 2\Lambda_1 w \right], \\
\frac{M_{\beta 3}}{I} &= -\frac{M_{3\beta}}{I} = \frac{2\alpha}{R} \omega_\alpha, \quad M_{\alpha 3} = M_{3\alpha} = M_{\beta\alpha} = M_{\alpha\beta} = 0; \\
\frac{R_{\beta\alpha}}{h} &= \frac{1}{R} \left(\gamma_+ \frac{\partial \omega_\alpha}{\partial \beta_2} - \gamma_- \omega_\alpha \operatorname{ctg} \beta_2 \right), \quad \frac{R_{\alpha\beta}}{h} = \frac{1}{R} \left(\gamma_- \frac{\partial \omega_\alpha}{\partial \beta_2} - \gamma_+ \omega_\alpha \operatorname{ctg} \beta_2 \right), \\
\frac{R_{3\alpha}}{h} &= -\frac{R_{\alpha 3}}{h} = \frac{2\varepsilon}{R} \omega_\alpha, \quad R_{\beta\beta} = R_{\alpha\alpha} = R_{\beta 3} = R_{3\beta} = N_\omega = 0, \\
S_{\beta\alpha} &= S_{\alpha\beta} = S_{\alpha 3} = S_{\beta\beta} = S_{\alpha\alpha} = S_{\beta 3} = 0.
\end{aligned}$$

Начальные условия:

$$\begin{aligned}
u|_{t=0} &= w|_{t=0} = 0, \quad \omega_\alpha|_{t=0} = 0, \\
\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} &= \frac{\partial w}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial \omega_\alpha}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0.
\end{aligned}$$

Заключение

Получена математическая модель и ее упрощенные варианты для описания динамики изотропной тонкой упругой моментной сферической оболочки. Модель содержит шесть операторных уравнений. Упрощение модели возможно до трех уравнений с тремя неизвестными.

Список литературы

1. Новацкий В. *Теория упругости*. М.: Мир, 1975. 872 с.
2. Герасимов С.И., Ерофеев В.И., Солдатов И.Н. *Волновые процессы в сплошных средах*. Саров: Изд-во РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2012. 260 с.
3. Bagdoev A.G., Erofeev V.I., Shekoyan A.V. *Wave Dynamics of Generalized Continua*. Heidelberg – New York – Dordrecht – London: Springer, 2016. 274 p.
4. Green A.E., Naghdi P.M. The linear elastic Cosserat surface and shell theory. *International Journal of Solids and Structures*. 1968. Vol. 4. Iss. 6. P. 585–592. [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(68\)90075-9](https://doi.org/10.1016/0020-7683(68)90075-9).

