УДК 539.3 DOI: 10.32326/1814-9146-2025-87-2-253-262

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА С ПОЛУПОЛОСОВЫМ ДЕФОРМИРУЕМЫМ ШТАМПОМ*

© 2025 г. Бабешко В.А.[1,2], Евдокимова О.В.[2], Бабешко О.М.[1]

[1]*Кубанский государственный университет, Краснодар, Российская Федерация*
[2]*Южный научный центр РАН, Ростов-на-Дону, Российская Федерация*

babeshko41@mail.ru

Поступила в редакцию 12.05.2025

Представлен один из методов исследования контактной задачи для деформируемого штампа на слоистом деформируемом анизотропном композите, рассматриваемой в полуполосовой области.

Изучение этой контактной задачи было бы невозможно без решения двух, ранее исследованных контактных задач – о действии полосового деформируемого штампа на анизотропный композит и о действии абсолютно жесткого полуполосового штампа на такую же среду. Первая задача показала способ формирования деформируемого штампа произвольной реологии. Также из нее был извлечен метод построения дисперсионных уравнений для определения дискретных резонансных частот, обнаруженных ранее академиком И.И. Воровичем в контактных задачах с деформируемым штампом. Кроме этого, в ней был построен подход, позволяющий строить точное решение для полосового штампа методом Ньютона – Канторовича, отправляясь как от параметров для широких полос, так и от параметров узких полос. Построение решений для динамических контактных задач оказалось возможным благодаря использованию в интегральных уравнениях принципа Мандельштама – Игнатовского для правильного описания свойств решений на бесконечности. Но если для случая полосового штампа можно назвать другие подходы приближенного аналитического или численного построения приближенных решений, то в случае полуполосового штампа с абсолютно жестким штампом выполненное исследование явилось единственным. Оно вобрало в себя ряд подходов для случая полосового штампа и новый, впервые развитый подход решения контактных задач с кусочно-гладкой границей. В случае деформируемого полуполосового штампа по сравнению со случаем абсолютно жесткого штампа возникла проблема построения блочного элемента с носителем в полуполосе, что ранее не было выполнено. В настоящей статье это задача впервые решена, что позволило изучать контактную задачу с деформируемым штампом в такой области и построить ее приближенное решение со всеми основными свойствами.

Ключевые слова: контактная задача, блочный элемент, полуполосовой деформируемый штамп, концентрация контактных напряжений.

* Выполнено при финансовой поддержке РНФ и Кубанского научного фонда, региональный проект 24-11-20006.

Введение

В связи с важной ролью в инженерной практике новых композитных интеллектуальных наноматериалов исследованиями в этой области занимаются многие известные ученые. Примеры таких исследований приведены в публикациях [1–15]. Однако большинство задач являются однородными, не смешанными. Смешанным или контактным задачам посвящено намного меньше публикаций, хотя в инженерной практике для конструкционных целей потребность в них значительная. Ряд важных исследований в области смешанных задач выполнен в [16–18]. Созданы пакеты прикладных программ для численного решения некоторых контактных задач, в том числе с деформируемым штампом. Однако практика показала, что одни численные методы не позволяют вскрывать тонкие особенности поведения взаимодействующих деформируемых тел, упуская важные природные и техногенные свойства и явления. К их числу, например, относятся обнаруженные путем точного решения граничных задач методом блочного элемента такие явления, как «стартовые» землетрясения. Другим примером является выявление дискретных резонансов в динамических контактных задачах с деформируемым штампом [19], которые ранее не были описаны. Аналитические исследования контактных задач начинаются с рассмотрения взаимодействий с абсолютно жестким штампом [20]. Их исследование необходимо для перехода к более сложным контактным задачам с деформируемым штампом. В настоящей статье с применением метода блочного элемента и факторизационных методов проводится анализ особенностей взаимодействия деформируемого основания с деформируемым объектом в виде полуполосы, описываемым граничной задачей для уравнений Гельмгольца. Решение этой задачи открывает возможность решения контактных задач с деформируемыми штампами сложной реологии [19, 20].

1. Постановка задачи

Рассматривается многослойная среда. На ее верхней границе вводится плоская декартова система координат $x0y$, и в области $\Omega(0 \le x < \infty, -b \le y \le b)$ действует полуполосовой штамп.

