УДК 534.1 DOI: 10.32326/1814-9146-2025-87-2-210-227

ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ МНОГОМЕРНОГО УПРАВЛЯЕМОГО ОБЪЕКТА*

Игумнов Л.А., Метрикин В.С., Литвинчук С.Ю.

Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Российская Федерация

v.s.metrikin@mail.ru

Поступила в редакцию 10.02.2025

Исследуется многомерная динамическая система, моделирующая колебания различных технических управляемых объектов, математическое описание которых может быть представлено в виде кусочно-непрерывных или разрывных автономных обыкновенных дифференциальных уравнений с характеристикой управления объектом в виде кусочно-линейной непрерывной либо разрывной функции. Структура фазового пространства рассматриваемой динамической системы составлена из трех подпространств, в каждом из которых динамика определяется своими дифференциальными уравнениями. Качественное исследование нелинейной динамики системы и фазовых портретов полного фазового пространства изучается с использованием математического аппарата теории бифуркаций и метода точечных отображений двумерных поверхностей Пуанкаре. Приведены аналитические уравнения точечных отображений, уравнения для определения координат неподвижных точек, соответствующих устойчивым периодическим симметричным движениям объекта. Доказано существование петли сепаратрисы, идущей из седла в седло, определена область параметров, в которой петля сепаратрисы заведомо существует, а также показано, что в любой окрестности петли сепаратрисы седло-фокус в выделенной области параметров лежит счетное множество периодических движений исследуемой кусочно-линейной динамической системы. Доказана лемма о существовании в пространстве параметров непустой области значений, при которых в системе существует петля сепаратрисы. Разработан подробный алгоритм для численного расчета петли сепаратрисы. Доказано, что в любой окрестности петли сепаратрисы седло-фокус в найденной области параметров лежит счетное множество периодических движений системы. Расчеты сложных типов движения управляемого объекта проведены по разработанному программному продукту на языке Python с помощью математического пакета Plotly. Показано, что в этой области параметров в системе существуют как симметричные устойчивые периодические движения, так и хаотические движения объекта.

* Выполнено при финансовой поддержке Министерством науки и высшего образования РФ, соглашение No FSWR-2023-0036.

Ключевые слова: математическая модель, фазовое пространство, отображение Пуанкаре, устойчивость, зона нечувствительности, бифуркационные диаграммы, хаос.

Введение

Рассматривается существенно нелинейная динамическая система с разрывными правыми частями. Разработка математических моделей, методов и алгоритмов изучения нелинейной динамики такой системы – это в настоящее время важная задача. Фундаментальный вклад в общую теорию динамических систем с разрывными нелинейностями внесли публикации [1–10]. В них приводится краткий обзор основных понятий, методов и проблем теории дифференциальных уравнений с разрывной правой частью. Анализируются различные способы доопределения правых частей в точках разрыва и неявные формы записи для таких уравнений. При создании новых конструкций необходимы новые подходы, новые неучтенные ранее физико-технические условия, которые, очевидно, влияют на структуру уравнений математической модели и требуют создания новых, более экономичных и эффективных алгоритмов исследования, включая интеллектуальные алгоритмы. Математическая модель может содержать обратную связь, созданную с использованием нелинейной техники линеаризации LQR, SMC, PD и PID-регуляторов с помощью интеллектуальных алгоритмов. Любая стратегия управления системы зависит от надежности математической модели. Часто используется стратегия управления, включающая в себя скользящий режим SMC [11]. Она обеспечивает хорошую устойчивость нелинейных систем при наличии неопределенностей параметров и внешних возмущений [12]. Показано, что этот метод можно применять в безмодельном управлении [13, 14] или в сочетании с оптимизацией LQR, адаптивными режимами или режимами обратного шага (например, [15, 16]) для работы в помещении и на открытом воздухе. Расширенный контроллер SMC уменьшает недостатки, связанные с проблемой возникновения на практике нежелательных колебаний, называемых дребезжанием, с конечной частотой и амплитудой. На самом деле в технологиях микроэлектромеханических систем (MEMS) и наноэлектромеханических систем (NEMS) постоянно происходят значительные улучшения, позволяющие производить миниатюрные датчики, исполнительные механизмы и контроллеры [17]. Автономные приложения должны создаваться для выполнения конкретных задач. Создаваемые системы обладают сложной нелинейностью поведения и параметрами сильной связи, которые приводят к абсолютно нестабильной динамической модели. Действительную и точную математическую модель можно получить на основе решения задач идентификации и лабораторных экспериментов.

Исследуемая в настоящей статье физическая система (стенд) представляет собой горизонтальную площадку, которая может вращаться вокруг вертикальной оси. На площадке установлен объект с рулевым устройством. К концам штока рулевого устройства прикреплены пружины, другие концы которых закреплены в неподвижных точках. При отклонении горизонтальной площадки от заданного курса на угол θ шток рулевого устройства выползает на величину ξ, а рулевое устройство с помощью пружин поворачивает шток обратно, уменьшая угол поворота тела, возвращая тело к заданному курсу $\theta = 0$. Следует отметить, что подобные физические системы рассматривались авторами [18–21]. В этих статьях представленные динамические системы исследовались в основном приближенными методами без детального изучения пространства параметров исследуемых динамических систем. В настоящей статье использованы методы теории бифуркаций и точечных отображений поверхностей Пуанкаре, что дало возможность доказать существование петли сепаратрисы, идущей из седла в седло, и определить область параметров, где петля сепаратрисы заведомо существует. Численно-аналитическое исследование структуры фазового пространства с помощью программного продукта на языке Python с использованием математического пакета Plotly показало, что в этой области параметров в рассматриваемой системе существует счетное множество периодических режимов движения. С помощью бифуркационных диаграмм по параметрам системы установлено существование как симметричных периодических движений стенда, так и хаотических движений управляемого объекта.

1. Математическая модель

Рассматривая малые значения угла θ, уравнения движения стенда с объектом можно представить в виде системы дифференциальных уравнений (см. [6–10]):

$$\begin{cases} J\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + 2L^2 c\theta + F_0\xi = 0, \\ \dot{\xi} = F(\phi), \\ \phi = \theta - \xi / i, \end{cases} \tag{1}$$

где первое уравнение в (1) описывает движение стенда, второе уравнение – движение объекта, третье – это уравнение следящей системы. Параметры в системе (1) означают: J – момент инерции стенда; θ – угол поворота стенда; b – приведенный коэффициент вязкого трения; L – плечо силы пружины относительно оси вращения стенда; c – жесткость пружины; F_0 – натяжение пружины в рабочем положении; ξ – перемещение штока рулевого устройства; ϕ – аргумент сервомотора, управляющего движением штока; $1/i$ – коэффициент обратной связи.

Исключая из системы (1) координату ξ и вводя безразмерное время $\tau = \omega_0 t$ $\left(\omega_0^2 = 2L^2 c / J\right)$, получим

$$\begin{gathered} \frac{d^3\theta}{d\tau^3} + \frac{b}{J\omega_0}\frac{d^2\theta}{d\tau^2} + \frac{d\theta}{d\tau} = -\frac{F_0}{J\omega_0^3}F(\phi), \\ \phi = \theta + \frac{J\omega_0^2}{iF_0}\left(\frac{d^2\theta}{d\tau^2} + \frac{b}{J\omega_0}\frac{d\theta}{d\tau} + \theta\right). \end{gathered} \tag{2}$$

Характеристика объекта $F(\phi)$ представлена на рис. 1. Она обладает двумя параметрами: β, определяющим ширину зоны нечувствительности объекта, и Q, характеризующим максимальную скорость движения штока рулевого устройства.

