

УДК 539.4+539.37

DOI: 10.32326/1814-9146-2025-87-2-192-209

**НЕСУЩАЯ СПОСОБНОСТЬ И ДИНАМИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ
ЖЕСТКОПЛАСТИЧЕСКИХ КРУГЛЫХ ПЛАСТИН
СО СВОБОДНЫМИ УЧАСТКАМИ КОНТУРА
ПРИ ВЗРЫВНЫХ НАГРУЗКАХ***

© 2025 г.

Романова Т.П.

*Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича
СО РАН, Новосибирск, Российская Федерация*

romanova@itam.nsc.ru

Поступила в редакцию 05.02.2025

На основе модели идеального жесткопластического тела построено общее решение задачи о предельном и динамическом поведении слоистых круглых пластин с комбинированным креплением контура. Часть контура свободна, закрепленная часть пластин шарнирно оперта или закреплена. Действует равномерно распределенная по поверхности пластины кратковременная динамическая нагрузка высокой интенсивности взрывного типа. Вследствие нерегулярного крепления контура пластины решение задачи становится неосесимметричным. Показано, что существует несколько схем предельного и динамического деформирования пластин в зависимости от размера свободной части контура и от амплитуды нагрузки. При всех схемах пластина приобретает вид совокупности линейчатых поверхностей (конических или плоских жестких областей), разделенных пластическими шарнирами с нормальным изгибающим моментом, равным предельному значению. Эти шарниры могут быть прямолинейными или криволинейными; их положение меняется со временем. Определяющие уравнения получены на основе принципа виртуальной мощности в сочетании с принципом Даламбера. Для каждого из механизмов деформирования определены условия их реализации. Получены простые аналитические выражения для предельной нагрузки и максимального остаточного прогиба пластины. Предложенный подход расширен на случай круглых пластин, имеющих несколько участков свободного контура. Показано, что при увеличении их числа и при условии одинаковой длины суммарного свободного контура предельная нагрузка увеличивается, но она всегда меньше предельной нагрузки пластины со схемой предельного деформирования в форме конуса. Приведены численные примеры. Показано, что при увеличении свободного участка контура предельная нагрузка уменьшается.

Ключевые слова: жесткопластическая модель, слоистая пластина, круглая пластина, комбинированное крепление, свободный контур, взрывная нагрузка, предельная нагрузка, остаточный прогиб.

* Выполнено в рамках государственного задания (№ госрегистрации 124021400036-7).

Введение

Реальные элементы конструкций имеют разные граничные условия: свободный край, защемление, упругая заделка, комбинированные граничные условия. Смешанные граничные условия могут быть конструктивными решениями при проектировании. Во время эксплуатации под влиянием внешних воздействий (появление коррозионных или усталостных трещин, разрушение части опорного контура и т.п.) возможно появление опирания смешанного типа там, где это первоначально не планировалось.

Многочисленные исследования плоских элементов конструкций с комбинированными граничными условиями посвящены анализу упругих круглых, эллиптических, квадратных и прямоугольных пластин и панелей [1–10]. Расчет за пределами упругого поведения пластин с нерегулярным креплением контура выполнен в основном для полигональных пластин [11–17]. Предельное поведение круглых пластин и пластин с криволинейным контуром со свободными участками контура при действии сосредоточенной нагрузки рассмотрено в [18]. В [19] рассмотрена несущая способность квадратных и круглых шарнирно опертых пластин со свободными участками контура в случае равномерно распределенной нагрузки. Однако автор [19] не нашел схем деформирования, в которых снижается предельная нагрузка пластин с малыми размерами участков свободного контура, и на основании этого сделал неверный вывод. Исследования несущей способности защемленных круглых пластин со свободными участками контура и динамического поведения таких пластин за пределом упругости при защемлении или свободном опирании контура в литературе не известны.