Предполагается, что в зоне контакта действует жесткий штамп без трения, то есть в зоне контакта действуют только нормальные напряжения. Вне штампа напряжения отсутствуют. Методом, описанным в [21], смешанная задача сводится к решению интегрального уравнения вида

$$\int_0^\infty \int_{-b}^{b} m(x-\xi, y-\eta) q(\xi,\eta) d\xi d\eta = \psi(x,y), \quad 0 \le x < \infty, \ -b \le y \ge b,$$
$$m(x,y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} M(\alpha,\beta) \exp[-i(\alpha x + \beta y] d\alpha d\beta. \tag{1}$$

Здесь $q(x,y)$ – контактные напряжения под штампом, $\psi(x,y)$ – перемещения в зоне контакта.

В общем случае функция $M(\alpha,\beta)$ является комплекснозначной функцией двух комплексных переменных, может иметь особенности в виде полюсов и точек ветвления, не лежащих на контурах интегрирования. Она порождается решением анизотропной граничной задачи в многослойной среде. Считается, что на бесконечности по обоим параметрам имеется поведение вида

$$M(\alpha,\beta) = O(\alpha^{-1}), \quad \beta = \text{const}, \quad M(\alpha,\beta) = O(\beta^{-1}), \quad \alpha = \text{const}, \; |\alpha|, |\beta| \to \infty.$$

Задача состоит в рассмотрении случая деформируемого штампа. Ранее указанные задачи решались только численным методом. В результате оставались вне исследования некоторые особенности решений в динамических задачах. Кроме этого, численные методы оказывались либо малоэффективными, либо несостоятельными в случаях, когда границы постановки граничных задач уходят на бесконечность либо оказываются очень больших размеров. Именно для таких задач оказывается эффективным предложенный в настоящей статье метод. Он демонстрирует значительные различия как в методе решения задачи, так и в получаемом результате в сравнении со случаем жесткого штампа. Разработанный авторами подход [19] открыл возможность использовать упакованные блочные элементы, являющиеся решениями достаточно простых граничных задач, при исследовании граничных задач для многокомпонентных сред. Их совокупности формируют дискретные топологические пространства. Решения сложных граничных задач представляются в виде комбинации блочных элементов.

В качестве решения для деформируемого штампа принимаются решения граничных задач в рассматриваемых областях, являющиеся упакованными блочными элементами для уравнения Гельмгольца.

Таким образом, необходимо построить в полуполосе $\Omega(0 \le x < \infty, -b \le y \le b)$ упакованные блочные элементы, которые будут рассматриваться как деформируемые штампы простой реологии. Штампы сложной реологии строятся комбинацией штампов простых реологий [19]. Рассматривается двумерное уравнение Гельмгольца в указанной области:

$$[\partial^2 x + \partial^2 y + k^2]\varphi(x,y) = g(x,y), \quad g(x,y) = q(x,y) - t(x,y). \tag{2}$$

Здесь $\varphi(x,y)$ – вертикальное перемещение в зоне контакта; $q(x,y)$ – контактные напряжения, действующие на объект снизу, которые надо определить; $t(x,y)$ – заданные внешние воздействия сверху на объект.

Для задачи в области Ω приняты граничные условия Неймана вида

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\varphi(x,y) = \varphi(x,-b), \quad \frac{\partial}{\partial\beta}\varphi(x,y) = \varphi(x,b), \quad \frac{\partial}{\partial\alpha}\varphi(x,y) = \varphi(0,y). \tag{3}$$

Ограничимся ради простоты четным случаем $\varphi(x,-b) = \varphi(x,b)$.

2. Построение интегрального уравнения для деформируемого штампа

Применив к (2), (3) метод блочного элемента [19], получим представление для упакованных блочных элементов в виде

$$\varphi(x,y) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\omega(\alpha,\beta)}{\alpha^2+\beta^2-k^2}\exp[-i(\alpha x+\beta y)]\,d\alpha\, d\beta, \tag{4}$$

$$\omega(\alpha,\beta) = -Q(\alpha,\beta) + S(\alpha,\beta),$$

$$S(\alpha,\beta) = \Phi(0,\beta)\exp[i(\alpha b)]\left[1-\frac{\alpha}{\alpha_+}\right] + \Phi(\alpha,b)\cos\beta b\left[1-\frac{\beta\sin\beta b}{\beta_+\sin\beta_+ b}\right] +$$