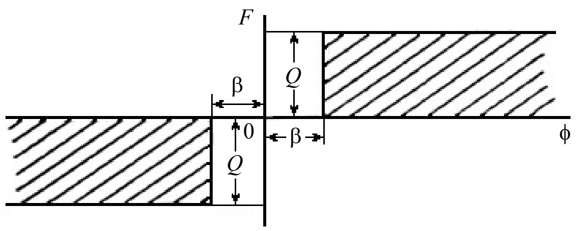

Рис. 1. Характеристика объекта

Принимая во внимание вид характеристики объекта и обозначая

$$\frac{b}{J\omega_0}=2h,\quad \frac{J\omega_0^2}{iF_0}=\alpha,\quad \frac{F_0Q}{J\omega_0^3}=A,\quad L(\theta)=\frac{d^2\theta}{d\tau^2}+2h\frac{d\theta}{d\tau}+\theta,$$

уравнения (2) можем записать в виде:

$$\begin{gathered}\frac{d}{d\tau}[L(\theta)]=-A,\quad \{\theta+\alpha L(\theta)\}>\beta,\\ \frac{d}{d\tau}[L(\theta)]=0,\quad -\beta<\{\theta+\alpha L(\theta)\}<\beta,\\ \frac{d}{d\tau}[L(\theta)]=A,\quad \{\theta+\alpha L(\theta)\}<-\beta.\end{gathered}\tag{3}$$

Введем новые переменные

$$z=\phi=\alpha\frac{d^2\theta}{d\tau^2}+2h\alpha\frac{d\theta}{d\tau}+(1+\alpha)\theta,\quad y=\frac{d\theta}{d\tau},\quad x=\theta.$$

Тогда система (3) перепишется в виде:

$$\begin{gathered}\text{при } z>\beta\quad \begin{cases}\dot z=y-\alpha A,\\ \dot y=\dfrac{1}{\alpha}(z-2h\alpha y-(1+\alpha)x),\\ \dot x=y;\end{cases}\\ \text{при } -\beta<z<\beta\quad \begin{cases}\dot z=y,\\ \dot y=\dfrac{1}{\alpha}(z-2h\alpha y-(1+\alpha)x),\\ \dot x=y;\end{cases}\\ \text{при } z<-\beta\quad \begin{cases}\dot z=y+\alpha A,\\ \dot y=\dfrac{1}{\alpha}(z-2h\alpha y-(1+\alpha)x),\\ \dot x=y.\end{cases}\end{gathered}\tag{4}$$

Уравнения (4) представляют собой динамическую автономную систему с переменной структурой [22–28].

2. Структура фазового пространства

Из системы (4) несложно сделать вывод, что фазовое пространство (x, y, z) делится на три части $z > \beta$, $-\beta < z < \beta$, $z < -\beta$ плоскостями $z = \beta$ и $z = -\beta$. В каждой из этих частей движение подчиняется соответствующей системе уравнений, правая часть которых удовлетворяет условиям теоремы Коши о существовании и единственности решения [8, 9]. Таким образом, в области пространства выше $z = \beta$ действует первая система, в области между $z = \beta$ и $z = -\beta$ – вторая, а в области ниже $z = -\beta$ – третья система. Траектории первой системы касаются плоскости $z = \beta$ вдоль линии $z = \beta$, $y = \alpha A$ (и только вдоль этой линии). При $y > \alpha A$ вблизи плоскости $z = \beta$ изображающая точка при увеличении τ движется в сторону увеличения z, поскольку $\dot z > 0$, а при $y < \alpha A$ – в сторону уменьшения z ($\dot z < 0$). При движении изображающей точки, находящейся в начальный момент на плоскости $z = \beta$ с начальным значением x_0, y_0, координата z сначала увеличивается с ростом τ, затем, начиная с определенного момента, уменьшается, и, наконец, изображающая точка пересекает плоскость $z = \beta$ еще раз. Траектории системы (4), действующей в области между плоскостями $z = \beta$ и $z = -\beta$, касаются плоскостей $z = \beta$ и $z = -\beta$ вдоль линий $z = \beta$, $y = 0$ и $z = -\beta$, $y = 0$ соответственно (и только вдоль этих линий). Вблизи точек плоскости $z = \beta$, соответствующих значениям $y = 0$, с увеличением времени τ координата z уменьшается, а вблизи точек плоскости $z = -\beta$, соответствующих значениям $y = 0$, координата z увеличивается с увеличением τ. Следует отметить, что для траектории этой системы прямая $y = 0$, $z = (1 + \alpha)x$ является линией равновесия и что не все траектории, пересекающие плоскость $z = \beta$ при $y < 0$, пересекут при увеличении τ плоскость $z = -\beta$; пересекут ее только те траектории, которые проходят через точки с достаточно большими по абсолютной величине отрицательными значениями y.

Очевидно, что поведение траектории в области, где $z = -\beta$, полностью симметрично поведению траектории в области, где $z > \beta$, так как система уравнений может быть получена заменой x на $-x$, y на $-y$ и z на $-z$. Когда изображающая точка попадает в область скользящих движений [8, 9] (для верхней плоскости $0 < y < \alpha A$, для нижней $-\alpha A < y < 0$), решение существует при фиксированном значении $z = \beta$ или $z = -\beta$ [29–36].

Структура фазового пространства изображена на рис. 2.

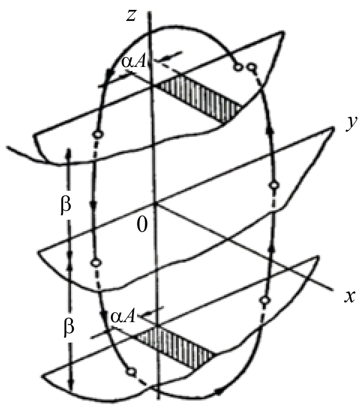

Рис. 2. Вид фазовых траекторий в пространстве x, y, z системы (4)

Из структуры фазового пространства и вида фазовых траекторий следует, что изучение зависимости качественного поведения последних от параметров системы можно провести с помощью метода точечных отображений поверхностей $z = \pm\beta$ в себя либо поверхности $z = \beta \to z = -\beta$ [9]. Описание поведения фазовых траекторий из вида уравнений системы (4) позволяет с очевидностью сказать, что в фазовом пространстве могут быть симметричные и несимметричные периодические траектории, а также возможны хаотические траектории.

2.1. Точечные отображения поверхности Пуанкаре. Запишем (4) в виде

$$\begin{cases} \dot{z} = y + \alpha\widetilde{A}, \\ \dot{y} = \dfrac{1}{2}(z - 2h\alpha y - (1+\alpha)x), \\ \dot{x} = y, \end{cases} \tag{5}$$

где

$$\widetilde{A}=\begin{cases}-A & \text{при} \quad z>\beta,\\ 0 & \text{при} \quad -\beta<z<\beta,\\ A & \text{при} \quad z<-\beta.\end{cases}$$

Решение системы (5) с начальными условиями $\tau = 0$, $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$ можно записать в виде

$$x = e^{-h\tau}[C_1(\omega\sin\omega\tau - h\cos\omega\tau) - C_2(h\sin\omega\tau + \omega\cos\omega\tau)] + \left(\tau - \frac{2h\alpha}{1+\alpha}\right)\widetilde{A} + \frac{C_3}{1+\alpha},$$

$$y = e^{-h\tau}(C_1\cos\omega\tau + C_2\sin\omega\tau) + \widetilde{A}, \tag{6}$$

$$z = e^{-h\tau}[C_1(\omega\sin\omega\tau - h\cos\omega\tau) - C_2(h\sin\omega\tau + \omega\cos\omega\tau)] - (1+\alpha)\widetilde{A}\tau + C_3,$$

