

УДК 539.374

DOI: 10.32326/1814-9146-2025-87-2-228-240

**МОДЕЛЬ НЕУПРУГОСТИ, МЕТОД ИДЕНТИФИКАЦИИ
МАТЕРИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ И ВЕРИФИКАЦИЯ МОДЕЛИ**© 2025 г. **Бондарь В.С., Абашев Д.Р., Шарова В.И.***Московский политехнический университет, Москва, Российская Федерация*

tm@mospolytech.ru

Поступила в редакцию 25.03.2025

Формулируются уравнения модели неупругости. Скорость деформаций определяется как сумма скоростей упругой и неупругой деформаций. Упругие деформации рассчитываются на основе обобщенного закона Гука. В пространстве компонентов тензора напряжений вводится концепция поверхности нагружения, которая может изменять свои размеры (как изотропно расширяясь, так и сужаясь) и перемещаться в процессе нагружения. Для радиуса этой поверхности предлагается эволюционное уравнение, учитывающее воздействие неизотермических нагрузок и восстановление механических свойств материала после отжига. Смещение поверхности нагружения представлено как сумма смещений (микронапряжений) двух типов. Для разграничения монотонных и циклических процессов деформирования в пространстве компонентов тензора неупругих деформаций вводится поверхность памяти, которая характеризует оба типа нагружений. Для процессов посадки и вышагивания (ratcheting) неупругого деформирования при асимметричных циклических нагружениях предлагаются дополнительные эволюционные уравнения для микронапряжений первого типа, охватывающие как монотонные, так и циклические деформации. Скорости неупругих деформаций вычисляются на основе ассоциированного (градиентального) закона течения. Для моделирования накопления повреждений используется кинетическое уравнение, учитывающее работу микронапряжений второго типа на поле неупругих деформаций, с обобщением на неизотермические нагрузки, а также на процессы охрупчивания и залечивания материала. Определены необходимые материальные функции, а также приведены базовые экспериментальные данные, на которых построен метод идентификации. В частности, приведены значения материальных параметров для нержавеющей стали 12X18Н10Т. Проведена верификация предложенной модели для циклического и монотонного растяжения-сжатия образцов из этой стали до разрушения. Также рассматриваются явления ползучести при различных уровнях напряжений до разрушения. Для сравнения теоретических и экспериментальных результатов используются диаграммы растяжения-сжатия, зависимости размаха и среднего напряжения от числа циклов, количество циклов до разрушения, а также диаграммы ползучести и длительной прочности материала.

Ключевые слова: модель неупругости, материальные параметры, базовый эксперимент, метод идентификации, верификация, циклическое нагружение, ползучесть, длительная прочность.

Введение

В практических расчетах кинетики напряженно-деформированного состояния и ресурса конструкций современной техники в условиях термовязкопластического (неупругого) деформирования нашли широкое применение различные варианты теорий термовязкопластичности и неупругости, основанные на теории течения при комбинированном упрочнении. Наибольшее распространение нашли модели Ж.Л. Шабоша [1–5], Ю.Г. Коротких [6–11] и В.С. Бондаря [12–19].

При несимметричных мягких циклических режимах нагружения происходит одностороннее накопление деформаций (ratcheting), что приводит к существенному снижению ресурса, и поэтому учет этого явления в моделях является весьма актуальным. Для описания явления вышагивания в вариантах модели Шабоша [4, 5, 20–25] вводится дополнительное количество эволюционных уравнений для микронапряжений и увеличивается число подгоночных параметров. В вариантах модели Коротких рассматриваются разные поверхности памяти и дополнительные эволюционные уравнения для микронапряжений [6, 10, 11]. В вариантах модели Бондаря уравнение поверхности памяти, разделяющей монотонное и циклическое нагружения, рассматривается в пространстве составляющих тензора пластических (неупругих) деформаций [16, 17]. Сравнение этих подходов проводится в статьях [18, 19].

В настоящей статье приводятся основные уравнения модели неупругости, дается перечень материальных параметров и функций, подлежащих экспериментальному определению. Представлен базовый эксперимент, метод идентификации материальных параметров и функций на примере циклического деформирования нержавеющей стали 12Х18Н10Т. Приводятся результаты верификации модели при циклическом нагружении образцов из этой стали вплоть до разрушения. Рассматривается ползучесть при трех уровнях напряжений вплоть до разрушения. Сравнение расчетных и экспериментальных результатов проводится на диаграммах растяжения-сжатия, зависимостях размаха и среднего напряжения цикла от номера цикла, по числу циклов до разрушения, на диаграммах ползучести и длительной прочности.

1. Основные уравнения модели

Модель неупругости описывают приведенные далее уравнения. Подробное описание модели представлено в [12–19]. Скорости деформаций $\dot{\epsilon}_{ij}$ равны сумме скоростей упругой $\dot{\epsilon}_{ij}^e$ и неупругой $\dot{\epsilon}_{ij}^{in}$ деформаций:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^e + \dot{\epsilon}_{ij}^{in}, \quad (1)$$

$$\dot{\epsilon}_{ij}^e = \frac{1}{E} [\dot{\sigma}_{ij} - \nu(3\dot{\sigma}_0\delta_{ij} - \dot{\sigma}_{ij})] + \alpha_{ij}^{eT} \dot{T}, \quad (2)$$

$$\alpha_{ij}^{eT} = \alpha_T \delta_{ij} - \frac{1}{E^2} [\sigma_{ij} - \nu(3\sigma_0\delta_{ij} - \sigma_{ij})] \frac{dE}{dT} - \frac{1}{E} (3\sigma_0\delta_{ij} - \sigma_{ij}) \frac{d\nu}{dT}. \quad (3)$$

Здесь E, ν, α_T – модуль Юнга, коэффициент Пуассона, коэффициент температурного расширения; $\sigma_0 = \sigma_{ii}/3$ – средние напряжения; δ_{ij} – символ Кронекера; σ_{ij} – тензор напряжений; T – температура.