$$+\Phi(0,\beta_+)\frac{\beta\sin\beta b}{\beta_+\sin\beta_+ b}\left[\frac{\alpha}{\alpha_+}-1\right]+\Phi(\alpha_+,b)\frac{\alpha_1}{\alpha_+}\cos\beta_+ b\left[\frac{\beta\sin\beta b}{\beta_+\sin\beta_+ b}-\frac{\cos\beta b}{\cos\beta_+ b}\right]+$$

$$+Q(\alpha_+,\beta)\frac{\beta\sin\beta b}{\beta_+\sin\beta_+ b}-\frac{\alpha_2\sin\beta b}{\alpha_{2+}\sin\beta_+ b}\left[Q(\alpha,\beta_+)-Q(\alpha_+,\beta_+)\frac{\beta\sin\beta b}{\beta_+\sin\beta_+ b}\right]+$$

$$+\left\langle T(\alpha,\beta)-T(\alpha_+,\beta)\frac{\beta\sin\beta b}{\beta_+\sin\beta_+ b}+\frac{\alpha_2\sin\beta b}{\alpha_{2+}\sin\beta_+ b}\left[T(\alpha,\beta_+)-T(\alpha_+,\beta_+)\frac{\beta\sin\beta b}{\beta_+\sin\beta_+ b}\right]\right\rangle,$$

$$Q(\alpha,\beta)=\int_0^\infty\int_{-b}^b q(x,y)\exp\,[i(\alpha x+\beta y)]dxdy,\quad T(\alpha,\beta)=\int_0^\infty\int_{-b}^b t(x,y)\exp\,[i(\alpha x+\beta y)]dxdy,$$

$$\Phi(\alpha,\beta)=\int_0^\infty\int_{-b}^b \varphi(x,y)\exp\,[i(\alpha x+\beta y)]dxdy,\quad \alpha_{2+}=i\sqrt{\beta^2-k^2},\ \beta_{2+}=i\sqrt{\alpha^2-k^2},$$

$$\operatorname{Im}\alpha_{2+}>0,\ \operatorname{Im}\beta_{2+}>0.$$

Блочный элемент описывает вертикальное перемещение деформируемого штампа. Для приведения смешанной граничной задачи к интегральному уравнению приравняем перемещения (1) $\psi(x,y)$ в зоне контакта, составленные для многослойного основания, и перемещения $\varphi(x,y)$ упакованного блочного элемента (2), предварительно применив к ним преобразование Фурье. Тогда получим соотношение

$$M(\alpha,\beta)Q(\alpha,\beta)=-\frac{Q(\alpha,\beta)}{\alpha^2+\alpha^2-k^2}-\frac{S(\alpha,\beta)}{\alpha^2+\alpha^2-k^2}.$$

Приведя в этом соотношении подобные члены и применив к нему двойное обращение Фурье, получим интегральное уравнение контактной задачи с деформируемым штампом в виде:

$$\int_0^\infty\int_{-b}^b k(x-\xi,y-\eta)q(\xi,\eta)d\xi d\eta=f(x,y),\quad 0\le x<\infty,\ -b\le y\le b,$$

$$k(x,y)=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty K(\alpha,\beta)\exp\,[-i(\alpha x+\beta y)]d\alpha d\beta, \tag{5}$$

$$K(\alpha,\beta)=M(\alpha,\beta)+\frac{1}{\alpha^2+\beta^2-k^2},\quad f(x,y)=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty F(\alpha,\beta)\exp\,[-i(\alpha x+\beta y)]d\alpha d\beta,$$

$$F(\alpha,\beta)=\frac{S(\alpha,\beta)}{\alpha^2+\beta^2-k^2}.$$

3. Решение интегрального уравнения

В [20] построен метод решения интегрального уравнения (5). Построение точного решения требует обращения интегрального уравнения Фредгольма второго рода. Его точное решение может быть получено применением метода Ньютона – Канторовича. Взяв первый член приближения этого метода, построим приближенное решение. Оно после преобразований имеет вид

$$q(x,y)=q_1(x,y)+q_2(x,y)-q_3(x,y). \tag{6}$$

Здесь приняты обозначения

$$q_n(x_n, y_n) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} Q_n(\alpha, \beta) \exp[-i(\alpha x_n + \beta y_n)] d\alpha d\beta,$$