где $\omega^2 = 1 - h^2$, а произвольные постоянные выражаются в зависимости от параметров и начальных условий:

$$C_1 = y_0 - \widetilde{A},$$

$$C_2 = \frac{1}{\omega}\left(\frac{z_0}{\alpha} - \frac{1+\alpha}{\alpha}x_0 - hy_0 - h\widetilde{A}\right), \tag{7}$$

$$C_3 = \frac{1+\alpha}{\alpha}(z_0 - x_0) - 2h\widetilde{A}.$$

Пусть $\beta = 0$. Тогда точечное отображение $M_0(x_0, y_0, z_0 = \beta = 0) \to M_1(x_1, y_1, z_1 = \beta = 0)$ этой поверхности Пуанкаре можно, используя соотношения (6), представить в виде:

$$x_1 = e^{-h\tau}[C_1(\omega\sin\omega\tau_1 - h\cos\omega\tau_1) - C_2(h\sin\omega\tau_1 + \omega\cos\omega\tau_1)] +$$

$$+\left(\tau_1 - \frac{2h\alpha}{1+\alpha}\right)\widetilde{A} + \frac{C_3}{1+\alpha}, \tag{8}$$

$$y_1 = e^{-h\tau}(C_1\cos\omega\tau_1 + C_2\sin\omega\tau_1) + \widetilde{A},$$

где τ_1 – время движения изображающей точки из начальной точки M_0 до момента попадания ее вновь на плоскость $z = \beta = 0$ в точку M_1, оно определяется из третьего уравнения системы (8). При вычислении τ_1 необходимо в третьем уравнении (6) положить $z_0 = \beta = 0$ при вычислении произвольных постоянных C_i, $i = 2, 3$. Рассматривая симметричные периодические движения и предполагая, что время движения τ_1 из точки $M_0(x_0, y_0, 0) \in z = 0$ в точку $M_1(x_1, y_1, 0) \in z = 0$ равно полупериоду $\tau_1 = \pi/\omega$, а координаты x_0, y_0 симметричны относительного нуля координатам x_1, y_1, получаем систему двух уравнений относительно x_0, y_0 для определения координат неподвижной точки, соответствующей периодическому симметричному режиму движения объекта с периодом $T = 2\pi/\omega$ [9]:

$$-x_0 = e^{-\pi h/\omega}[-(C_1h + C_2\omega)\cos(\pi/\omega)] + \left(\frac{\pi}{\omega} - \frac{2h\alpha}{1+\alpha}\right)\widetilde{A} + \frac{C_3}{1+\alpha}, \tag{9}$$

$$-y_0 = e^{-\pi h/\omega}C_1\cos(\pi/\omega) + \widetilde{A}, \tag{10}$$

которую можно преобразовать в систему второго порядка:

$$\begin{cases} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 = c_1, \\ a_{21}x_0 + a_{22}y_0 = c_2, \end{cases} \tag{11}$$

где коэффициенты a_{ij} и c_i зависят от параметров рассматриваемой динамической системы и определяются из (9) и (10). Вид коэффициентов a_{ij} и c_i очевиден. Система (11) определяет координаты неподвижной точки, соответствующей периодическому симметричному режиму движения объекта.

2.2. Устойчивость периодических симметричных режимов движения. Устойчивость в малом неподвижной точки, найденной из системы линейных уравнений (11), определяется, как известно [9, 36], величиной корней характеристического уравнения, которое формируется после линеаризации уравнений (8) в окрестности найденной неподвижной точки [8]. В рассматриваемом случае характеристическое уравнение будет второго порядка вида

$$\lambda^2 + \varepsilon\lambda + \eta = 0. \tag{12}$$

Здесь ε, η – коэффициенты, зависящие от параметров рассматриваемой динамической системы. Для устойчивости в малом неподвижной точки, отвечающей симметричному периодическому движению, необходимо и достаточно, чтобы все корни характеристического уравнения (12) лежали внутри единичной окружности [8]. Граница области устойчивости (N-граница [10]) симметричного периодического движения объекта в пространстве параметров ε, η системы образуется тремя прямыми [8]:

$$\begin{aligned} N_+&: 1 + \varepsilon + \eta = 0, \\ N_-&: 1 - \varepsilon + \eta = 0, \\ N_\varphi&: 1 - \eta = 0. \end{aligned} \tag{13}$$

3. Численно-качественное исследование кусочно-линейной динамической системы с зоной чувствительности

Характеристика управления объектом представляет собой непрерывную кусочно-линейную функцию, изображенную на рис. 3

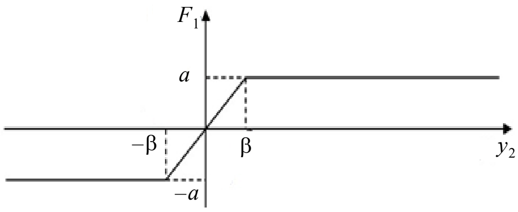

Рис. 3. Кусочно-линейная характеристика управления объекта

Тогда, вводя новое время $\tau = bt/J$, переменные $y_1 = d\dot{\theta}$, $y_2 = d\phi$, $y_3 = d\ddot{\theta}$, $d = b^3/(J^2F_0Q)$ и параметры $\lambda^2 = 2L^2cJ/b^2$, $\alpha = b^2/(F_0iJ)$, систему (1) перепишем в виде:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_3, \\ \dot{y}_2 = y_1 - \alpha F_1(y_2), \\ \dot{y}_3 = -(\lambda^2 y_1 + y_3 + F_1(y_2)). \end{cases} \tag{14}$$

3.1. Случай $|y_2| \geq \beta$. Пусть $|y_2| \geq \beta$. Тогда с учетом кусочно-линейной характеристики $F_1(y_2)$ исходная система (14) может быть переписана в виде:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_3, \\ \dot{y}_2 = y_1 - \alpha a, \\ \dot{y}_3 = -(\lambda^2 y_1 + y_3 + a). \end{cases} \tag{15}$$

В области $y_2 > \beta$ у системы (15) нет состояний равновесия, исключая случай $\alpha = -1/\lambda^2$, в котором система (15) имеет прямую состояний равновесия [22–25]

$$\begin{cases} y_1 = \alpha a, \\ y_2 = C, \\ y_3 = 0, \end{cases} \tag{16}$$

где C – любое действительное число. Эти состояния равновесия устойчивы (рис. 4) [26].

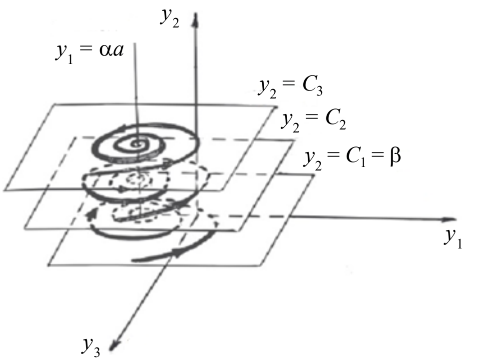

Рис. 4. Фазовый портрет системы (15) при различных значениях C

Система (15) имеет семейство интегральных поверхностей $P(y_1, y_3) = C$ в пространстве $Y(y_1, y_2, y_3)$, определяемых дифференциальными уравнениями [27–30]

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_3, \\ \dot{y}_3 = -(\lambda^2 y_1 + y_3 + a). \end{cases} \tag{17}$$

Состояние равновесия системы (17) – точка $(-a/\lambda^2, 0)$, которая является устойчивым фокусом (рис. 5) [31–33].

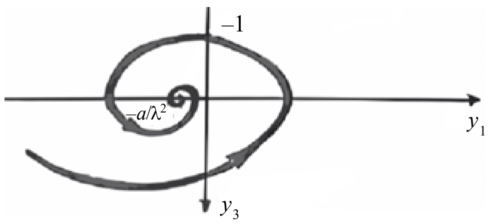

Рис. 5. Вид состояния равновесия системы (15)

При уменьшении $|-a/\lambda^2|$ устойчивый фокус переходит в устойчивый узел, а при $-a/\lambda^2 \to 0$ фазовое пространство состоит из непересекающихся цилиндрических поверхностей, сплошь заполненных траекториями. Центром этих поверхностей является прямая с координатами $y_1 = -a/\lambda^2$, $y_2 = C$, $y_3 = 0$ (рис. 6, 7).