Уравнение поверхности нагружения, разделяющей упругое и неупругое деформирование в пространстве напряжений, имеет вид:

$$f(\sigma_{ij}) = \frac{3}{2} (s_{ij} - a_{ij})(s_{ij} - a_{ij}) - C^2 = 0, \quad (4)$$

где $s_{ij}^* = s_{ij} - a_{ij}$ – девиатор активных напряжений, s_{ij} , a_{ij} – девиаторы напряжений и микронапряжений соответственно. Скаляр C есть радиус поверхности нагружения, он определяется соответствующим эволюционным уравнением:

$$\dot{C} = q_\varepsilon \dot{\varepsilon}_{u^*}^{\text{in}} + q_T \dot{T} - q_R, \quad \dot{\varepsilon}_{u^*}^{\text{in}} = \sqrt{\frac{3}{2} \dot{\varepsilon}_{ij}^{\text{in}} \dot{\varepsilon}_{ij}^{\text{in}}}. \quad (5)$$

Здесь $\varepsilon_{u^*}^{\text{in}}$ – накопленная неупругая деформация; $\dot{\varepsilon}_{ij}^{\text{in}}$ – скорость накопленной неупругой деформации; q_ε, q_T, q_R – функции, выражающиеся через материальные функции:

$$q_\varepsilon = \begin{cases} \frac{\partial C_p}{\partial \varepsilon_{u^*}^{\text{in}}} - K_C \left(\frac{C - C_p}{C_p} \right) & \text{при циклическом нагружении,} \\ \frac{\partial C_p}{\partial \varepsilon_{u^*}^{\text{in}}} + M_C & \text{при монотонном нагружении,} \end{cases} \quad (6)$$

где C_p, K_C, M_C – материальные функции;

$$q_T = \frac{C}{C_p} \cdot \frac{\partial C_p}{\partial T}, \quad q_R = q_\varepsilon P_C, \quad (7)$$

$$P_C = \exp b_C \cdot (C - \sigma_{-1})^{n_C} (1 - \omega)^{-m_\omega}, \quad (8)$$

$$\dot{\sigma}_{-1} = \begin{cases} \frac{\partial C_p}{\partial \varepsilon_{u^*}^{\text{in}}} \dot{\varepsilon}_{u^*}^{\text{in}} + \frac{\partial C_p}{\partial T} \dot{T} & \text{при циклическом нагружении,} \\ 0 & \text{при монотонном нагружении,} \end{cases} \quad (9)$$

где b_C, n_C, m_ω – материальные функции; σ_{-1} – предел ползучести (в начальный момент $\sigma_{-1} = C_p(T, 0)$); $\omega \in [0, 1)$ – мера повреждения.

Микронапряжения a_{ij} представляются в виде суммы микронапряжений 1-го и 2-го типов:

$$a_{ij} = a_{ij}^{(1)} + a_{ij}^{(2)}, \quad (10)$$

$$\dot{a}_{ij}^{(m)} = \frac{2}{3} g^{(m)} \dot{\varepsilon}_{ij}^{\text{in}} + g_a^{(m)} a_{ij}^{(m)} \dot{\varepsilon}_{u^*}^{\text{in}} + g_T^{(m)} a_{ij}^{(m)} \dot{T} - g_R^{(m)} a_{ij}^{(m)}, \quad m = 1, 2. \quad (11)$$

Здесь $g^{(m)}, g_a^{(m)}, g_T^{(m)}, g_R^{(m)}$ – функции, которые выражаются через материальные функции:

$$g^{(1)} = E_a, \quad (12)$$

$$g_a^{(1)} = \begin{cases} \frac{1}{E_a} \frac{\partial E_a}{\partial \varepsilon_{u^*}^{\text{in}}} & \text{при циклическом нагружении,} \\ 0 & \text{при монотонном нагружении,} \end{cases} \quad (13)$$

$$\frac{\partial E_a}{\partial \varepsilon_{u^*}^{\text{in}}} = \begin{cases} -K_E \left(\frac{E_a}{E_{a0}} \right)^{n_E} & \text{при циклическом нагружении,} \\ M_E \left(\frac{E_{a0} - E_a}{E_{a0}} \right) & \text{при монотонном нагружении,} \end{cases} \quad (14)$$

$$\dot{E}_a = \frac{\partial E_a}{\partial \varepsilon_{u^*}^{\text{in}}} \dot{\varepsilon}_{u^*}^{\text{in}} + \frac{E_a}{E_{a0}} \frac{dE_{a0}}{dT} \dot{T}, \quad (15)$$

где E_{a0} – материальная функция, определяющая начальное значение модуля анизотропного упрочнения 1-го типа; E_a, K_E, M_E, n_E – материальные функции;

$$g^{(2)} = \beta \sigma_a, \quad g_a^{(2)} = -\beta, \quad (16)$$

$$g_T^{(1)} = \frac{1}{E_{a0}} \frac{dE_{a0}}{dT}, \quad g_T^{(2)} = \frac{1}{\sigma_a} \frac{d\sigma_a}{dT}, \quad (17)$$

$$g_R^{(m)} = \left(\frac{g^{(1)} + g^{(2)}}{a_u} + g_a^{(m)} \right) P_a, \quad (18)$$

$$P_a = \exp b_a (a_u)^{n_a} (1 - \omega)^{-m_\omega}, \quad (19)$$

$$a_u = \sqrt{\frac{3}{2}} a_{ij} a_{ij}, \quad (20)$$

где b_a, n_a – материальные функции.