Анализ предельного и динамического поведения элементов конструкций под действием нагрузок высокой интенсивности важен для оценки степени их повреждаемости, позволяет предсказать возможные сценарии разрушения и разработать эффективные меры защиты. Такие расчеты можно выполнить на основе модели жесткопластического тела, в которой принято, что тело начинает деформироваться, когда нагрузка достигает предельного значения. При меньшей нагрузке тело остается абсолютно жестким. Упругие деформации в расчетах не учитываются. Решения получаются без выполнения полного упругопластического пошагового анализа при пропорционально возрастающей нагрузке. Жесткопластическая модель является одной из простейших, при этом она позволяет быстро и качественно верно оценить особенности деформации в сложных задачах. Она успешно используется для предельного и динамического анализа разнообразных полигональных однородных и железобетонных плит, круглых и криволинейных пластин [12, 15–25] и также для композитных элементов конструкций [26, 27]. Следует учитывать, что в случае изгиба тонкостенных конструкций область применения этой модели ограничена малыми прогибами.

В настоящей статье исследуются несущая способность и динамическое поведение жесткопластических круглых слоистых тонких пластин со свободными участками контура под действием равномерно распределенных нагрузок взрывного типа.

1. Постановка задачи, основные предположения и геометрические соотношения

Рассмотрим тонкую идеальную жесткопластическую круглую пластину радиусом R с шарнирно опертым или защемленным креплением контура, имеющим свободный участок (рис. 1). Пластина находится под действием равномерно распреде-

ленной по поверхности кратковременной интенсивной динамической нагрузки $P(t)$ взрывного типа, которая характеризуется мгновенным достижением максимального значения $P_{\max} = P(0)$ в начальный момент времени $t = 0$ с последующим быстрым убыванием. Прогибы считаются малыми. Влиянием мембранных сил и вертикальных сдвигов в условии пластичности и геометрическими изменениями пренебрегаем.

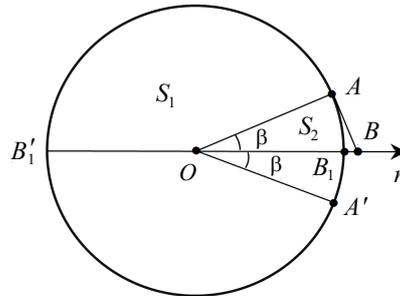


Рис. 1. Круглая пластина со свободной дугой AB_1A' . Схема деформирования 1

Пусть (r, φ) – полярная система координат с полюсом в центре пластины – точке O (см. рис. 1). Пластина закреплена по контуру при $\beta \leq \varphi \leq 2\pi - \beta$, а при $-\beta \leq \varphi \leq \beta$ – контур свободный ($\beta < \pi/2$). Вследствие нерегулярного закрепления контура пластины решение задачи становится неосесимметричным.

Пластина состоит из $2m$ слоев, расположенных симметрично относительно срединной поверхности. Поверхностная плотность материала пластины

$$\rho = 2 \sum_{k=1}^m \rho_k (h_k - h_{k-1}),$$

где ρ_k – плотность материала в k -м слое; h_k – координаты раздела слоев; $h_0 = 0$, $h_m = H$, $2H$ – толщина пластины. Предельные нормальные и касательные изгибающие моменты

$$M_0 = \sum_{k=1}^m \sigma_{0k} (h_k^2 - h_{k-1}^2),$$

где σ_{0k} – предел текучести материала в k -м слое.

В динамике пластины в зависимости от значений P_{\max} и угла β возможны несколько схем деформирования. При нагрузках, не превышающих предельные нагрузки («низких» нагрузках), пластина остается в состоянии покоя. При нагрузках, значительно превышающих предельные («средние» нагрузки, $P_0 < P_{\max} \leq P_1$), считаем, что во время движения область пластины является линейчатой поверхностью. При этом закрепленная часть пластины деформируется конусообразно с углом поворота $\alpha(t)$, как и в случае точного решения для круглых пластин [23]. А область пластины около свободного контура переходит в две симметричные плоские области, жестко вращающиеся вокруг линии $\varphi = 0$, где образуется пластический шарнир (см. рис. 1). Указанные две плоские области являются касательными к конусообразной области. Такую схему движения назовем схемой 1.