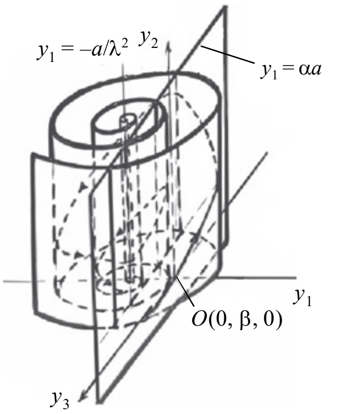

Рис. 6. Фазовое пространство при малом значении $|-a/\lambda^2|$

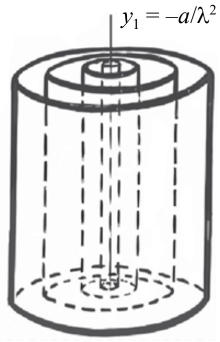

Рис. 7. Фазовое пространство при $-a/\lambda^2 \to 0$

Исследуя бесконечность фазового пространства с применением преобразования Пуанкаре [31], убеждаемся, что бесконечность оси y_2 устойчива в области параметров $\alpha < 0$, а особые точки системы могут быть при $\lambda^2 \le 1/4$ (устойчивый узел), $\lambda^2 \ge 1/4$ (устойчивый фокус). При $y_1 \to \infty$ можно доказать, что при $\lambda^2 \le 1/4$ существуют две особые точки, одна из них седло, вторая – неустойчивый узел. Аналогично случаю $y_1 \to \infty$ установлено, что при $y_3 \to \infty$ существуют два состояния равновесия, одно из которых седло, второе – неустойчивый узел. Можно показать также, что при $\alpha < -\lambda^{-2}$ точечное отображение плоскости $z = \beta$ может существовать только для некоторых областей параметров и начальных значений, при которых траектории системы пересекают плоскость вторично.

Введем в рассмотрение функции

$$\begin{gathered} F_1(\tau) = \mathrm{e}^{\tau/2}\left[(\lambda^{-2} + \alpha)\tau - \lambda^{-2}\left(y_1^0 + y_3^0 + \lambda^{-2}\right)\right], \\ F_2(\tau) = \frac{y_1^0(2\lambda^2 - 1) - y_3^0 + 2 - \lambda^{-2}}{2\omega\lambda^2}\sin\omega\tau - \frac{y_1^0 + y_3^0 + \lambda^{-2}}{\lambda^2}\cos\omega\tau. \end{gathered} \tag{18}$$

Тогда условие существования точечного отображения плоскости $z = \beta$ в себя с начальными условиями $M_0\left(y_1^0, \beta, y_3^0\right)$ записывается в виде:

$$\begin{gathered} F_1(0) = F_2(0), \quad F_1(\tau_\beta) = F_2(\tau_\beta), \quad \dot{y}_2^0 > 0, \\ F_1(0) = F_2(0), \quad F_1(-\tau_\beta) = F_2(-\tau_\beta), \quad \dot{y}_2^0 < 0, \end{gathered} \tag{19}$$

где τ_β означает время перехода изображающей точки от $M_0\left(y_1^0, \beta, y_3^0\right)$ в точку $M_1\left(y_1^1, \beta, y_3^1\right)$ этой же плоскости, а бифуркационная граница существования отображения плоскости $y_2 = \beta$ определяется из соотношений

$$\begin{gathered} F_1(\tau_*) = F_2(\tau_*), \\ F_1'(\tau_*) = F_2'(\tau_*), \ \ \tau_* > 0. \end{gathered} \tag{20}$$

3.2. Численно-аналитическое доказательство существования петли сепаратрисы для $\lambda_2 = 2{,}75$. Для дальнейшего изложения нам потребуется *лемма.*

Пусть дана кусочно-линейная система дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, ..., x_n, \mu_1, \mu_2, ..., \mu_m), \ \ i = 1, 2, ..., n. \tag{21}$$

Предположим, что:

А) функции $f_i(x_1, x_2, ..., x_n, \mu_1, \mu_2, ..., \mu_m)$, $i = 1, 2, ..., n$, являются непрерывными относительно переменных и параметров;

Б) существуют в пространстве параметров $M(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m)$ некоторые области $M^\nu \subset M$ ($\nu = 1, 2, \ldots, k$), где

а) состояние равновесия $O(0, 0, 0)$ системы (22) – седло или седло-фокус,

б) пересечение сепаратрисы S_ν и сепаратрисной поверхности $S_{p\nu}$ с некоторой поверхностью $\Pi_\nu \subset f$ не является пустым множеством,

в) есть непрерывное точечное отображение поверхности Π_ν в себя.

Тогда в пространстве параметров $M(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m)$ найдутся области параметров $M^{\rho\nu} \subset M^\nu$ ($\nu = 1, 2, \ldots, k$), при которых в системе (22) существует петля сепаратрисы S_ν.

Доказательство леммы. Строим поверхность Π_ν как границу той части фазового пространства системы (22), где имеется состояние равновесия $O(0, 0, 0)$. Рассмотрим случай, когда S_ν является α-сепаратрисой [31–36], которая, выходя из состояния равновесия $O(0, 0, 0)$ при пересечении с поверхностью Π_ν, дает начальную точку N_0^ν точечного отображения T_{Π_ν}, $N_0^\nu \in \Pi_\nu$. Конечная точка $M^\nu \in \Pi_\nu$ может находиться как по одну, так и по другую сторону от пересечения поверхности Π_ν с сепаратрисной поверхностью $S_{p\nu}$. В силу условия в) леммы найдутся такие значения параметров $\mu_k^{p\nu}$ $(k = 1, 2, ..., m)$, при которых конечная точка $M^\nu = M_0^\nu \in \Pi_\nu \cap S_{p\nu}$ при этих значениях параметров $S_\nu \in S_{p\nu}$ пойдет к состоянию равновесия $O(0, 0, 0)$. В случае если S_ν является ω-сепаратрисой [31], движение по траектории S_ν следует рассматривать в обратном направлении. В том и другом случае имеет место петля сепаратрисы. Что и требовалось доказать.

Используя результаты леммы, опишем алгоритм отыскания петли сепаратрисы для исходной кусочно-линейной динамической системы (15). Система (15) удовлетворяет условиям:

А) правые части системы – непрерывные функции от параметров α, β, λ;

Б) а) существует область параметров G, где состояние равновесия $O(0, 0, 0)$ системы (15) – седло или седло-фокус,

б) существует плоскость $\Pi = \Pi_\beta^+ (y_2 = \beta)$, для которой $S \cap \Pi_\beta^+ \neq 0$, $S_p \cap \Pi_\beta^+ \neq 0$,

в) точечное отображение T_Π эквивалентно точечному отображению T_β.

3.3. Алгоритм отыскания петли сепаратрисы.

1. Отыскиваем в области G корни x_1, x_2, x_3 характеристического уравнения системы (15) для $|y_2| < \beta$ и выделяем один, например x_1, для которого $\operatorname{sign} x_1 \neq \operatorname{sign} x_{2,3}$. Вычисляем собственный вектор сепаратрисы $\mathbf{J}_1\left(x_1^{-1}, x_1^{-1}(x_1 + \alpha\beta^{-1})^{-1}, 1\right)$.

2. Вектор $\mathbf{J}_1$ выбираем за направляющий вектор прямой в пространстве и находим точку $N_0\left(y_1^0, y_2^0 = \beta, y_3^0\right)$ пересечения плоскости $\Pi_\beta^+\left(y_1^0 = \beta x_1 + a, y_3^0 = x_1, y_1^0\right)$ с сепаратрисой S.

3. Из семейства решений системы для $y_2 \geq \beta$ выделяем траекторию S, отвечающую начальным условиям, указанным в п. 3.2, и находим точку $M_k\left(y_1^k, y_2 = \beta, y_3^k\right)$ пересечения траектории S с плоскостью Π_β^+.