$$F_n(\alpha, \beta) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f_n(\xi_n, \eta_n) \exp[-i(\alpha x_n + \beta y_n)] d\xi_n d\eta_n, \quad n = 1, 2, \tag{7}$$

$$Q_n(\alpha, \beta) = K_n^{-1} F_n - \frac{1}{2} [K_{n+\alpha}^{-1} \{K_{n-\alpha}^{-1} F_n\}_{-\alpha} + K_{n+\beta}^{-1} \{K_{n-\beta}^{-1} F_n\}_{-\beta} +$$

$$+ K_{n+\alpha+\beta}^{-1} \{K_{n+\alpha-\beta}^{-1} \{K_{n-\alpha}^{-1} F_n\}_{+\alpha}\}_{-\beta} + K_{n+\beta+\alpha}^{-1} \{K_{n+\beta-\alpha}^{-1} \{K_{n-\beta}^{-1} F_n\}_{+\beta}\}_{-\alpha}], \tag{8}$$

$$x = x_1, \quad y = y_1 - b, \quad f_1(x_1, y_1) = f(x_1, y_1 - b),$$

$$K_1(\alpha, \beta) = K(\alpha, \beta), \quad q_{11}(x, y) = q_1(x, y + b),$$

$$x = x_2, \quad y = -y_2 + b, \quad f_2(x_2, y_2) = f(x_2, y_2 + b),$$

$$K_2(\alpha, \beta) = K(\alpha, -\beta), \quad q_{22}(x, y) = q_2(x, -(y - b)),$$

$$q_{33}(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} Q_3(\alpha, \beta) \exp[-i(\alpha x + \beta y)] d\alpha d\beta,$$

$$Q_3(\alpha, \beta) = K^{-1}(\alpha, \beta) F(\alpha, \beta) - K_{+\alpha}^{-1}(\alpha, \beta) \{K_{-\alpha}^{-1}(\alpha, \beta) F(\alpha, \beta)\}_{-\alpha},$$

$$F(\alpha, \beta) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f(\xi, \eta) \exp[-i(\alpha x + \beta y)] d\xi d\eta.$$

Участвующие в описании формул (8) операторы детально описаны в [20] и здесь не повторяются.

Выписанное приближенное решение зависит от неизвестных функционалов $Q(\alpha_+, \beta)$, $Q(\alpha, \beta_+)$, $Q(\alpha_+, \beta_+)$. Для получения соотношений, позволяющих их определять, применим к формулам (6), (7) двойное преобразование Фурье. В результате получим соотношение вида

$$Q(\alpha, \beta) = Q_1(\alpha, \beta) + Q_2(\alpha, \beta) - Q_3(\alpha, \beta).$$

Правая часть этого соотношения зависит от указанных неизвестных функционалов. Внеся в это соотношение последовательно значения α_+, β_+, получим соотношения в виде

$$Q(\alpha_+, \beta) = Q_1(\alpha_+, \beta) + Q_2(\alpha_+, \beta) - Q_3(\alpha_+, \beta),$$

$$Q(\alpha, \beta_+) = Q_1(\alpha, \beta_+) + Q_2(\alpha, \beta_+) - Q_3(\alpha, \beta_+),$$

$$Q(\alpha_+, \beta_+) = Q_1(\alpha_+, \beta_+) + Q_2(\alpha_+, \beta_+) - Q_3(\alpha_+, \beta_+).$$

В результате для определения неизвестных функционалов получена система интегральных уравнений Фредгольма второго рода, решение которой содержит определитель, являющийся основой дисперсионного уравнения для определения дискретных резонансов И.И. Воровича, как это выполнено в статье [19] для более простой области. В соответствии с формулами (5) на уравнения Фредгольма действуют операторы (4).

Вносят значения найденных функционалов в правые части полученных решений интегральных уравнений, найдем решения смешанных задач, зависящие только от внешних воздействий и заданных граничных условий на границах полосы.

Применив двойное обращение Фурье к построенному решению, получим приближенное решение контактной задачи для деформируемого полуполосового штампа.

4. Исследование концентраций контактных напряжений

1. В решениях, представленных формулой (8), первый справа член формирует вырожденную составляющую решения в зоне, дальней от границ четверти плоскости. Поэтому он не содержит концентраций напряжений.