При достаточно больших значениях P_{\max} («высокие» нагрузки, $P_{\max} > P_1$), как и в случае точного решения для круглых пластин [23] и приближенного решения для полигональных и криволинейных пластин [24, 25], динамическое деформирование может сопровождаться возникновением внутренней области S_p , движущейся поступательно (схема 2 на рис. 2).

Запишем выражения (5) для мощностей K и A с учетом (1), (2):

$$K = \rho \left\{ \int_0^{\beta} \int_0^R \ddot{\alpha} \dot{\alpha}^* [R - r \cos(\beta - \varphi)]^2 r dr d\varphi + \int_{\beta}^{\pi} \int_0^R \ddot{\alpha} \dot{\alpha}^* (R - r)^2 r dr d\varphi \right\} =$$

$$= \dot{\alpha}^* \ddot{\alpha} \frac{\rho}{24} R^4 (2\pi + 13\beta - 16\sin\beta + 3\sin\beta \cos\beta), \quad (7)$$

$$A = P(t) \left\{ \int_0^{\beta} \int_0^R \dot{\alpha}^* [R - r \cos(\beta - \varphi)] r dr d\varphi + \int_{\beta}^{\pi} \int_0^R \dot{\alpha}^* (R - r) r dr d\varphi \right\} =$$

$$= \dot{\alpha}^* \frac{P(t)}{6} R^3 [\pi + 2(\beta - \sin\beta)]. \quad (8)$$

Мощность внутренних сил (6) равна сумме мощностей на линиях L_1 , OB_1 и в области S_1 . Тогда при учете (3) имеем

$$N = (1 - \eta) M_0 \int_{L_1} [\dot{\theta}^*]_{L_1} dl_{L_1} + M_0 \iint_{S_1} \frac{1}{r} \dot{\alpha}^* ds + M_0 \int_{OB_1} [\dot{\theta}^*]_{OB_1} dl_{OB_1}, \quad (9)$$

где $\eta = 0$ при защемлении участка контура L_1 и $\eta = 1$ при его шарнирном опирании.

Разрывы угловых скоростей на линиях L_1 и OB_1 таковы:

$$[\dot{\theta}^*]_{L_1} = \dot{\alpha}^*, \quad [\dot{\theta}^*]_{OB_1} = \dot{\alpha}^* \sin\beta.$$

Следовательно, мощность внутренних сил (9) половины пластины

$$N = \dot{\alpha}^* M_0 R [(2 - \eta)(\pi - \beta) + \sin\beta]. \quad (10)$$

Подставляя выражения (7), (8), (10) в (4) и учитывая, что $\dot{\alpha}^*(t)$ – независимая функция, получим уравнение движения:

$$\ddot{\alpha} \rho R^3 (2\pi + 13\beta - 16\sin\beta + 3\sin\beta \cos\beta) =$$

$$= 4\{P(t)R^2 [\pi + 2(\beta - \sin\beta)] - 6M_0[(2 - \eta)(\pi - \beta) + \sin\beta]\} \quad (11)$$

с начальными условиями $\dot{\alpha}(0) = \alpha(0) = 0$.

Предельную нагрузку P_0 определим из (11) в момент $t = 0$, принимая $\ddot{\alpha}(0) = 0$:

$$P_0 = 6M_0 \frac{(2 - \eta)(\pi - \beta) + \sin\beta}{R^2 [\pi + 2(\beta - \sin\beta)]}. \quad (12)$$

В случае $\beta = 0$ и $\eta = 1$ предельная нагрузка (12) совпадает с точным решением [23].

На рис. 3 изображена безразмерная предельная нагрузка p_0 ($p_j = P_j R^2 / M_0$, $j = 0, 1, \dots$) в зависимости от угла β . Линия 1 соответствует шарнирному опиранию, линия 2 – защемлению. При увеличении угла β предельная нагрузка уменьшается.