Скорости неупругой деформации вычисляются на основе соотношения

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{\text{in}} = \frac{3}{2} \frac{s_{ij}^*}{\sigma_u^*} \dot{\varepsilon}_{u^*}^{\text{in}}, \quad \sigma_u^* = \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij}^* s_{ij}^*}. \quad (21)$$

Скорость накопленной неупругой деформации при мягком (задано напряжение) и жестком (задана деформация) нагружениях определяется выражениями:

$$\dot{\varepsilon}_{u^*}^{\text{in}} = \frac{1}{E_*} \left[\frac{3}{2} \frac{s_{ij}^* \dot{\sigma}_{ij}}{\sigma_u^*} - B_T \dot{T} + B_R \right], \quad (22)$$

$$\dot{\varepsilon}_{u^*}^{\text{in}} = \frac{1}{E_* + 3G} \left[3G \frac{s_{ij}^* (\dot{\varepsilon}_{ij} - \alpha_{ij}^{eT} T)}{\sigma_u^*} - B_T \dot{T} + B_R \right], \quad (23)$$

$$E_* = q_\varepsilon + \sum_{m=1}^2 (g^{(m)} + g_a^{(m)} a_u^{*(m)}), \quad (24)$$

$$B_T = q_T + \sum_{m=1}^2 g_T^{(m)} a_u^{*(m)}, \quad (25)$$

$$B_R = q_R + \sum_{m=1}^2 g_R^{(m)} a_u^{*(m)}, \quad (26)$$

$$a_u^{*(m)} = \frac{3}{2} \frac{s_{ij}^* a_{ij}^{(m)}}{\sigma_u^*}, \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (27)$$

Условия упругого и неупругого состояний имеют вид:

$$f(\sigma_{ij}) < 0 \cup \dot{\varepsilon}_{u^*}^{\text{in}} \leq 0 - \text{упругость}, \quad (28)$$

$$f(\sigma_{ij}) = 0 \cap \dot{\varepsilon}_{u^*}^{\text{in}} > 0 - \text{неупругость}. \quad (29)$$

Далее приводится уравнение поверхности памяти [15–17] для монотонного и циклического деформирования:

$$F(\varepsilon_{ij}^{\text{in}}) = \frac{2}{3} (\varepsilon_{ij}^{\text{in}} \varepsilon_{ij}^{\text{in}}) - C_\varepsilon^2 = 0. \quad (30)$$

Здесь C_ε – размер (радиус) поверхности памяти,

$$\dot{C}_\varepsilon = (n_{ij} n_{ij}^*) \dot{\varepsilon}_{ij}^{\text{in}}, \quad n_{ij} = \sqrt{\frac{3}{2} \frac{s_{ij}^*}{\sigma_u^*}}, \quad n_{ij}^* = \sqrt{\frac{2}{3} \frac{\varepsilon_{ij}^{\text{in}}}{C_\varepsilon}}, \quad (31)$$

$$(\varepsilon_{ij}^{\text{in}}) < 0 \cup (n_{ij} n_{ij}^*) \leq 0 - \text{циклическое деформирование}, \quad (32)$$

$$F(\varepsilon_{ij}^{\text{in}}) = 0 \cap (n_{ij} n_{ij}^*) > 0 - \text{монотонное деформирование}.$$

Для описания процесса накопления повреждений используются кинетические уравнения:

$$\dot{\omega} = \alpha \omega^{(\alpha-1)/\alpha} \frac{a_{ij}^{(2)} \dot{\varepsilon}_{ij}^{\text{in}}}{W} - g_\omega \omega, \quad (33)$$

$$\dot{W} = g_W^T \dot{T} - g_W W. \quad (34)$$

Здесь W – энергия разрушения; α , g_ω , g_W^T , g_W – функции, которые выражаются через материальные функции:

$$g_\omega = \lambda, \quad \lambda = \begin{cases} 0 & \text{при } \sigma_{ii} \geq 0, \\ \exp b_\lambda \cdot |\sigma_{ii}|^{n_\lambda} & \text{при } \sigma_{ii} < 0; \end{cases} \quad (35)$$

$$g_W = \rho, \quad \rho = \exp b_\rho \cdot (\sigma_u)^{n_\rho}, \quad \sigma_u = \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij}}; \quad (36)$$

$$g_W = \rho, \quad \rho = \exp b_\rho \cdot (\sigma_u)^{n_\rho}, \quad \sigma_u = \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij}}, \quad (37)$$

где b_λ , n_λ , b_ρ , W_0 – материальные функции.

Таким образом, модель неупругости замыкают следующие материальные функции: $E(T)$, $\nu(T)$, $\alpha_T(T)$, $C_p(T, \varepsilon_{ij}^{\text{in}})$, $E_{a0}(T)$, $\sigma_a(T)$, $\beta(T)$, $K_C(T)$, $M_C(T)$, $K_E(T)$, $n_E(T)$, $M_E(T)$, $W_0(T)$, $b_C(T)$, $n_C(T)$, $b_a(T)$, $n_a(T)$, $m_\omega(T)$, $b_\lambda(T)$, $n_\lambda(T)$, $b_\rho(T)$, $n_\rho(T)$.

2. Базовый эксперимент

Материальные функции при упругопластическом деформировании находятся по результатам экспериментов по циклическому нагружению при скорости деформирования 10^{-2} – 10^{-3} с⁻¹.