5. Бабич Д.В. Основные уравнения движения оболочки с учетом несимметричности тензора напряжений. *Прикладная механика*. 1966. Т. 2. Вып. 12. С. 41–48.
6. Ванин Г.А. Моментная механика тонких оболочек. *Изв. РАН. МТТ*. 2004. №4. С. 116–128.
7. Birsan M. The solution of Saint-Venant's problem in the theory of Cosserat shells. *Journal of Elasticity*. 2004. Vol. 74. P. 185–214. <https://doi.org/10.1023/B:ELAS.0000039621.94195.f0>.
8. Birsan M. Several results in the dynamic theory of thermoelastic Cosserat shells with voids. *Mechanics Research Communications*. 2006. Vol. 33. Iss. 2. P. 157–176. <https://doi.org/10.1016/j.mechrescom.2005.08.008>.
9. Birsan M. Thermal stresses in cylindrical Cosserat elastic shells. *European Journal of Mechanics-A/Solids*. 2009. Vol. 28. Iss. 1. P. 94–101. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2008.03.001>.
10. Birsan M. On the theory of loaded general cylindrical Cosserat elastic shells. *International Journal of Solids and Structures*. 2007. Vol. 44. Iss. 22-23. P. 7399–7419. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2007.04.016>.
11. Амбарцумян С.А. Задача несимметричной термоупругости весьма пологой оболочки. *Изв. НАН РА. Механика*. 2002. №3. С. 20–33.
12. Амбарцумян С.А. Температурная задача микрополярной пластинки. *Изв. вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки*. 2000. № 3. С. 17–20.
13. Palmov W.W., Altenbach H. Über eine cosseratsche Theorie für elastische Platen. *Technische Mechanik*. 1982. Bd. 3. Ausgabe 3. S. 5–9 (Auf Deutsch).
14. Hoffman O. On the bending of thin elastic plates in the presence of moment stresses. *ASME. Applied Mechanics*. 1964. Vol. 31. No 4. P. 706–707. <https://doi.org/10.1115/1.3629737>.
15. Altenbach H., Eremeyev V. On the linear theory of micropolar plates. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik (ZAMM)*. 2009. Vol. 89. Iss. 4. P. 242–256. <https://doi.org/10.1002/zamm.200800207>.
16. Sargsyan S.H. On some interior and boundary effects in thin plates based on the asymmetric theory of elasticity. In: *Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics. Theories of Plates and Shells. Critical Review and New Applications*. Vol. 16. Springer, 2004. P. 201–210. https://doi.org/10.1007/978-3-540-39905-6_24.
17. Саркисян С.О. Общие модели микрополярных упругих тонких пластин. *Вестник Пермского ГТУ. Математическое моделирование систем и процессов*. 2008. №16. С. 111–120.
18. Sargsyan S.H. Mathematical model of micropolar termo-elasticity of thin shells. *Journal of Thermal Stresses*. 2013. Vol. 36. Iss. 11. P. 1200–1216. <https://doi.org/10.1080/01495739.2013.819265>.
19. Саркисян С.О. Общая динамическая теория микрополярных упругих тонких оболочек. *Доклады Академии наук*. 2011. Т. 436. №2. С. 195–198.
20. Mai Q.C., Ryazantseva M.Yu., Tarlakovskii D.V. Generalized linear model of dynamics of elastic moment shells. In: *Deformation and Destruction of Materials and Structures under Quasi-Static and Impulse Loading*. Switzerland AG: Springer Nature, 2023. Vol. 186. P. 159–171.
21. Тарлаковский Д.В., Фарманян А.Ж., Гафуров У.С. Уравнения движения изотропной сферической моментной упругой оболочки. *Проблемы прочности и пластичности*. 2024. Т. 86. Вып. 2. С. 168–181. <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2024-86-2-168-181>.
22. Ерофеев В.И. *Волновые процессы в твердых телах с микроструктурой*. М.: Изд-во МГУ, 1999. 328 с.
23. Горшков А.Г., Медведский А.Л., Рабинский Л.Н., Тарлаковский Д.В. *Волны в сплошных средах*. М.: Физматлит, 2004. 472 с.
24. Михайлова Е.Ю., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В. Обобщенная линейная модель динамики тонких упругих оболочек. *Ученые записки Казанского университета. Серия физико-математические науки*. 2018. Т. 160. №3. С. 561–577.
25. Михайлова Е.Ю., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В. *Упругие пластины и пологие оболочки*. М.: Изд-во МАИ, 2018. 92 с.