Уравнение движения (11) с учетом (12) запишем в виде

$$\ddot{\alpha}(t) = G[P(t) - P_0], \quad G = \frac{4[\pi + 2(\beta - \sin\beta)]}{\rho R(2\pi + 13\beta - 16\sin\beta + 3\sin\beta \cos\beta)}. \quad (13)$$

Пусть в момент $t = T$ нагрузка снимается. При $0 \leq t \leq T$, интегрируя (13), получим

$$\dot{\alpha}(t) = G \left[\int_0^t P(\tau) d\tau - P_0 t \right], \quad \alpha(t) = G \left[\int_0^t \int_0^{\chi} P(\tau) d\tau d\chi - P_0 \frac{t^2}{2} \right]. \quad (14)$$

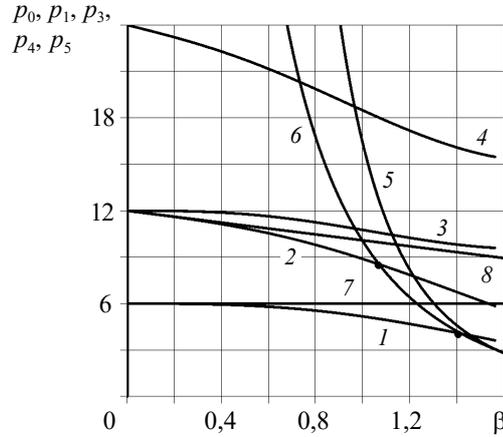


Рис. 3. Безразмерные предельные нагрузки в зависимости от угла β

При $T < t \leq t_f$ движение пластины происходит по инерции до остановки в момент t_f и описывается уравнением

$$\ddot{\alpha}(t) = -GP_0 \quad (15)$$

с начальными условиями $\dot{\alpha}(T), \alpha(T)$. Время t_f определяется из условия

$$\dot{\alpha}(t_f) = 0. \quad (16)$$

Интегрируя уравнение движения (15), получим

$$\dot{\alpha}(t) = \dot{\alpha}(T) - GP_0(t - T), \quad (17)$$

$$\alpha(t) = \alpha(T) + \dot{\alpha}(T)(t - T) - GP_0 \frac{(t - T)^2}{2}.$$

Из уравнений (14), (16), (17) следует

$$t_f = \frac{\int_0^T P(t) dt}{P_0}. \quad (18)$$

Все прогибы в пластине определяются соотношениями (1), (2). Максимальный остаточный прогиб $u_{\max} = u(t_f, 0, \varphi)$ определяется по формуле

$$u_{\max} = GR \left[\frac{\left(\int_0^T P(t) dt \right)^2}{2P_0} - \int_0^T tP(t) dt \right]. \quad (19)$$

Максимальный остаточный прогиб на свободном контуре

$$u(t_f, R, 0) = u_{\beta_{\max}} = u_{\max} (1 - \cos \beta). \quad (20)$$

Нагрузку P_1 определим при анализе схемы 2.

На рис. 4 приведены безразмерные остаточные прогибы $w = uR^2\rho/(M_0T^2)$ круглой пластины вдоль диаметра B_1B_1 (см. рис. 1) под действием «средней» нагрузки с прямоугольным импульсом ($p_{\max} = P_{\max}R^2/M_0$):

$$P(t) = \begin{cases} p_{\max} M_0/R^2, & 0 \leq t \leq T, \\ 0, & t > T. \end{cases} \quad (21)$$