4. Найдя линию пересечения сепаратрисной плоскости S_p с плоскостью Π_β^+: $D = (1 + x_1)y_1 + (\lambda^2 + x_1^2 + x_1)\beta + y_3 = 0$, подставляем координаты точки $M_k(y_1^k, y_2 = \beta, y_3^k)$ в это уравнение и фиксируем знак величины $D = D_1$.

5. Сменив параметры системы (15) в области G, аналогично вычисляем по-

следовательность знаков величин $D = D_i$ ($i = 2, 3, \ldots$). Если при изменении параметров произведение $DD_i > 0$ ($i > 1$), то это означает, что точка $M_k(y_1^k,\ y_2 = \beta,\ y_3^k)$, изменяя свое положение на плоскости Π_β^+, остается по одну сторону от линии пересечения D. Если $DD_i < 0$ ($i > 1$), то точка $M_k(y_1^k,\ y_2 = \beta,\ y_3^k)$ при i-м изменении параметров перешла на другую сторону линии пересечения D. Таким образом, получаем в пространстве параметров область G^ρ, где заведомо существует петля сепаратрисы, границы которой определяются значениями параметров, соответствующих значениям D_{i-1} и D_i.

6. Проводя последующие уточнения границ области G^ρ с заданной точностью ρ, находим область G_S^ρ существования петли сепаратрисы.

3.4. Пример существования петли сепаратрисы в исходной системе для $\lambda_2 = 2{,}75$. Обозначим

$$G_{\lambda^2} : \left(\alpha > -\lambda^{-2},\ \beta\left(\alpha^{-2} + \alpha + \lambda^2\beta - 1\right) < 0\right). \tag{22}$$

В области $G_{2{,}75}$ у исходной системы (15) состояние равновесия $O(0, 0, 0)$ либо седло, либо седло-фокус, и S является ω-сепаратрисой. Тогда движение изображающей точки по траектории S рассматривается в обратном направлении. Выше для системы (15) было показано, что траектории в фазовом пространстве имеют вид спиралей, по которым изображающая точка движется вверх при $y_1 > \alpha$ и вниз при $y_1 < \alpha$. При $y_1 = \alpha$, $\dot{y}_2 = 0$ касательная к траектории системы параллельна плоскости $z = \beta$. Отсюда следует, что изменение положения точки M_k пересечения траектории S с плоскостью $z = \beta$ будет происходить до тех пор, пока при некоторых значениях параметров не произойдет перехода через границу $y_1 = \alpha$. При этом число витков спирали траектории S изменяется на единицу, и при смене положения точки M_k получается скачок. Это означает, что точечное отображение плоскости $z = \beta$ описывается кусочно-непрерывной функцией, непрерывной в границах перехода от одного числа витков спирали к другому. В силу выполнения условия А) леммы для системы (15) сепаратрисная плоскость S_p и сепаратриса S непрерывно изменяют свое положение в фазовом пространстве системы (15) в области параметров $G_{2{,}75}$.

Рассмотрим область параметров $G^\rho \subset G_{2{,}75}$, G^ρ: ($\alpha = \alpha_0$; $\beta \in [\beta_1, \beta_2]$), где $\alpha_0 = 0{,}2048$, $\beta_1 = 0{,}255$, $\beta_2 = 0{,}265$. Покажем, что в области G^ρ заведомо существуют значения параметров, при которых сепаратриса S образует петлю. Введем в рассмотрение функцию $R(M_k,\ \beta)$, которая характеризует положение точки $M_k(y_1^k,\ y_2 = \beta, y_3^k)$ точечного отображения T_β относительно сепаратрисной плоскости S_p (верхнюю и нижнюю стороны сепаратрисной плоскости определяем обычным способом [10]). Если точка $M_k(y_1^k, y_2 = \beta, y_3^k)$ находится выше S_p, то $R(M_k,\ \beta) > 0$, если ниже, то $R(M_k,\ \beta) < 0$. Функция $R(M_k,\ \beta)$ – кусочно-непрерывная по β. Границы областей непрерывности функции $R(M_k,\ \beta)$: $y_1^i = \alpha_i$ ($i = 1, 2, \ldots$). В области G^ρ: ($\alpha = \alpha_0$; $\beta \in [\beta_1, \beta_2]$) функция $R(M_k,\ \beta)$ – непрерывна, так как $y_1^{M_k} \in [5{,}0627; 4{,}9034]$. Отсюда следует равномерная непрерывность функции $R_1(\beta) = R(M_k,\ \beta)$ на интервале $[\beta_1, \beta_2]$. В результате численного расчета получено, что $R_1(\beta_1) < 0$, $R_2(\beta_2) > 0$. Это означает, что существует такое значение параметра $\beta = \beta_0$, при котором $R_1(\beta_0) = 0$ и, следовательно, точка $M_0 = M_k\left(y_1^k(\beta_0), \beta_0, y_3^k(\beta_0)\right)$ лежит на линии пересечения сепаратрисной плоскости $S_p(\beta_0)$ с плоскостью Π_β^+. Таким образом, в области параметров G^ρ: $\alpha = \alpha_0$; $\beta \in [\beta_1, \beta_2]$ петля сепаратрисы седло-фокус существует. Кроме того, в области G^ρ: $\alpha = \alpha_0$; $\beta \in [\beta_1, \beta_2]$ выполняется условие для корней x_i ($i = 1, 2, 3$) характеристического уравнения исходной системы (15) для $|y_2| < \beta$ вида $\operatorname{Re} x_{2,3} <$

$< -x_1$. Применяя результаты работы Л.П. Шильникова [10] к кусочно-линейной системе (15), получаем, что в любой окрестности петли сепаратрисы S седло-фокус в области G^ρ: $\alpha = \alpha_0$; $\beta \in [\beta_1, \beta_2]$ лежит счетное множество периодических движений системы (15).

4. Результаты численных расчетов

Изучение возможных более сложных режимов движения проведено численно-аналитическим способом на основе метода точечных отображений поверхностей Пуанкаре, которыми являются плоскости $z = \pm\beta$. Расчеты проведены с применением разработанного программного продукта на языке Python с использованием математического пакета Plotly [37, 38].

На рис. 8 в плоскости параметров $(\alpha, A) \in [0{,}1; 5]$ при $\beta = 0$ приведены результаты численных расчетов с использованием соотношений (9)–(13), позволивших для каждой пары точек плоскости (α, A) рассчитать поведение фазовой траектории и последовательности изображающих точек на поверхностях Пуанкаре. В результате в плоскости параметров (α, A) получена область существования и устойчивости симметричных периодических движений (черные точки) стенда.

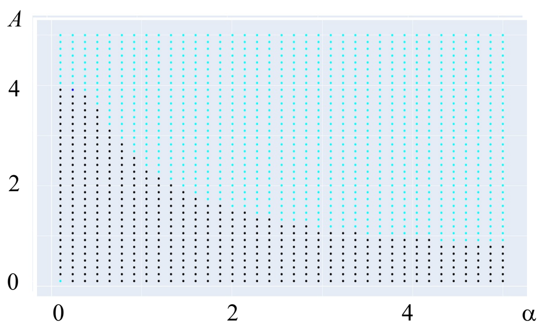

Рис. 8. Область существования и устойчивости в плоскости (α, A) симметричных периодических движений при $\beta = 0$

Из рис. 8 следует, что с увеличением натяжения пружины α в рабочем состоянии и максимальной скорости движения штока рулевой машинки объекта A размеры области в пространстве параметров существования устойчивых симметричных периодических движений уменьшаются.

На рис. 9 приведена осциллограмма $z(\tau)$ для значений параметров $A = 1$, $\alpha = 3$, $h = 0{,}1$, $\beta = 0{,}5$.