2. Второй и третий члены в (8) содержат граничные концентрации напряжений, свойственные одномерным интегральным уравнениям Винера – Хопфа [21]. Подобно одномерному случаю [21] они дают на прямолинейных границах штампа особенности вида $x^{-1/2}$ и $y^{-1/2}$.

3. Четвертый и пятый члены в (8) описывают концентрацию напряжений в угловой точке штампа. Она определяется в результате оценки интеграла

$$q(x_0, y_0) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [K_{+\alpha+\beta}^{-1} \{K_{+\alpha-\beta}^{-1} \{K_{-\alpha}^{-1} F\}_{+\alpha}\}_{-\beta} +$$

$$+ K_{+\beta+\alpha}^{-1} \{K_{+\beta-\alpha}^{-1} \{K_{-\beta}^{-1} F\}_{+\beta}\}_{-\alpha}] \exp[-i(\alpha x_0 + \beta y_0)] d\alpha d\beta \quad (9)$$

в окрестности локальной системы координат $x_0 0 y_0$, $x_0 = x$, $y_0 = y - c$ с началом в угловой точке. Взяв в (9) приближенно функцию $K(\alpha, \beta) = (\alpha^2 + \beta^2 + A^2)^{-1/2}$, $A > 0$, получим $K_\beta(\alpha, \beta) = O(\beta^{-1/2})$, $K_{+\beta+\alpha}(\alpha, \beta) = O(\alpha^{-1/4})$, $\alpha = \delta\beta \to \infty$, $\delta = \text{const}$. Внося эти оценки в (6), получим в результате несложного анализа

$$q(x_0, y_0) = O(r^{-3/4}), \quad r = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} \to 0.$$

Это близко к значению, полученному численным методом [22, с. 129].

Заключение

Особенность решения контактных задач с деформируемым штампом предложенным подходом состоит в применении метода блочного элемента в возникающих интегральных уравнениях. После построения решения интегрального уравнения в правых его частях остаются неизвестными функционалы от решений. Они определяются путем формирования системы алгебраических уравнений с помощью полученных решений или интегральных уравнений Фредгольма. В результате их решений определяются функционалы, которые замыкают решение контактной задачи с деформируемым штампом. В построенных решениях формируются знаменатели, являющиеся основой дисперсионных уравнений для определения резонансных частот И.И. Воровича [19]. Построенное решение позволяет выявлять зоны повышенной сейсмичности в структурах, имеющих переходы горных массивов полуполосовой формы в равнинные территории.

Список литературы

1. Lou J., Fan H., Zhao O., Du J. A homogenized model for free vibration analysis of finite phononic crystal rods using strain gradient theory. *Engineering Structures*. 2024. Vol. 301. Article No 117321. DOI: 10.1016/j.engstruct.2023.117321.

2. Khajekhabaz M., Eftekhari S.A., Toghraie D. Vibration and dynamic analysis of a cantilever

sandwich microbeam integrated with piezoelectric layers based on strain gradient theory and surface effects. *Applied Mathematics and Computation*. 2022. Vol. 419. Article No 126867. https://doi.org/10.1016/j.amc.2021.126867.

3. Bacciocchi M., Tarantino A.M. Analytical solutions for vibrations and buckling analysis of laminated composite nanoplates based on third-order theory and strain gradient approach. *Composite Structures*. 2021. Vol. 272. P. 114083-1 – 114083-15. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2021.114083.

4. Thai C.H., Ferreira A.J.M., Phung-Van P. Free vibration analysis of functionally graded anisotropic microplates using modified strain gradient theory. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2020. Vol. 117. P. 284–298. https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2020.05.003.

5.Thai C.H., Nguyen-Xuan H.H., Phung-Van P. A free vibration analysis of carbon nanotube reinforced magneto-electro-elastic nanoplates using nonlocal strain gradient theory. *Finite Elements in Analysis and Design*. 2024. Vol. 236. Iss. C. Article No 104154. https://doi.org/10.1016/j.finel.2024.104154.

6. Mohammadimehr M.A., Loghman A., Ghorbanpour Arani A., Mohammadimehr M. A vibration analysis of a thick micro sandwich panel with metamaterial or porous core and carbon nanotubes/graphene platelets reinforced composite based on HSDT and NSGT. *Multiscale Science and Engineering*. 2024. Vol. 6. P. 147–162. https://doi.org/10.1007/s42493-024-00115-9.