Зависимость напряжений от деформаций базового эксперимента по циклическому растяжению-сжатию образцов нержавеющей стали 12Х18Н10Т для определения упругопластических параметров представлена на рис. 1.

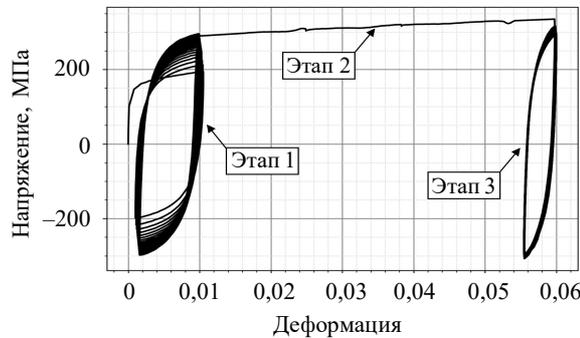


Рис. 1. Зависимость напряжений от деформаций базового эксперимента

- Эксперимент включает в себя три этапа нагружения:
- циклическое нагружение при размахе деформации $\Delta\varepsilon^{(1)}$ и среднем значении деформации $\varepsilon_m^{(1)}$ и числе циклов $N^{(1)}$;
 - растяжение до $\varepsilon^{(2)}$;
 - циклическое нагружение $\varepsilon_m^{(3)}, \Delta\varepsilon^{(3)}$, число циклов до разрушения N_f .

Базовый эксперимент для определения материальных функций ползучести проводился в условиях:

- при постоянном напряжении растяжения (3–5 уровней) при кратковременной ползучести до разрушения;
- при постоянном напряжении растяжения (3–5 уровней) при установившейся ползучести;
- при постоянном напряжении сжатия (1-2 уровня).

3. Метод идентификации материальных функций

Метод идентификации упругопластических материальных функций на основе результатов базового эксперимента приводится в [12–15]. Материальные функции ползучести находятся из результатов эксперимента, представленных на рис. 2.

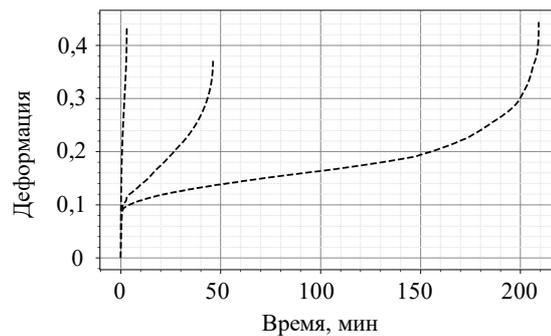


Рис. 2. Диаграммы ползучести при напряжениях 343, 360 и 377 МПа и температуре 600 °С

Далее рассматривается метод идентификации материальных функций ползучести по результатам базового эксперимента. Параметр разупрочнения m_ω определяется на основе соотношения с использованием результатов при кратковременной ползучести [12–15]:

$$m_\omega = \frac{\varepsilon_p^{\text{in}}}{\dot{\varepsilon}_0^{\text{in}} t_p^+} - 1. \quad (38)$$

Для определения материальных функций ползучести $b_C(T), n_C(T), b_a(T), n_a(T)$ используются зависимости между скоростью ползучести $\dot{\varepsilon}_0^{\text{in}}$ и радиусом C , а также между $\dot{\varepsilon}_0^{\text{in}}$ и микронапряжением a после начального упругопластического деформирования:

$$P_C = \dot{\varepsilon}_0^{\text{in}}, \quad \exp b_C \cdot |C - C_{P0}|^{n_C} = \dot{\varepsilon}_0^{\text{in}}, \quad b_C + \ln |C - C_{P0}| \cdot n_C = \ln \dot{\varepsilon}_0^{\text{in}}, \quad (39)$$

$$P_a = \dot{\varepsilon}_0^{\text{in}}, \quad \exp b_a \cdot a^{n_a} = \dot{\varepsilon}_0^{\text{in}}, \quad b_a + n_a \ln a = \ln \dot{\varepsilon}_0^{\text{in}}. \quad (40)$$

Из линейных зависимостей (39), (40), построенных на основе метода наименьших квадратов, можно получить материальные параметры изотропной и анизотропной ползучести.

Для определения материальных функций охрупчивания $b_p(T)$, $n_p(T)$ необходимы экспериментальные данные по деформации разрушения только за счет ползучести и времени разрушения при различных уровнях напряжения растяжения. Тогда модуль охрупчивания ρ вычисляется по формуле [12–15]:

$$\rho = \frac{1}{t_p^+} \ln \frac{W_0}{a^{(2)} \epsilon_p^{\text{in}}}, \quad (41)$$

а материальные функции охрупчивания определяются из линейной зависимости

$$b_p + n_p \ln \sigma = \ln \rho, \quad (42)$$

построенной на основе метода наименьших квадратов.

Материальные функции залечивания $b_\lambda(T)$, $n_\lambda(T)$ определяются по результатам эксперимента по длительной прочности при растяжении и сжатии. Степенные законы длительной прочности при растяжении и сжатии имеют вид:

$$t_p^+ = D^+ |\sigma|^{-m}, \quad (43)$$

$$t_p^- = D^- |\sigma|^{-m}. \quad (44)$$

Модуль залечивания λ определяется по формуле [12–15]

$$\lambda = \frac{1}{t_p^+} - \frac{1}{t_p^-} = \left(\frac{1}{D^+} - \frac{1}{D^-} \right) \cdot |\sigma|^m. \quad (45)$$

Тогда материальные функции залечивания будут вычисляться по формулам:

$$b_\lambda = \ln \left(\frac{1}{D^+} - \frac{1}{D^-} \right), \quad n_\lambda = m. \quad (46)$$

В таблицах 1 и 2 приведены материальные функции нержавеющей стали 12X18H10T при температуре 600 °С.