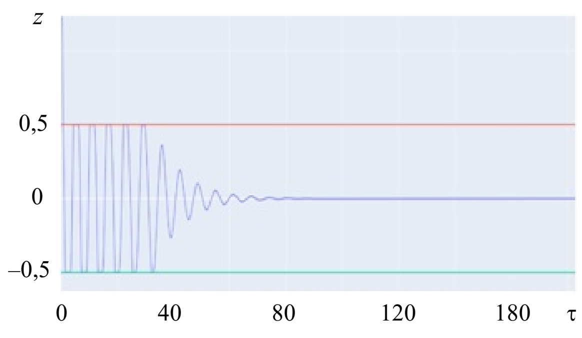

Рис. 9. Осциллограмма $z(\tau)$

Рисунок иллюстрирует наличие затухающих колебаний стенда с участками скользящих движений.

Приведены бифуркационные диаграммы по параметру A (рис. 10) и по параметру α (рис. 11), из которых видны интервалы значений параметров, где существуют устойчивые симметричные периодические движения, где происходит переход к сложным непериодическим движениям и к хаосу. На рис. 10 по оси ординат отложены значения координат $x \in z = 0$, на рис. 11 – значения координат $y \in z = 0$.

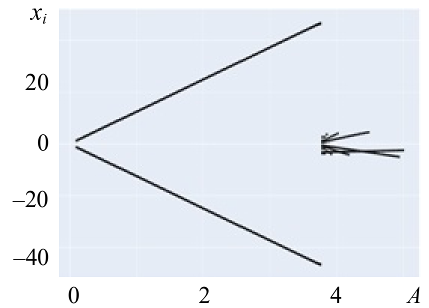

Рис. 10. Бифуркационная диаграмма по параметру A при $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $h = 0{,}05$

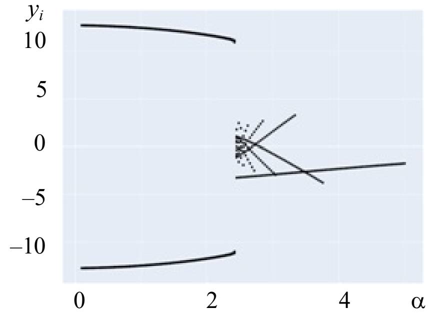

Рис. 11. Бифуркационная диаграмма параметру α при $A = 1$, $\beta = 0$, $h = 0{,}05$

Сценарий перехода к хаотическим режимам движения наступает через процесс удвоения периода Фейгенбаума [39].

Из рис. 10, 11 следует, что с увеличением параметра A (максимальной скорости движения штока рулевой машинки объекта) управляемость движения стенда уменьшается, а с увеличением параметра α (натяжения пружины) управляемость не ухудшается.

Заключение

Приведены математические модели объекта с зоной и без зоны нечувствительности управления, представляющие собой кусочно-линейные обыкновенные дифференциальные уравнения третьего порядка.

Для динамической системы без зоны нечувствительности управления впервые доказано существование петли сепаратрисы в фазовом пространстве и существование счетного множества периодических движений.

Разработан с использованием метода точечных отображений алгоритм исследования нелинейной динамики для отыскания петли сепаратрисы и указания области в пространстве параметров, для значений которых существует петля сепаратрисы.

Численные расчеты по разработанному программному продукту позволили определить в пространстве параметров области существования устойчивых симметричных периодических режимов движения объекта.

Бифуркационные диаграммы определили интервалы значений параметров системы, для которых видно изменение размаха амплитуды колебаний угла поворота объекта в зависимости от изменения параметров системы.

Разработанная методика исследования нелинейной динамики многомерной динамической системы показала эффективность метода точечных отображений поверхностей Пуанкаре совместно с численными экспериментами.

Список литературы

1. Painlevé P. *Lecons sur le frottement*. Paris: Hermann, 1895. 111 p.

2. Матросов В.М., Финогенко И.А. Аналитическая динамика систем твердых тел с трением. В кн.: *Нелинейная механика*. М.: Физматлит, 2001. С. 39–61.

3. Гелиг А.Х., Леонов Г.А., Якубович В.А. *Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия*. М.: Наука, 1978. 400 с.

4. Opelt-Die W. Flugzeugkurssteneruug im Geradeaus flag. *Luftfahrforschung*. 1938. Bd. 14. Lig. 415. 270 S. (Auf Deutsch).

5. Андронов А.А., Баутин Н.Н. Теория стабилизации курса нейтрального самолета при помощи автомата с постоянной скоростью сервомотора. 1. Случай отсутствия зоны нечувствительности. *Изв. АН СССР*. 1955. №3. С. 3–32.

6. Андронов А.А., Баутин Н.Н. Теория стабилизации курса нейтрального самолета при помощи автомата с постоянной скоростью сервомотора. 2. Случай наличия зоны нечувствительности. *Изв. АН СССР.* 1955. №6. С. 54–71.

7. Бутенин Н.В. *Элементы теории нелинейных колебаний*. Л.: Судпромгиз, 1962. 196 с.

8. Бутенин Н.В., Фуфаев Н.А., Неймарк Ю.И. *Введение в теорию нелинейных колебаний*. М.: Наука, 1976. 384 с.

9. Неймарк Ю.И. *Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний.* М.: Либроком, 2010. 472 с.

10. Шильников Л.П. Некоторые случаи рождения периодических движений в *n*-мерном пространстве. *ДАН СССР*. 1962. Т. 143. №2. С. 289–292.

11. Rinaldi M., Primatesta S., Guglieri G. A comparative study for control of quadrotor uavs. *Applied Sciences*. 2023. Vol. 13. No 6. P. 3464-1 – 3464-20. DOI: 10.3390/app13063464.

12. Manoj Kumar M., Arun Sankar M., Jeeva M., Sasi G. Autonomous drone using Pixhawk flight controller with live stream and mask detection features. *International Journal of Engineering Research & Technology*. 2021. Vol. 10. Iss. 5. P. 104–107. DOI: 10.17577/IJERTV10IS050063.

13. Wang H., Ye X., Tian Y., Zheng G., Christov N. Model-free-based terminal SMC of quadrotor attitude and position. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*. 2016. Vol. 52. Iss. 5. P. 2519–2528. DOI: 10.1109/TAES.2016.150303.

14. Румановский И.Г., Калинников Н.А., Александров А.А. Моделирование системы управления автопилота самолета в средах Scilab и Simintech. *Вестник Тихоокеанского государственного университета*. 2023. №1(68). С. 55–70.

15. Bouabdallah S., Noth A., Siegwart R. PID vs LQ control techniques applied to an indoor micro quadrotor. *2004 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems* (*IROS*). 2004. Vol. 3. P. 2451–2456. DOI: 10.1109/IROS.2004.1389776.

16. Bouabdallah S., Siegwart R. Backstepping and sliding-mode techniques applied to an indoor micro quadrotor. *Proceedings of the 2005 IEEE International Conference on Robotics and Automation* (*IEEE*). 2005. P. 2259–2264. DOI: 10.1109/ROBOT.2005.1570447.

17. Burggrüf P., Martinez A.R.P., Roth H., Wagner J. Quadrotors in factory applications: design and implementation of the quadrotor's P-PID cascade control system: Modeling and implementation. *SN Applied Sciences*. 2019. Vol. 1(7). P. 722-1 – 722-17. DOI: 10.1007/s42452-019-0698-7.

18. Akhloufi M.A., Couturier A., Castro N.A. Unmanned aerial vehicles for wildland fires: sensing, perception, cooperation and assistance. *Drones*. 2021. Vol. 5. Iss. 15. P. 1–25. DOI: 10.3390/ drones5010015.

19. Barzegar A., Lee D.J. Deep reinforcement learning-based adaptive controller for trajectory tracking and altitude control of an aerial robot. *Applied Sciences*. 2022. Vol. 12. Iss. 9. P. 4764-1 –4764-23. doi: 10.3390/app12094764.