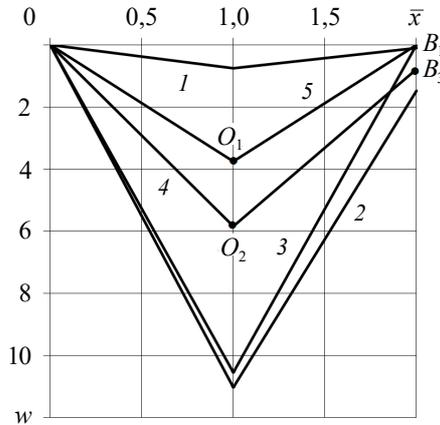


Рис. 4. Безразмерные остаточные прогибы пластины при схеме 1

На рисунке начало оси $O\bar{x}$ расположено в точке B'_1 , $\bar{x} = 1 + r/R$ при $\varphi = 0$ и $\bar{x} = 1 - r/R$ при $\varphi = \pi$. Линии 1, 4, 5 соответствуют защемлению, линии 2, 3 – шарнирному опиранию. Линии 1–3 получены для $p_{\max} = 11,5$, при этом $\beta = \pi/6$ для линий 1, 2 и $\beta = 0$ для линии 3. Линии 4 и 5 изображают прогиб в случае $p_{\max} = 15$ для $\beta = \pi/6$ и $\beta = 0$ соответственно.

При $\beta > 0$ прогибы в любой точке пластины больше, чем при отсутствии свободных участков контура (при $\beta = 0$) при одинаковой «средней» нагрузке. Обозначим остаточный прогиб в центре пластины при $\beta = 0$ через $u_{0\max}$. Из (12), (19) и (20) получим, что разность остаточных прогибов $u_{\beta\max} - (u_{\max} - u_{0\max})$ пропорциональна выражению

$$\Delta(q) = q \left(\pi - \beta + \frac{\sin \beta}{2 - \eta} \right) - [\pi + 2(\beta - \sin \beta)] - \frac{2(q - 1) \cos \beta [\pi + 2(\beta - \sin \beta)]^2}{2\pi + 13\beta - 16 \sin \beta + 3 \sin \beta \cos \beta}, \quad (22)$$

где $q = P_{\max}/P_0 > 1$ ($P_{\max} \leq P_1$).

Из (22) следует, что $\Delta < 0$ при $\eta = 0$ и $\beta > 0$. То есть при любом $\beta > 0$ при защемлении пластина прогибается сильнее в центре, чем в середине участка свободного контура, по сравнению со случаем $\beta = 0$. На рис. 4 этому свойству соответствует то, что отрезок B_1B_3 меньше отрезка O_1O_2 для всех $\beta > 0$.

При шарнирном опирании контура ($\eta = 1$) величина Δ может быть положительной и отрицательной. Обозначим решение уравнения $\Delta(q_\beta) = 0$ при $\beta > 0$ через q_β (см. (22)):

$$q_\beta = 1 + \frac{3(\beta - \sin \beta)}{\pi - \beta + \sin \beta - \{2 \cos \beta [\pi + 2(\beta - \sin \beta)]^2\} / (2\pi + 13\beta - 16 \sin \beta + 3 \sin \beta \cos \beta)}.$$

Тогда при $q > q_\beta$ и $\beta > 0$ будет $\Delta > 0$ и пластина прогибается больше на свободном контуре, чем в центре, по сравнению со случаем $\beta = 0$. При $q < q_\beta$, наоборот, пластина деформируется сильнее в центре, чем на свободном контуре, по сравнению с вариантом $\beta = 0$.

3. Вывод уравнений движения и анализ поведения пластины при схеме 2 ($P_{\max} > P_1$)