Таблица 1

Материальные функции стали 12X18H10T

$T, ^\circ\text{C}$	$E, \text{МПа}$	ν	$M_C, \text{МПа}$	$E_{a0}, \text{МПа}$	$\sigma_a, \text{МПа}$	β	$K_E, \text{МПа}$	n_E	$K_C, \text{МПа}$
600	150000	0,28	500	520	145	655	73600	3,3	110
m_ω	n_C	b_C	n_a	b_a	n_λ	b_λ	n_p	b_p	
5	28,6	-143,9	76,2	-408,9	44,9	-268	44,1	-261,6	

Таблица 2

Материальная функция изотропного упрочнения стали 12X18H10T

ϵ_{u*}^p	0	0,001	0,0018	0,0028	0,043	0,006	0,015	0,034	0,064	0,1
$C_p, \text{МПа}$	33	34	34	34,2	34,4	35	46	68	88	104
ϵ_{u*}^p	0,22	0,42	0,63	0,78	1,2	2,2	5	11	18	27
$C_p, \text{МПа}$	137	154	157	158	161	164	169	174	177	181

4. Верификация модели неупругости

Верификация модели неупругости при циклическом и монотонном деформировании со скоростью деформации 10^{-2} с^{-1} при температуре 600 °С проводится по результатам эксперимента на образцах из нержавеющей стали 12X18H10T по программе, состоящей из трех блоков нагружения.

На рис. 3, 4 и 5 приведены расчетные и экспериментальные зависимости при упругопластическом деформировании на всех этапах нагружения. Здесь сплошная кривая – расчет, светлые кружки – эксперимент.

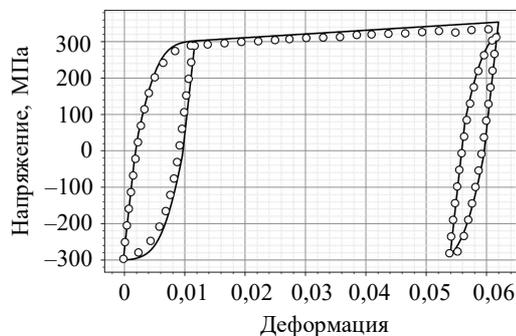


Рис. 3. Зависимость напряжений от деформаций на последнем цикле 1-го этапа, 2-м этапе и на первом цикле 3-го этапа нагружения

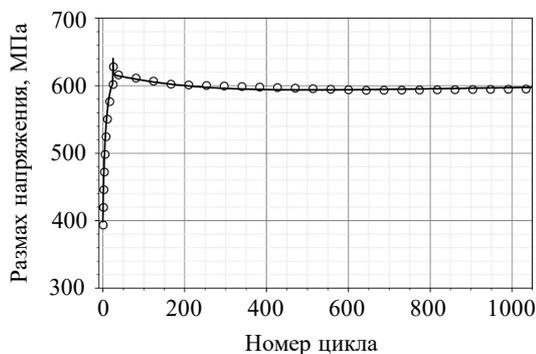


Рис. 4. Зависимость размаха напряжения от номера цикла

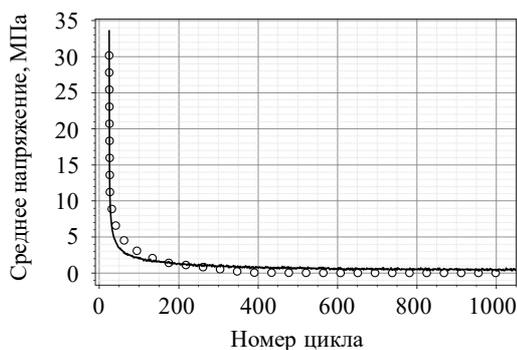


Рис. 5. Зависимость среднего напряжения от номера цикла

Число циклов до разрушения при расчете составляет 3614 циклов, а при эксперименте – 3371 цикл.

Верификация модели неупругости при ползучести проводится по результатам эксперимента на образцах из нержавеющей стали 12Х18Н10Т. Результаты расчетов и экспериментов показаны на рис. 6 и 7. При уровне напряжения 343 МПа экспериментальные точки обозначены зелеными кружками, а расчет – зеленой линией; при 360 МПа – оранжевыми кружками и оранжевой линией; при 377 МПа – синими

кружками и синей линией. На рис. 7 приведена диаграмма длительной прочности стали 12X18Н10Т при 600 °С, где сплошная кривая – расчет, а светлые кружки – эксперимент.