20. Bhar A., Sayadi M., Fnaiech F. Improved modular UAV autopilot simulator for Pinguin BE aircraft. *IEEE-2017. International Conference on Control, Automation and Diagnosis* (*ICCAD*). 2017. P. 125–129.

21. Bhar A., Sayadi M., Fnaiech F. Modular navigation strategy for autonomous robot. *IEEE-2018 15th International Multi-Conference on Systems, Signals & Devices* (*SSD*). 2018. P. 396–401.

22. *Теория систем с переменной структурой*. Под ред. С.В. Емельянова. М.: Наука, 1970. 592 с.

23. Сансоне Дж. *Обыкновенные дифференциальные уравнения*. Т. 2. М.: ИЛ, 1954. 416 с.

24. Коддингтон Э.А., Левинсон Н. *Теория обыкновенных дифференциальных уравнений*. М.: ИЛ, 1958. 475 с.

25. Хартман Ф. *Обыкновенные дифференциальные уравнения*. М.: Мир, 1970. 720 с.

26. Doležal V., Kurzweil J. On certain properties of linear differential equations. *Aplikace Matematiky*. 1959. Vol. 4. Iss. 3. P. 163–176.

27. Volpato M. Sulla derivabilita, rispetto a valori iniziali ed a parametri delle soluzioni dei sistemi di equazioni differenziali ordinarie del primo ordine. *Rendiconti del Seminario Matematico della Universita di Padova*. 1958. Vol. 28. No 1. P. 71-106 (Dall'Italiano).

28. Айзерман М.А., Гантмахер Ф.Р. Об определении периодических режимов в нелинейной динамической системе с кусочно-линейными характеристиками. *Прикладная математика и механика*. 1956. Т. 20. Вып. 5. С. 639–654.

29. Айзерман М.А., Пятницкий Е.С. Основы теории разрывных систем. I, II. *Автоматика и телемеханика.* 1974. №7. Р. 33–47; №8. Р. 39–61.

30. Козлов Р.И. К теории дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями. *Дифференциальные уравнения.* 1974. Т. 10. №7. С. 1264–1275.

31. Андронов А.А., Леонтович ЕЛ., Гордон И.И., Майер А.Г. *Качественная теория динамических систем второго порядка*. М.: Наука, 1966. 568 с.

32. Немыцкий В.В., Степанов В.В. *Качественная теория дифференциальных уравнений.* М.–Л.: Гостехиздат, 1949. 448 с.

33. Шумафов М.М. Топологическая классификация особенностей на поверхности разрыва правых частей системы трех дифференциальных уравнений. В сб. *Дифференциальные уравнения и их приложения*. М.: МГУ, 1984. С. 123–130.

34. Эльсгольц Л.Э. *Обыкновенные дифференциальные уравнения*. СПб.: Лань, 2002. 218 с.

35. Понтрягин Л.С. *Дифференциальные уравнения и их приложения*. М.: Едиториал УРСС, 2007. 206 с.

36. Петровский И.Г. *Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений.* М.: Физматлит, 2009. 240 с.

37. Керниган Б., Ритчи Д. *Язык программирования СИ.* Изд-во «Вильямс», 2016. 288 с.

38. Архангельский А.Я. *C++ Bilder 6. Справочное пособие*. М.: Бином, 2002. 544 с.

39. Шустер Г.Г. *Детерминированный хаос. Введение*. М.: Мир, 1988. 240 с.

References

1. Painlevé P. *Lecons sur le frottement*. Paris: Hermann, 1895. 111 p.

2. Matrosov V.M., Finogenko I.A. Analiticheskaya dinamika sistem tverdykh tel s treniem [Analytical dynamics of systems of solids with friction]. In: *Nelineynaya mekhanika* [*Nonlinear Mechanics*]. Moscow. Fizmatlit Publ. 2001. P. 39–61 (In Russian).

3. Gelig A.Kh., Leonov G.A., Yakubovich V.A. *Ustoychivost nelineynykh sistem s needinstvennym sostoyaniem ravnovesiya* [*Stability of Nonlinear Systems with a Non-Unique State of Equilibrium*]. Moscow. Nauka Publ. 1978. 400 p. (In Russian).

4. Opelt-Die W. Flugzeugkursstenerung im Geradeaus flag. *Luftfahrforschung*. 1938. Bd. 14. Lig. 415. 270 S. (Auf Deutsch).

5. Andronov A.A., Bautin N.N. Teoriya stabilizatsii kursa neytralnogo samoleta pri pomoshchi avtomata s postoyannoy skorostyu servomotora. 2. Sluchay nalichiya zony nechuvstvitelnosti [Theory of course stabilization of a neutral aircraft by means of an automaton with a constant servo motor speed. The case of insensitivity zone]. *Izvestiya Akadrmii Nauk SSSR*. 1955. No 6. P. 54–71 (In Russian).

6. Andronov A.A., Bautin N.N. Teoriya stabilizatsii kursa neytralnogo samoleta pri pomoshchi avtomata s postoyannoy skorostyu servomotora. 2. Sluchay nalichiya zony nechuvstvitelnosti [Theory of course stabilization of a neutral aircraft by means of an automaton with a constant servo motor speed. The case of insensitivity zone]. *Izvestiya Akadrmii Nauk SSSR*. 1955. No 6. P. 54–71 (In Russian).

7. Butenin N.V. *Elementy teorii nelineynykh kolebaniy* [*Elements of the Theory of Non-Дinear Oscillations*]. Leningrad. Sudpromgiz Publ. 1962. 196 p. (In Russian).

8. Butenin N.V., Fufaev N.A., Neymark Yu.I. *Vvedenie v teoriyu nelineynykh kolebaniy* [*Introduction to the Theory of Nonlinear Oscillations*]. Moscow. Nauka Publ. 1976. 384 p. (In Russian).

9. Neymark Yu.I. *Metod tochechnykh otobrazheniy v teorii nelineynykh kolebaniy* [*The Method of Point Mappings in the Theory of Nonlinear Oscillations*]. Moscow. Librokom Publ. 2010. 472 p. (In Russian).

10. Shilnikov L.P. Nekotorye sluchai rozhdeniya periodicheskikh dvizheniy v *n*-mernom prostranstve [Some cases of the birth of periodic motions in *n*-dimensional space]. *Doklady Akademii Nauk SSSR*. 1962. Vol. 143. No 2. P. 289–292 (In Russian).

11. Rinaldi M., Primatesta S., Guglieri G. A comparative study for control of quadrotor uavs. *Applied Sciences*. 2023. Vol. 13. No 6. P. 3464-1 – 3464-20. DOI: 10.3390/app13063464.

12. Manoj Kumar M., Arun Sankar M., Jeeva M., Sasi G. Autonomous drone using Pixhawk flight controller with live stream and mask detection features. *International Journal of Engineering Research & Technology*. 2021. Vol. 10. Iss. 5. P. 104–107. DOI: 10.17577/IJERTV10IS050063.

13. Wang H., Ye X., Tian Y., Zheng G., Christov N. Model-free-based terminal SMC of quadrotor attitude and position. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*. 2016. Vol. 52. Iss. 5. P. 2519–2528. DOI: 10.1109/TAES.2016.150303.

14. Rumanovskiy I.G., Kalinnikov N.A., Aleksandrov A.A. Modelirovanie sistemy upravleniya avtopilota samoleta v sredakh Scilab i Simintech [Simulation of the aircraft autopilot control system in Scilab and Simintech environments]. *Vestnik Tikhookeanskogo gosudarstvennogo universiteta* [*Bulletin of Pacific National University*]. 2023. No 1(68). P. 55–70 (In Russian).

15. Bouabdallah S., Noth A., Siegwart R. PID vs LQ control techniques applied to an indoor micro quadrotor. *2004 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems* (*IROS*). 2004. Vol. 3. P. 2451–2456. DOI: 10.1109/IROS.2004.1389776.