7. Uzun B., Yayli M.Ö., Civalek Ö. Vibration of embedded restrained composite tube shafts with nonlocal and strain gradient effects. *Acta Mechanica*. 2024. Vol. 235. P. 5137–5159. https://doi.org/10.1007/s00707-024-03970-7.

8. Lim C.W., Zhang G., Reddy J.N. A higher-order nonlocal elasticity and strain gradient theory and its applications in wave propagation. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2015. Vol. 78. P. 298–313. https://doi.org/10.1016/j.jmps.2015.02.001.

9. Jin H., Sui S., Zhu C., Li C. Axial free vibration of rotating FG piezoelectric nano-rods accounting for nonlocal and strain gradient effects. *Journal of Vibration Engineering & Technologies*. 2023. Vol. 11. P. 537–549. https://doi.org/10.1007/s42417-022-00592-y.

10. Li H.N., Wang W., Lai S.K., Yao L.Q., Li C. Nonlinear vibration and stability analysis of rotating functionally graded piezoelectric nanobeams. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*. 2024. Vol. 24. No 09. Article No 2450103. https://doi.org/10.1142/S0219455424501037.

11. Guo L.M., Cai J.W., Xie Z.Y., Li C. Mechanical responses of symmetric straight and curved composite microbeams. *Journal of Vibration Engineering & Technologies*. 2024. Vol. 12. P. 1537–1549. https://doi.org/10.1007/s42417-023-00924-6.

12. Li C., Zhu C., Lim C.W., Li S. Nonlinear in-plane thermal buckling of rotationally restrained functionally graded carbon nanotube reinforced composite shallow arches under uniform radial loading. *Applied Mathematics and Mechanics*. 2022. Vol. 43. Iss. 12. P. 1821–1840. https://doi.org/10.1007/s10483-022-2917-7.

13. Li C., Yao L., Chen W., Li S. Comments on nonlocal effects in nano-cantilever beams. *International Journal of Engineering Science*. 2015. Vol. 87. P. 47–57. https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2014.11.006.

14. Zhu C., Chen Y., Zhao J., Li C., Lei Z. On nonlocal vertical and horizontal bending of a micro-beam. *Mathematical Problems in Engineering*. 2022. Vol. 2022. P. 5121377-1 – 5121377-10. https://doi.org/10.1155/2022/5121377.

15. Wang P.Y., Li C., Li S., Yao L.Q. A variational approach for free vibrating micro-rods with classical and non-classical new boundary conditions accounting for nonlocal strengthening and temperature effects. *Journal of Thermal Stresses*. 2020. Vol. 43. Iss. 4. P. 421–439. https://doi.org/10.1080/01495739.2020.1722048.

16. Горячева И.Г. *Механика фрикционного взаимодействия*. М.: Наука, 2001. 478 с.

17. Баженов В.Г., Игумнов Л.А. *Методы граничных интегральных уравнений и граничных элементов*. М.: Физматлит, 2008. 352 с.

18. Калинчук В.В., Белянкова Т.И. *Динамические контактные задачи для предварительно напряженных тел*. М.: Физматлит, 2002. 240 с.

19. Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М. О контактных задачах с деформируемым штампом. *Проблемы прочности и пластичности*. 2022. Т. 84. №1. С. 25–34. DOI: 10.32326/1814-9146-2022-84-1-25-34.

20. Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М., Евдокимов В.С., Хрипков Д.А Динамические контактные задачи для полуполосового штампа на анизотропном композите. *Проблемы прочности и пластичности*. 2024. Т. 86. № 4. С. 461–470. DOI: 10.32326/1814-9146-2024-86-4-461-470.

21. Ворович И.И., Бабешко В.А. *Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей.* М.: Наука, 1979. 320 с.

22. Бабешко В.А., Глушков Е.В., Зинченко Ж.Ф. *Динамика неоднородных линейно-упругих сред*. М.: Наука, 1989. 344 с.

References

1. Lou J., Fan H., Zhao O., Du J. A homogenized model for free vibration analysis of finite phononic crystal rods using strain gradient theory. *Eng. Struct*. 2024. Vol. 301. Article No 117321. DOI: 10.1016/j.engstruct.2023.117321.