При деформировании по схеме 2 во внутренней части пластины появляется область S_p , движущаяся поступательно со скоростью $\dot{w}_p(t)$, где $w_p(t)$ – прогиб в области S_p . Области S_1 и S_2 , как и в схеме 1, являются линейчатыми поверхностями (см. рис. 2). Обозначим части контура области S_p при $\beta \leq \varphi \leq \pi$ и при $0 \leq \varphi \leq \beta$ через L_{p1} и L_{p2} соответственно. Линии L_{p1} и L_{p2} являются пластическими шарнирами. Так как область S_p движется поступательно, то нормаль к линии L_{p1} , проведенная в сторону внешнего контура пластины, является также нормалью к закрепленному контуру L_1 (см. [25]). Из непрерывности скоростей на L_{p1} следует, что и расстояние D между L_1 и L_{p1} не зависит от координаты φ , но оно зависит от времени. Таким образом, линия L_{p1} является дугой окружности радиусом $R - D(t)$. Рассуждая аналогично, получим, что линия L_{p2} является прямой, параллельной AB , а расстояние между L_{p2} и AB равно $D(t)$. Линия L_{p2} изображена на рис. 2 как прямая CB_2 , которая параллельна AB . При $D = R$ область S_p вырождается в точку и схема 2 переходит в схему 1. Области S_1 и S_2 определены как

$$S_1 : \beta \leq \varphi \leq \pi, \quad R - D \leq r \leq R; \quad S_2 : 0 \leq \varphi \leq \beta, \quad (R - D) / \cos(\beta - \varphi) \leq r \leq R.$$

Для схемы 2 скорости прогибов пластины равны (1), (2) и

$$(r, \varphi) \in S_p : \dot{u}(t, r, \varphi) = \dot{w}_p(t). \quad (23)$$

Выражения (5) для схемы 2 таковы:

$$K = \rho [\dot{w}_p^* \dot{w}_p \Sigma_p + \dot{\alpha}^* \ddot{\alpha} \Sigma_1(D)], \quad \Sigma_p = \iint_{S_p} ds_p, \quad (24)$$

$$A = P(t) [\dot{w}_p^* \Sigma_p + \dot{\alpha}^* \Sigma_2(D)], \quad (25)$$

$$\Sigma_1(D) = \frac{1}{24} [2(\pi - \beta) D^3 (4R - 3D) + R^4 (15\beta - 16 \sin \beta + 3 \sin \beta \cos \beta) - 2(R - D)^2 (R^2 + 2RD + 3D^2) \operatorname{tg} \beta],$$

$$\Sigma_2(D) = \frac{1}{6} [(\pi - \beta) D^2 (3R - 2D) + R^3 (3\beta - 2 \sin \beta) - (R + 2D)(R - D)^2 \operatorname{tg} \beta].$$

Разрывы угловых скоростей на линиях L_1 , L_{p1} и CB_2 равны $\dot{\alpha}^*$, на линии $B_1B_2 - \dot{\alpha}^* \sin \beta$. Из (6) получим, как и в (10),

$$N = \dot{\alpha}^* M_0 \Sigma_3(D); \quad \Sigma_3(D) = R[(2 - \eta)(\pi - \beta) + \sin \beta]. \quad (26)$$

Подставляя выражения (24)–(26) в (4) и учитывая, что $\dot{\alpha}^*$, \dot{w}_p^* независимы, получим

$$\rho \ddot{w}_p(t) = P(t), \quad (27)$$

$$\rho \ddot{\alpha}(t) \Sigma_1(D) = P(t) \Sigma_2(D) - M_0 \Sigma_3(D). \quad (28)$$

Из непрерывности скоростей на границах областей S_p и S_1 , S_p и S_2 следует

$$\dot{\alpha} D = \dot{w}_p. \quad (29)$$

Начальные условия имеют вид

$$\dot{\alpha}(0) = \alpha(0) = \dot{w}_p(0) = w_p(0) = 0, \quad D(0) = D_0. \quad (30)$$

Начальное значение D_0 определяется в зависимости от P_{\max} .