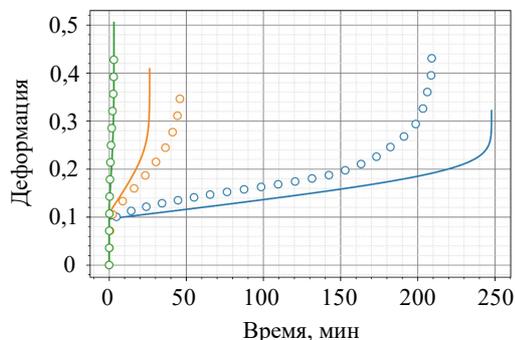


Рис. 6. Диаграммы ползучести стали 12X18Н10Т при 600 °С

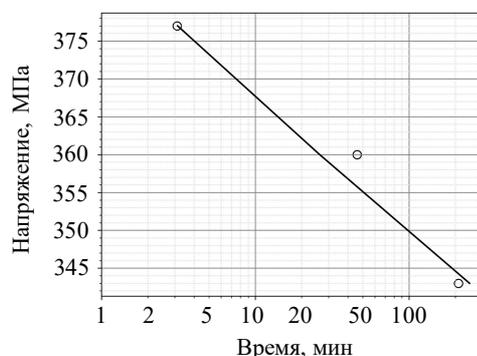


Рис. 7. Диаграмма длительной прочности стали 12X18Н10Т при 600 °С

Заключение

Изложены уравнения модели неупругости, предназначенные для практических расчетов выработанного и остаточного ресурса материала при повторных и длительных термомеханических нагрузках. Определен базовый эксперимент и метод идентификации материальных функций, которые замыкают модель неупругости. Получены материальные функции нержавеющей стали 12X18Н10Т. Проведена верификация модели неупругости в условиях циклического и монотонного растяжения-сжатия образцов из нержавеющей стали до момента разрушения. Также исследована ползучесть до разрушения. Сравнение результатов расчетов и экспериментов показывает, что отличие по диаграммам упругопластического деформирования не превысило 10%, по числу циклов до разрушения – 20%, диаграммам ползучести – 30%, длительной прочности – 40%.

Список литературы

1. Chaboche J.L. Constitutive equations for cyclic plasticity and cyclic viscoplasticity. *International Journal of Plasticity*. 1989. Vol. 5. Iss. 3. P. 247–302. [https://doi.org/10.1016/0749-6419\(89\)90015-6](https://doi.org/10.1016/0749-6419(89)90015-6).
2. Chaboche J.L. Cyclic viscoplastic constitutive equations. Part I: A thermodynamically

- consistent formulation. *Journal of Applied Mechanics*. 1993. Vol. 60(4). P. 813–821. DOI: 10.1115/1.2900988hal-03961275.
3. Chaboche J.L., Rousselier G. On the plastic and viscoplastic constitutive equations. Part II. Application of internal variable concepts to the 316 stainless steel. *Journal of Pressure Vessel Technology*. 1983. Vol. 105. Iss. 2. P. 153–164. DOI: 10.1115/1.3264258.
 4. Chaboche J.L. A review of some plasticity and viscoplasticity constitutive theories. *International Journal of Plasticity*. 2008. Vol. 24. Iss. 10. P. 1642–1693. <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2008.03.009>.
 5. Бессон Ж., Каето Ж., Шабоши Ж.Л., Форест Т.С. *Нелинейная механика материалов*. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2010. 397 с.
 6. Волков И.А., Коротких Ю.Г. *Уравнения состояния вязкоупругопластических сред с повреждениями*. М.: Физматлит, 2008. 424 с.
 7. Митенков Ф.М., Волков И.А., Игумнов Л.А. *Прикладная теория пластичности*. М.: Физматлит, 2015. 284 с.
 8. Волков И.А., Игумнов Л.А., Коротких Ю.Г. *Прикладная теория вязкопластичности*. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2015. 317 с.
 9. Волков И.А., Игумнов Л.А. *Введение в континуальную механику поврежденной среды*. М.: Физматлит, 2017. 304 с.
 10. Волков И.А., Игумнов Л.А., Тарасов И.С., Шишулин Д.Н., Маркова М.Т. Моделирование усталостной долговечности поликристаллических конструкционных сплавов при блочном несимметричном малоцикловом нагружении. *Проблемы прочности и пластичности*. 2018. Т. 80. №1. С. 15–30. <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2018-80-1-15-30>.
 11. Волков И.А., Игумнов Л.А., Шишулин Д.Н., Белов А.А. Оценка ресурсных характеристик поликристаллических конструкционных сплавов при циклическом термомеханическом нагружении. *Проблемы прочности и пластичности*. 2021. Т. 83. №4. С. 481–504. <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2021-83-4-481-504>.
 12. Бондарь В.С. *Неупругость. Варианты теории*. М.: Физматлит, 2004. 144 с.
 13. Bondar V.S. *Inelasticity. Variants of the Theory*. New York: Begell House Publisher, 2013. 174 p.
 14. Бондарь В.С., Горячева И.Г., Матвиенко Ю.Г. и др. *Ресурс материалов и конструкций*. М.: Московский Политех, 2019. 192 с.
 15. Бондарь В.С., Темис Ю.М., Матвиенко Ю.Г. и др. *Конструкционная прочность материалов. Ресурс конструкций высоких параметров*. СПб.: Лань, 2024. 256 с.
 16. Бондарь В.С., Абашев Д.Р. Построение поверхности памяти для разделения процессов монотонных и циклических нагружений. *Проблемы прочности и пластичности*. 2022. Т. 84. №3. С. 364–375. <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2022-84-3-364-375>.
 17. Бондарь В.С., Абашев Д.Р. О поверхностях памяти, разделяющих процессы монотонных и циклических нагружений. *Вестник ПНИПУ. Механика*. 2022. №3. С. 42–50. <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2022.3.05>.
 18. Бондарь В.С., Абашев Д.Р., Фомин Д.Ю. Теории пластичности при циклических нагружениях. *Проблемы прочности и пластичности*. 2018. Т. 80. №1. С. 31–40. <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2018-80-1-31-40>.
 19. Бондарь В.С., Абашев Д.Р., Петров В.К. Сравнительный анализ вариантов теорий пластичности при циклических нагружениях. *Вестник ПНИПУ. Механика*. 2017. №2. С. 23–44. DOI: 10.15593/perm.mech/2017.2.02.
 20. Bari S., Hassan T. An advancement in cyclic plasticity modeling for multiaxial ratcheting simulation. *International Journal of Plasticity*. 2002. Vol. 18. Iss. 7. P. 873–894. [https://doi.org/10.1016/S0749-6419\(01\)00012-2](https://doi.org/10.1016/S0749-6419(01)00012-2).
 21. Kan Q., Kang G. Constitutive model for uniaxial transformation ratcheting of superelastic NiTi shape memory alloy at room temperature. *International Journal of Plasticity*. 2010. Vol. 26. Iss. 3. P. 441–465. <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2009.08.005>.
 22. Rahman S.M., Hassan T., Corona E. Evaluation of cyclic plasticity models in ratcheting simulation of straight pipes under cyclic bending and steady internal pressure. *International Journal of Plasticity*. 2008. Vol. 24. Iss. 10. P. 1756–1791. <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2008.02.010>.