2. Khajekhabaz M., Eftekhari S.A., Toghraie D. Vibration and dynamic analysis of a cantilever sandwich microbeam integrated with piezoelectric layers based on strain gradient theory and surface effects. *Appl. Math. Comput*. 2022. Vol. 419. Article No 126867. https://doi.org/10.1016/j.amc.2021.126867.

3. Bacciocchi M., Tarantino A.M. Analytical solutions for vibrations and buckling analysis of laminated composite nanoplates based on third-order theory and strain gradient approach. *Compos. Struct.* 2021. Vol. 272, P. 114083-1 – 114083-15. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2021.114083.

4. Thai C.H., Ferreira A.J.M., Phung-Van P. Free vibration analysis of functionally graded anisotropic microplates using modified strain gradient theory. *Eng. Anal. Bound. Elem*. 2020. Vol. 117. P. 284–298. https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2020.05.003.

5.Thai C.H., Nguyen-Xuan H.H., Phung-Van P. A free vibration analysis of carbon nanotube reinforced magneto-electro-elastic nanoplates using nonlocal strain gradient theory. *Finite Elem. Anal. Des*. 2024. Vol. 236. Iss. C. Article No 104154. https://doi.org/10.1016/j.finel.2024.104154.

6. Mohammadimehr M.A., Loghman A., Ghorbanpour Arani A., Mohammadimehr M. A vibration analysis of a thick micro sandwich panel with metamaterial or porous core and carbon nanotubes/graphene platelets reinforced composite based on HSDT and NSGT. *Multiscale Science and Engineering*. 2024. Vol. 6. P. 147–162. https://doi.org/10.1007/s42493-024-00115-9.

7. Uzun B., Yayli M.Ö., Civalek Ö. Vibration of embedded restrained composite tube shafts with nonlocal and strain gradient effects. *Acta Mech*. 2024. Vol. 235. P. 5137–5159. https://doi.org/10.1007/s00707-024-03970-7.

8. Lim C.W., Zhang G., Reddy J.N. A higher-order nonlocal elasticity and strain gradient theory and its applications in wave propagation. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2015. Vol. 78. P. 298–313. https://doi.org/10.1016/j.jmps.2015.02.001.

9. Jin H., Sui S., Zhu C., Li C. Axial free vibration of rotating FG piezoelectric nano-rods accounting for nonlocal and strain gradient effects. *J. Vib. Eng. Technol*. 2023. Vol. 11. P. 537–549. https://doi.org/10.1007/s42417-022-00592-y.

10. Li H.N., Wang W., Lai S.K., Yao L.Q., Li C. Nonlinear vibration and stability analysis of rotating functionally graded piezoelectric nanobeams. *Int. J. Struct. Stab. Dyn*. 2024. Vol. 24. No 09. Article No 2450103. https://doi.org/10.1142/S0219455424501037.

11. Guo L.M., Cai J.W., Xie Z.Y., Li C. Mechanical responses of symmetric straight and curved composite microbeams. *J. Vib. Eng. Technol.* 2024. Vol. 12. P. 1537–1549. https://doi.org/10.1007/s42417-023-00924-6.

12. Li C., Zhu C., Lim C.W., Li S. Nonlinear in-plane thermal buckling of rotationally restrained functionally graded carbon nanotube reinforced composite shallow arches under uniform radial loading. *Appl. Math. Mech.* 2022. Vol. 43. Iss. 12. P. 1821–1840. https://doi.org/10.1007/s10483-022-2917-7.

13. Li C., Yao L., Chen W., Li S. Comments on nonlocal effects in nano-cantilever beams. *Int. J. Eng. Sci.* 2015. Vol. 87. P. 47–57. https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2014.11.006.

14. Zhu C., Chen Y., Zhao J., Li C., Lei Z. On nonlocal vertical and horizontal bending of a micro-beam. *Math. Probl. Eng.* 2022. Vol. 2022. P. 5121377-1 – 5121377-10. https://doi.org/10.1155/2022/5121377.

15. Wang P.Y., Li C., Li S., Yao L.Q. A variational approach for free vibrating micro-rods with classical and non-classical new boundary conditions accounting for nonlocal strengthening and temperature effects. *J. Therm. Stresses*. 2020. Vol. 43. Iss. 4. P. 421–439. https://doi.org/10.1080/01495739.2020.1722048.