Система уравнений (27)–(29) с начальными условиями (30) описывает движение пластины по схеме 2. Продифференцируем уравнение (29) по времени:

$$\ddot{\alpha}D + \dot{\alpha}\dot{D} = \ddot{w}_p.$$

Последнее равенство с учетом (27) и (28) примет вид

$$\rho\dot{\alpha}(t)\dot{D}(t)\Sigma_1(D(t)) = P(t)[\Sigma_1(D(t)) - D(t)\Sigma_2(D(t))] + M_0\Sigma_3(D(t))D(t). \quad (31)$$

При $t=0$ из (30) и (31) получим уравнение для определения D_0 в зависимости от P_{\max} :

$$P_{\max} [D_0\Sigma_2(D_0) - \Sigma_1(D_0)] = M_0D_0\Sigma_3(D_0). \quad (32)$$

Считая, что при возникновении области S_p выполняются равенства $P_{\max} = P_1$, $D_0 = R$, из (32) получим значение нагрузки P_1 :

$$P_1 = \frac{M_0\Sigma_3(R)}{\Sigma_2(R) - \Sigma_1(R)/R} = \frac{24M_0[(2 - \eta)(\pi - \beta) + \sin\beta]}{R^2(2\pi - 5\beta + 8\sin\beta - 3\sin\beta\cos\beta)}. \quad (33)$$

При $\beta = 0$ и $\eta = 1$ значение P_1 (33) равно нагрузке, полученной в точном решении [25].

Безразмерная нагрузка p_1 в зависимости от угла β приведена на рис. 3. Линия 3 соответствует шарнирному опиранию, линия 4 – защемлению. Видно, что при увеличении угла β нагрузка p_1 уменьшается.

Под действием «высокой» нагрузки при $P_{\max} > P_1$ движение пластины начнется с областью S_p , для которой $D_0 < R$. В первой фазе ($0 \leq t \leq t_1$) движение происходит по схеме 2 и описывается уравнениями (27)–(29) с начальными условиями (30), где D_0 определяется из (32). Изменение размеров области S_p , определяемое функцией $D(t)$, происходит по закону (31). При этом если $P(t) = \text{const}$, то $\dot{D} = 0$ и $D(t) = D_0$, а если $P(t)$ убывает, то $\dot{D} > 0$ и $D(t)$ возрастает. После снятия нагрузки $D(t)$ возрастает. Когда величина D достигает значения R , область S_p исчезает, а пластина продолжает деформироваться по схеме 1. Поэтому время t_1 определяется из равенства $D(t_1) = R$, при этом вычисляются значения $\dot{w}_p(t_1)$, $w_p(t_1)$, $\dot{\alpha}(t_1)$, $\alpha(t_1)$.

Вторая фаза ($t_1 < t \leq t_f$) движения происходит по схеме 1 до остановки в момент t_f . Деформирование описывается уравнением (13) с начальными условиями, определенными в конце первой фазы. Время остановки определяется условием (16). Все прогибы в пластине вычисляются из соотношений (1), (2), (23) с учетом обеих фаз движения.

Динамика пластины под действием нагрузки с $P_{\max} > P_1$ показана на рис. 5.

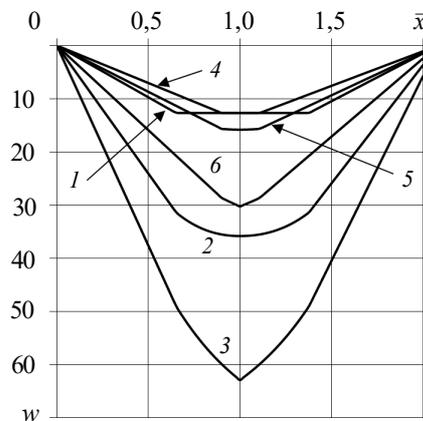


Рис. 5. Безразмерные прогибы пластины при схеме 2

Здесь для круглой пластины с $\beta = \pi/8$ приведены безразмерные прогибы w вдоль диаметра $B_1B'_1$ (см. рис. 1) при нагрузке с прямоугольным импульсом (21) с $p_{\max} = 25,36$ для случая шарнирного опирания (линии 1–3, $D_0 = 0,652R$) и защемления (линии 4–6, $D_0 = 0,9R$). Прогибы приведены в момент снятия нагрузки ($t/T = 1$, кривые 1, 4), во время стягивания области S_p в точку (кривая 2 при $t_1/T = 1,91$ и кривая 5 при $t_1/T = 1,27$) и в момент остановки движения (кривая 3 при $t_f/T = 4,05$ и кривая 6 при $t_f/T = 2,26$).