23. Abdel-Karim M. Modified kinematic hardening rules for simulations of ratcheting. *International Journal of Plasticity*. 2009. Vol. 25. Iss. 8. P. 1560–1587. <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2008.10.004>.
24. Hassan T., Taleb L., Krishna S. Influence of non-proportional loading on ratcheting responses and simulations by two recent cyclic plasticity models. *International Journal of Plasticity*. 2008. Vol. 24. Iss. 10. P. 1863–1889. <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2008.04.008>.
25. Taleb L., Cailletaud G. Cyclic accumulation of the inelastic strain in the 304L SS under stress control at room temperature: Ratcheting or creep? *International Journal of Plasticity*. 2011. Vol. 27. Iss. 12. P. 1936–1958. <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2011.02.001>.

References

1. Chaboche J.L. Constitutive equations for cyclic plasticity and cyclic viscoplasticity. *Int. J. Plast.* 1989. Vol. 5. Iss. 3. P. 247–302. [https://doi.org/10.1016/0749-6419\(89\)90015-6](https://doi.org/10.1016/0749-6419(89)90015-6).
2. Chaboche J.L. Cyclic viscoplastic constitutive equations. Part I: A thermodynamically consistent formulation. *J. Appl. Mech.* 1993. Vol. 60(4). P. 813–821. DOI: 10.1115/1.2900988hal-03961275.
3. Chaboche J.L., Rousselier G. On the plastic and viscoplastic constitutive equations. Part II. Application of internal variable concepts to the 316 stainless steel. *J. Press. Vessel Technol.* 1983. Vol. 105. Iss. 2. P. 153–164. DOI: 10.1115/1.3264258.
4. Chaboche J.L. A review of some plasticity and viscoplasticity constitutive theories. *Int. J. Plast.* 2008. Vol. 24. Iss. 10. P. 1642–1693. <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2008.03.009>.
5. Besson J., Cailletaud G., Chaboche J., Forest S. *Non-Linear Mechanics of Materials*. Dordrecht. Springer. 2010. 450 p.
6. Volkov I.A., Korotkikh Yu.G. *Uravneniya sostoyaniya vyazkouprugoplasticheskikh sred s povrezhdeniyami [Equations of State of Viscoelastoplastic Media with Damage]*. Moscow. Fizmatlit Publ. 2008. 424 p. (In Russian).
7. Mitenkov F.M., Volkov I.A., Igumnov L.A. *Prikladnaya teoriya plastichnosti [Applied Theory of Plasticity]*. Moscow. Fizmatlit Publ. 2015. 284 p. (In Russian).
8. Volkov I.A., Igumnov L.A., Korotkikh Yu.G. *Prikladnaya teoriya vyazkoplastichnosti [Applied Theory of Viscoplasticity]*. Nizhny Novgorod. Nizhny Novgorod University Press. 2015. 317 p. (In Russian).
9. Volkov I.A., Igumnov L.A. *Vvedenie v kontinualnuyu mekhaniku povrezhdennoy sredy [Introduction to the Continuum Mechanics of a Damaged Medium]*. Moscow. Fizmatlit Publ. 2017. 304 p. (In Russian).
10. Volkov I.A., Igumnov L.A., Tarasov I.S., Shishulin D.N., Markova M.T. Modelirovanie ustalostnoy dolgovechnosti polikristallicheskikh konstruktsionnykh splavov pri blochnom nesimmetrichnom malotsiklovom nagruzhenii [Modeling fatigue life of polycrystalline structural alloys under block-type nonsymmetrical low-cycle loading]. *Problemy prochnosti i plastichnosti [Problems of Strength and Plasticity]*. 2018. Vol. 80. Iss. 1. P. 15–30 (In Russian).
11. Volkov I.A., Igumnov L.A., Shishulin D.N., Belov A.A. Otsenka resursnykh kharakteristik polikristallicheskikh konstruktsionnykh splavov pri tsiklicheskom termomekhanicheskom nagruzhenii [Evaluation of the resource characteristics of polycrystalline structural alloys under cyclic thermomechanical loading]. *Problemy prochnosti i plastichnosti [Problems of Strength and Plasticity]*. 2021. Vol. 83. No 4. P. 481–504 (In Russian).
12. Bondar V.S. *Neuprugost. Varianty teorii [Inelasticity. Variants of the Theory]*. Moscow. Fizmatlit Publ. 2004. 144 p. (In Russian).
13. Bondar V.S. *Inelasticity. Variants of the Theory*. New York. Begell House Publisher. 2013. 174 p.
14. Bondar V.S., Goryacheva I.G., Matvienko Yu.G. et al. *Resurs materialov i konstruktsiy [Resource of Materials and Structures]*. Moscow. Moskovskiy Politekh Publ. 2019. 192 p. (In Russian).
15. Bondar V.S., Temis Yu.M., Matvienko Yu.G. et al. *Konstruktsionnaya prochnost materialov. Resurs konstruktsiy vysokikh parametrov [Structural Strength of Materials. Lifetime of High-parameter Structures]*. Saint-Petersburg. Lan Publ. 2024. 256 p. (In Russian).