References

1. Novatskiy V. *Teoriya uprugosti [Theory of Elasticity]*. Moscow. Mir Publ. 1975. 872 p. (In Russian).
2. Gerasimov S.I., Erofeev V.I., Soldatov I.N. *Volnovye protsessy v sploshnykh sredakh [Wave Processes in Continuous Media]*. Sarov. RFYaTs–VNIIEF Publ. 2012. 260 p. (In Russian).
3. Bagdoev A.G., Erofeev V.I., Shekoyan A.V. *Wave Dynamics of Generalized Continua*. Heidelberg. New York. Dordrecht. London. Springer. 2016. 274 p.
4. Green A.E., Naghdi P.M. The linear elastic Cosserat surface and shell theory. *Int. J. Solids Struct.* 1968. Vol. 4. Iss. 6. P. 585–592. [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(68\)90075-9](https://doi.org/10.1016/0020-7683(68)90075-9).
5. Babich D.V. Osnovnye uravneniya dvizheniya obolochki s uchetom nesimmetrichnosti tenzora napryazhenij [The basic equations of motion of the shell with allowance for the asymmetry of the stress tensor]. *Prikladnaya mexanika [International Applied Mechanics]*. 1966. Vol. 2. Iss. 12. P. 41–48 (In Russian).
6. Vanin G.A. Momentnaya mekhanika tonkikh obolochek [Couple-stress mechanics of thin shells]. *Izvestiya Rossiyskoy Akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela [Mechanics of Solids]*. 2004. No 4. P. 116–128 (In Russian).
7. Birsan M. The solution of Saint-Venant's problem in the theory of Cosserat shells. *J. Elast.* 2004. Vol. 74. P. 185–214. <https://doi.org/10.1023/B:ELAS.0000039621.94195.f0>.
8. Birsan M. Several results in the dynamic theory of thermoelastic Cosserat shells with voids. *Mech. Res. Commun.* 2006. Vol. 33. Iss. 2. P. 157–176. DOI:10.1016/j.mechrescom.2005.08.008.
9. Birsan M. Thermal stresses in cylindrical Cosserat elastic shells. *European Journal of Mechanics-A/Solids*. 2009. Vol. 28. Iss. 1. P. 94–101. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2008.03.001>.
10. Birsan M. On the theory of loaded general cylindrical Cosserat elastic shells. *Int. J. Solids Struct.* 2007. Vol. 44. Iss. 22-23. P. 7399–7419. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2007.04.016>.
11. Ambartsumyan S.A. Zadacha nesimmetrichnoy termouprugosti vesma pologoy obolochki [The problem of the nonsymmetrical thermoelasticity of a very extremely shallow shell]. *Izvestiya Natsionalnoy Akademii nauk Respubliki Armenii. Mekhanika [Proceedings of NAS RA. Mechanics]*. 2002. No 3. P. 20–33 (In Russian).
12. Ambartsumyan S.A. Temperaturnaya zadacha mikropolyarnoy plastinki [Temperature problem of a micropolar plate]. *Izvestiya vuzov. Severo-Kavkazskiy region. Estestvennye nauki [Bulletin of Higher Education Institutes. North Caucasus Region. Natural Sciences]*. 2000. No 3. P. 17–20 (In Russian).
13. Palmov W.W., Altenbach H. Über eine cosseratsche Theorie für elastische Platen. *Technische Mechanik*. 1982. Bd. 3. Ausgabe 3. S. 5–9 (Auf Deutsch).
14. Hoffman O. On the bending of thin elastic plates in the presence of moment stresses. *ASME. Applied Mechanics*. 1964. Vol. 31. No 4. P. 706–707. <https://doi.org/10.1115/1.3629737>.
15. Altenbach H., Eremeyev V. On the linear theory of micropolar plates. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik (ZAMM)*. 2009. Vol. 89. Iss. 4. P. 242–256. <https://doi.org/10.1002/zamm.200800207>.
16. Sargsyan S.H. On some interior and boundary effects in thin plates based on the asymmetric theory of elasticity. In: *Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics. Theories of Plates and Shells. Critical Review and New Applications*. Vol. 16. Springer. 2004. P. 201–210. https://doi.org/10.1007/978-3-540-39905-6_24.
17. Sarkisyan S.O. Obshchie modeli mikropolyarnykh uprugikh tonkikh plastin [General models of micropolar elastic thin plates]. *Vestnik Permskogo GTU. Matematicheskoe modelirovanie sistem i protsessov [Vestnik of the Perm Polytechnic Institute]*. 2008. №16. P. 111–120 (In Russian).
18. Sargsyan S.H. Mathematical model of micropolar termo-elasticity of thin shells. *J. Ther. Stresses*. 2013. Vol. 36. Iss. 11. P. 1200–1216. <https://doi.org/10.1080/01495739.2013.819265>.
19. Sargsyan S.H. The general dynamic theory of micropolar elastic thin shells. *Doklady Physics*. 2011. Vol. 56. No 1. P. 39–42.
20. Mai Q.C., Ryazantseva M.Yu., Tarlakovskii D.V. Generalized linear model of dynamics

of elastic moment shells. In: *Deformation and Destruction of Materials and Structures under Quasi-Static and Impulse Loading*. Switzerland AG. Springer Nature. 2023. Vol. 186. P. 159–171.