16. Bouabdallah S., Siegwart R. Backstepping and sliding-mode techniques applied to an indoor micro quadrotor. *Proceedings of the 2005 IEEE International Conference on Robotics and Automation* (*IEEE*). 2005. P. 2259–2264. DOI: 10.1109/ROBOT.2005.1570447.

17. Burggrüf P., Martinez A.R.P., Roth H., Wagner J. Quadrotors in factory applications: design and implementation of the quadrotor's P-PID cascade control system: Modeling and implementation. *SN Applied Sciences*. 2019. Vol. 1(7). P. 722-1 – 722-17. DOI: 10.1007/s42452-019-0698-7.

18. Akhloufi M.A., Couturier A., Castro N.A. Unmanned aerial vehicles for wildland fires: sensing, perception, cooperation and assistance. *Drones*. 2021. Vol. 5. Iss. 15. P. 1–25. DOI: 10.3390/drones5010015.

19. Barzegar A., Lee D.J. Deep reinforcement learning-based adaptive controller for trajectory tracking and altitude control of an aerial robot. *Appl. Sci.* 2022. Vol. 12. Iss. 9. P. 4764-1 – 4764-23. DOI: 10.3390/app12094764.

20. Bhar A., Sayadi M., Fnaiech F. Improved modular UAV autopilot simulator for Pinguin BE aircraft. *IEEE-2017. International Conference on Control, Automation and Diagnosis* (*ICCAD*). 2017. P. 125–129.

21. Bhar A., Sayadi M., Fnaiech F. Modular navigation strategy for autonomous robot.

IEEE-2018 15th International Multi-Conference on Systems, Signals & Devices (*SSD*). 2018. P. 396–401.

22. *Teoriya sistem s peremennoy strukturoy* [*Theory of systems with variable structure*]. Ed. S.V. Emelyanov. Moscow. Nauka Publ. 1970. 592 p. (In Russian).

23. Sansone D. *Equazioni Differenziali Nel Campo Reale. Parte Secunda.* Italia, Bologna. 1949. 402 p. (Dall'Italiano).

24. Coddevgton E.A., Levinson N. *Theory of Ordinary Differential Equations*. New York. Toronto. London. McGraw-Hill. 1955. 429 p.

25. Hartman P. *Ordinary Differential Equations*. New York. London. Sydney. 1964. 612 p.

26. Doležal V., Kurzweil J. On certain properties of linear differential equations. *Aplikace Matematiky*. 1959. Vol. 4. Iss. 3. P. 163–176.

27. Volpato M. Sulla derivabilita, rispetto a valori iniziali ed a parametri delle soluzioni dei sistemi di equazioni differenziali ordinarie del primo ordine. *Rendiconti del Seminario Matematico della Universita di Padova*. 1958. Vol. 28. No 1. P. 71–106 (Dall'Italiano).

28. Ayzerman M.A., Gantmakher F.R. Ob opredelenii periodicheskikh rezhimov v nelineynoy dinamicheskoy sisteme s kusochno-lineynymi kharakteristikami [On the determination of periodic modes in a nonlinear dynamic system with piecewise linear characteristics]. *Prikladnaya matematika i mekhanika* [*Journal of Applied Mathematics and Mechanics*]. 1956. Vol. 20. Iss. 5. P. 639–654 (In Russian).

29. Aizerman M.A., Piatnitsky Ye.S. Osnovy teorii razryvnykh sistem. I, II. [Fundamentals of the theory of discontinuous systems. I, II]. *Avtomatika i telemexanika*. 1974. Iss. 7. P. 33–47; Iss. 8. 39–61 (In Russian).

30. Kozlov R.I. K teorii differentsialnykh uravneniy s razryvnymi pravymi chastyam [On the theory of differential equations with discontinuous right-hand sides]. *Differentsialnye uravneniya*. 1974. Vol. 10. No 7. P. 1264–1275 (In Russian).

31. Andronov A.A., Leontovich EL., Gordon I.I., Mayer A.G. *Kachestvennaya teoriya dinamicheskikh sistem vtorogo poryadka* [*Qualitative Theory of Dynamical Systems of the Second Order*]. Moscow. Nauka Publ. 1966. 568 p. (In Russian).

32. Nemytskiy V.V., Stepanov V.V. *Kachestvennaya teoriya differentsialnykh uravneniy* [*Qualitative Theory of Differential Equations*]. Moscow. Leningrad. Gostekhizdat Publ. 1949. 448 p. (In Russian).

33. Shumafov M.M. Topologicheskaya klassifikatsiya osobennostey na poverkhnosti razryva pravykh chastey sistemy trekh differentsialnykh uravneniy [Topological classification of singularities on the discontinuity surface of the right-hand sides of a system of three differential equations]. In: *Differentsialnye uravneniya i ikh prilozheniya*. Moscow. MGU Publ. 1984. P. 123–130 (In Russian).

34. Elsgolts L.E. *Obyknovennye differentsialnye uravneniya* [*Ordinary Differential Equations*]. Saint-Petersburg. Lan Publ. 2002. 218 p. (In Russian).

35. Pontryagin L.S. *Differentsialnye uravneniya i ikh prilozheniya* [*Differential Equations and their Applications*]. Moscow. Editorial URSS Publ. 2007. 206 p. (In Russian).

36. Petrovskiy I.G. *Lektsii po teorii obyknovennykh differentsialnykh uravneni*y [*Lectures on the Theory of Ordinary Differential Equations*]. Moscow. Fizmatlit Publ. 2009. 240 p. (In Russian).

37. Kernigan B., Ritchie D. *The C programming language.* New Jersey. Prentice Hall. 1988. 228 p.

38. Arkhangelskiy A.Ya. *C++Builder 6. Reference Manual*. Moscow. Binom Publ. 2002. 544 p. (In Russian).

39. Schuster H.G. *Deterministic Chaos. An Introduction*. Weinheim. Physik-Verlag. 1984. 220 p.

NUMERICAL AND ANALYTICAL STUDY OF NONLINEAR DYNAMICS OF A MULTIDIMENSIONAL CONTROLLED OBJECT[*]

Igumnov L.A., Metrikin V.S., Litvinchuk S.Yu.

National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Nizhny Novgorod, Russian Federation

v.s.metrikin@mail.ru

Received by the Editor 2025/02/10

The paper studies a multidimensional dynamic system that models oscillations of various technical controlled objects (transport, aviation, fire, underwater and other autopilots), the mathematical description of which can be presented in the form of piecewise continuous or discontinuous autonomous ordinary differential equations with a characteristic of object control in the form of a piecewise linear continuous or discontinuous function. The structure of the phase space of the considered dynamic system is made up of three subspaces, in each of which the dynamics is determined by "its own" the nonlinear dynamics of the system and phase portraits of the full phase space is studied using the mathematical apparatus of bifurcation theory and the method of point mappings of two-dimensional Poincaré surfaces. Analytical equations of point mappings, equations for determining the coordinates of fixed points corresponding to stable periodic symmetrical movements of the object are given. The existence of a separatrix loop going from saddle to saddle is proved, the parameter range where the separatrix loop certainly exists is determined, and also it is asserted that in any neighborhood of the saddle-focus separatrix loop in the selected parameter range there is a countable set of periodic motions of the piecewise linear dynamic system under study. A lemma on the existence in the parameter space of a non-empty range of values for which a separatrix loop exists in the system is presented and proved. A detailed algorithm for numerical calculation of the separatrix loop is developed. It is proved that in any neighborhood of the saddle-focus loop in the found parameter region, there is a countable set of periodic motions of the system. Calculations of complex types of motion of the controlled object are carried out according to the developed software product in Python using the Plotly mathematical package. It is shown that in this parameter range in the system, there are both symmetric stable periodic motions of the object and chaotic motions of the object.

Keywords: mathematical model, phase space, Poincaré map, stability, dead zone, bifurcation diagrams, chaos.

[*] This research was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation under agreement No FSWR-2023-0036.