16. Bondar V.S., Abashev D.R. Postroenie poverkhnosti pamyati dlya razdeleniya protsessov monotonnnykh i tsiklicheskikh nagruzheniy [Construction of a memory surface for separation of monotonic and cyclic loading processes]. *Problemy prochnosti i plastichnosti* [Problems of Strength and Plasticity]. 2022. Vol. 84. No 3. P. 364–375 (In Russian).
17. Bondar V.S., Abashev D.R. O poverkhnostyakh pamyati, razdelyayushchikh protsessy monotonnnykh i tsiklicheskikh nagruzheniy [Memory surfaces separating the processes of monotonous and cyclic loads]. *Vestnik Permskogo natsionalnogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mekhanika* [PNRPU Mechanics Bulletin]. 2022. No 3. P. 42–50 (In Russian).
18. Bondar V.S., Abashev D.R., Fomin D.Yu. Teorii plastichnosti pri tsiklicheskikh nagruzheniyakh [Theories of plasticity under cyclic loadings]. *Problemy prochnosti i plastichnosti* [Problems of Strength and Plasticity]. 2018. Vol. 80. No 1. P. 31–40 (In Russian).
19. Bondar V.S., Abashev D.R., Petrov V.K. Sravnitel'nyy analiz variantov teorii plastichnosti pri tsiklicheskikh nagruzheniyakh [Comparative analysis of variants of plasticity theories under cyclic loading]. *Vestnik Permskogo natsionalnogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mekhanika* [PNRPU Mechanics Bulletin]. 2017. No 2. P. 23–44 (In Russian).
20. Bari S., Hassan T. An advancement in cyclic plasticity modeling for multiaxial ratcheting simulation. *Int. J. Plast.* 2002. Vol. 18. Iss. 7. P. 873–894. [https://doi.org/10.1016/S0749-6419\(01\)00012-2](https://doi.org/10.1016/S0749-6419(01)00012-2).
21. Kan Q., Kang G. Constitutive model for uniaxial transformation ratcheting of super-elastic NiTi shape memory alloy at room temperature. *Int. J. Plast.* 2010. Vol. 26. Iss. 3. P. 441–465. <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2009.08.005>.
22. Rahman S.M., Hassan T., Corona E. Evaluation of cyclic plasticity models in ratcheting simulation of straight pipes under cyclic bending and steady internal pressure. *Int. J. Plast.* 2008. Vol. 24. Iss. 10. P. 1756–1791. <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2008.02.010>.
23. Abdel-Karim M. Modified kinematic hardening rules for simulations of ratchetting. *Int. J. Plast.* 2009. Vol. 25. Iss. 8. P. 1560–1587. <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2008.10.004>.
24. Hassan T., Taleb L., Krishna S. Influence of non-proportional loading on ratcheting responses and simulations by two recent cyclic plasticity models. *Int. J. Plast.* 2008. Vol. 24. Iss. 10. P. 1863–1889. <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2008.04.008>.
25. Taleb L., Cailletaud G. Cyclic accumulation of the inelastic strain in the 304L SS under stress control at room temperature: Ratcheting or creep? *Int. J. Plast.* 2011. Vol. 27. Iss. 12. P. 1936–1958. <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2011.02.001>.

MODEL OF INELASTICITY, A METHOD FOR IDENTIFICATION OF MATERIAL FUNCTIONS AND MODEL VERIFICATION

Bondar V.S., Abashev D.R., Sharova V.I.

Moscow Polytechnic University, Moscow, Russian Federation

tm@mospolytech.ru

Received by the Editor 2025/03/25

The presented study formulates the equations of the inelasticity model. The strain rate is defined as the sum of elastic and inelastic strain rates. Elastic deformations are calculated based on the generalized Hooke's law. In the space of stress tensor components, the concept of a loading surface is introduced, which can change its dimensions (both isotropically expanding and contracting) and move during the loading process. An evolutionary equation for the radius of this surface is proposed, accounting for the effects of non-isothermal loading and the recovery of the material's mechanical properties after annealing. The displacement of the loading surface is represented as the sum of displacements (microstresses) of two types. To differentiate between monotonic and cyclic deformation processes, a memory surface is introduced in the space of the inelastic deformation tensor components, which characterizes

both types of loading. For ratcheting processes of inelastic deformation under asymmetric cyclic loading, additional evolutionary equations for microstresses of the first type are proposed, covering both monotonic and cyclic deformations. The rates of inelastic deformations are calculated based on the associated (gradient) flow law. A kinetic equation is used to model the accumulation of damage, considering the work of microstresses of the second type on the inelastic deformation field, with generalization to non-isothermal loading, as well as processes of embrittlement and self-healing of the material. The necessary material functions are defined, and basic experimental data and their identification methods are provided. In particular, material parameters for 12X18H10T stainless steel are presented. The proposed model is verified for cyclic and monotonic tension-compression tests of 12X18H10T stainless steel samples up to failure. Creep phenomena at various stress levels up to failure are also considered. To compare theoretical and experimental results, tension-compression diagrams, dependencies of amplitude and mean stress on the number of cycles, the number of cycles to failure, as well as creep and long-term strength diagrams of the material are used.

Keywords: inelasticity model, material parameters, basic experiment, identification method, verification, cyclic loading, creep, long-term strength.