16. Goryacheva I.G. *Mekhanika friktsionnogo vzaimodeystviya* [*Mechanics of Frictional Interaction*]. Moscow. Nauka Publ. 2001. 478 p. (In Russian).

17. Bazhenov V.G., Igumnov L.A. *Metody granichnykh integralnykh uravneniy i granichnykh elementov* [*Methods of Boundary Integral Equations and Boundary Elements*]. Moscow. Fizmatlit Publ. 2008. 352 p. (In Russian).

18. Kalinchuk V.V., Belyankova T.I. *Dinamicheskie kontaktnye zadachi dlya predvaritelno napryazhennykh tel* [*Dynamic Contact Problems for Prestressed Bodies*]. Moscow. Fizmatlit Publ. 2002. 240 p. (In Russian).

19. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M. O kontaktnykh zadachakh s deformiruemym shtampom [On contact problems with deformable stamp]. *Problemy prochnosti i plastichnosti* [*Problems of Strength and Plasticity*]. 2022. Vol. 84. No 1. P. 25–34 (In Russian).

20. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M., Evdokimov V.S., Khripkov D.A. Dinamicheskie kontaktnye zadachi dlya polupolosovogo shtampa na anizotropnom kompozite [Dynamic contact problems for a half-strip stamp on an anisotropic composite]. *Problemy prochnosti i plastichnosti* [*Problems of Strength and Plasticity*]. 2024. Vol. 86. No 4. P. 461–470 (In Russian).

21. Vorovich I.I., Babeshko V.A. *Dinamicheskie smeshannye zadachi teorii uprugosti dlya neklassicheskikh oblastey* [*Dynamic Mixed Problems of Elasticity Theory for Nonclassical Domains*]. Moscow. Nauka Publ. 1979. 320 p. (In Russian)

22. Babeshko V.A., Glushkov E.V., Zinchenko Zh.F. *Dinamika neodnorodnykh lineyno-uprugikh sred* [*Dynamics of Inhomogeneous Linear-Elastic Media*]. Moscow. Nauka Publ. 1989. 344 p. (In Russian).

CONTACT PROBLEM WITH A SEMI-STRIP DEFORMABLE STAMP*

Babeshko V.A.[1,2]**, Evdokimova O.V.**[2]**, Babeshko O.M.**[1]

[1]*Kuban State University, Krasnodar, Russian Federation*
[2]*Southern Scientific Center of the Russian Academy of Sciences, Rostov-on-Don, Russian Federation*

babeshko41@mail.ru

Received by the Editor 2025/05/12

The paper presents one of the methods for studying the contact problem for a deformable stamp on a layered deformable anisotropic composite, considered in the half-band region. Studying this contact problem would be impossible without a solution.
Two previously studied contact problems are on the effect of a strip deformable stamp on an anisotropic composite and on the effect of an absolutely rigid half-strip stamp on the same medium. The first task showed a way to form a deformable stamp of arbitrary rheology. A method for constructing dispersion equations for determining discrete resonant frequencies,

* Carried out with the financial support of the Russian Science Foundation and the Kuban Science Foundation, regional project of the Krasnodar Territory 24-11-20006.

previously discovered by Academician I.I. Vorovich in contact problems with a deformable die, was also extracted from it. In addition, it developed an approach that makes it possible to build an accurate solution for a strip stamp using the Newton – Kantorovich method, starting from the parameters for both wide strips and narrow strips. It should be noted that the construction of solutions for dynamic contact problems turned out to be possible due to the use of the Mandelstam – Ignatovsky principle in integral equations to correctly describe the properties of solutions at infinity. But if, for the case of a stripe stamp, you can call If there are other approaches to approximate analytical or numerical construction of approximate solutions, then in the case of a half-strip stamp with an absolutely rigid stamp, the performed study was the only one. It incorporated both a number of approaches for the case of a strip stamp, and a new, first-developed approach to solving contact problems with a piecewise smooth boundary. In the problem with the case Compared to the case of an absolutely rigid die, there was a problem with constructing a block element with a carrier in the half-strip, which had not been done before. In this paper, this problem is solved for the first time, which made it possible to study the contact problem with a deformable stamp in such a field and construct its approximate solution with all the basic properties.

Keywords: contact problem, block element, semi-strip deformable stamp, contact stress concentration.