21. Tarlakovskii D.V., Farmanyan A.J., Gafurov U.S. Uravneniya dvizheniya izotropnoy sfericheskoy momentnoy uprugoy obolochki [Equations of motion of an isotropic spherical moment elastic shell]. *Problemy prochnosti i plastichnosti* [Problems of Strength and Plasticity]. 2024. Vol. 86. No 2. P. 168–181 (In Russian).

22. Erofeev V.I. *Volnovye protsessy v tverdykh telakh s mikrostrukturoy* [Wave Processes in Solid Bodies with Microstructure]. Moscow. MGU Publ. 1999. 328 p. (In Russian).

23. Gorshkov A.G., Medvedskiy A.L., Rabinskiy L.N., Tarlakovskiy D.V. *Volny v sploshnykh sredakh* [Waves in Continuous Media]. Moscow. Fizmatlit Publ. 2004. 472 p. (In Russian).

24. Mikhaylova E.Yu., Tarlakovskiy D.V., Fedotenkov G.V. Obobshchennaya lineynaya model dinamiki tonkikh uprugikh obolochek [A generalized linear model of dynamics of thin elastic shells]. *Uchenye zapiski Kazanskogo universiteta. Seriya Fiziko-matematicheskie nauki* [Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series]. 2018. Vol. 160. Book 3. P. 561–577 (In Russian).

25. Mikhaylova E.Yu., Tarlakovskiy D.V., Fedotenkov G.V. *Uprugie plastiny i pologie obolochki* [Elastic Plates and Shallow Shells]. Moscow. MAI Publ. 2018. 92 p. (In Russian).

AXISYMMETRIC UNSTEADY DYNAMICS OF ELASTIC MOMENT SPHERICAL SHELLS

Tarlakovskii D.V.^{1,2}, Farmanyan A.Zh.¹

¹*Institute of Mechanics, Lomonosov Moscow State University,
Moscow, Russian Federation*

²*Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russian Federation*

tdvhome@mail.ru

Received by the Editor 2025/01/20

The equations of motion of an axisymmetric isotropic momentary spherical thin shell in forces and kinematic parameters, as well as simplified models, are constructed using the previously obtained twelve equations of motion for unsteady isotropic momentary spherical shells. Assuming that the desired functions do not depend on the azimuthal angle, the necessary restrictions are imposed on the displacement fields, which reduces the values of some kinematic parameters to zero. To fulfill these conditions, a certain restriction is also imposed on the external load. In this case, the model of twelve equations is reduced to six equations of motion in kinematic parameters written in operator form. At the same time, the coefficients of partial differential operators are also simplified due to independence from the azimuthal angle, the limitation of several kinematic parameters, as well as the neglect of terms having a higher order of smallness relative to the thickness of the shell.

It is shown that by introducing additional hypotheses used in classical shell theory (neglecting compression of a normal fiber and Kirchhoff–Love's hypothesis about the relationship between the tangential components of the rotation angle vector of a normal fiber and normal displacement, as well as the relationship between the linear relative coordinates of the rotation angle vector normal to the median surface and its tangential components), the number of equations and unknowns decreases. As a result, we obtain three equations of motion in kinematic parameters written in operator form. To carry out this procedure, the Hamilton variational equation is constructed, taking into account the kinematic parameters imposed by the hypotheses. Boundary conditions are not written out because the shell is considered closed.

Keywords: isotropic thin moment elastic shell, equations of motion in forces and kinematic parameters, axisymmetric problems, spherical shell.