4. Другие возможные схемы предельного поведения пластины

Рассмотрим возможные предельные схемы пластины, отличные от схемы 1. При достаточно большом участке свободного контура AB_1A' возможна схема с образованием шарнирной прямой AA' (схема 3 на рис. 6). Область между прямой AA' и дугой окружности AB_1A' поворачивается вокруг шарнира AA' с углом поворота α_3 . Остальная часть пластины не деформируется. Половину вращающейся области обозначим S_3 ; на ней расположим декартову систему координат (x, y) с центром в точке O' . Тогда S_3 определяется как

$$0 \leq x \leq R(1 - \cos \beta), \quad 0 \leq y \leq \sqrt{R^2 - (x + R \cos \beta)^2}.$$

Скорости прогибов в области S_3 :

$$(x, y) \in S_3 : \dot{u}(t, x, y) = \dot{\alpha}_3(t)x.$$

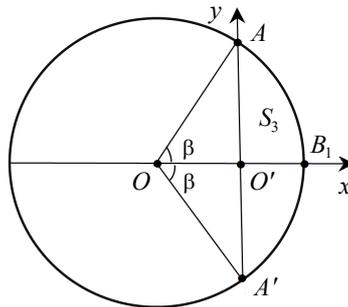


Рис. 6. Круглая пластина со свободной дугой AB_1A' . Схема деформирования 3

Из (5), (6) имеем

$$N = \dot{\alpha}_3^* M_0 |AO'| = \dot{\alpha}_3^* M_0 R \sin \beta,$$

$$A = P(t) \dot{\alpha}_3^* \int_0^{R(1-\cos \beta)} x dx \int_0^{\sqrt{R^2 - (x + R \cos \beta)^2}} dy = \dot{\alpha}_3^* \frac{R^3}{6} P(t) (3 \sin \beta - \sin^3 \beta - 3 \beta \cos \beta).$$

Из (4) при $\ddot{\alpha}_3(0) = 0$ получим соответствующую предельную нагрузку P_3 :

$$P_3 = \frac{6M_0}{R^2(3 - \sin^2 \beta - 3\beta \operatorname{ctg} \beta)}. \quad (34)$$

Также возможна предельная схема 4, когда в пластине образуются три пластических шарнира (OA , OB_1 и OA' на рис. 1), а жесткие плоские области S_2 (OAB_1 и $OA'B_1$) вращаются с углом поворота α_4 вокруг шарниров OA и OA' соответственно. Область S_1 не деформируется. На S_2 расположим декартову систему координат (x, y)

с центром в точке A (ось Ax направлена по AB , ось Ay направлена по AO). Скорости прогибов в S_2 :

$$(x, y) \in S_2 : \dot{u}(t, x, y) = \dot{\alpha}_4(t)y.$$

Область S_2 определена как

$$S_2 : \begin{cases} 0 \leq x \leq R(1 - \cos \beta), & 0 \leq y \leq \sqrt{R^2 - (x - R)^2}, \\ R(1 - \cos \beta) \leq x \leq R, & 0 \leq y \leq \operatorname{tg} \beta (R - x). \end{cases}$$

Для области S_2 из (5), (6) получим

$$\begin{aligned} N &= \dot{\alpha}_4^* M_0 R (1 + \cos \beta), \\ A &= P(t) \dot{\alpha}_4^* \iint_{OAB_1} y dx dy = \dot{\alpha}_4^* \frac{R^3}{3} P(t) (1 - \cos \beta). \end{aligned}$$

Из (4) при $\ddot{\alpha}_4(0) = 0$ следует соответствующая предельная нагрузка P_4 :

$$P_4 = 3M_0 \frac{1 + \cos \beta}{R^2 (1 - \cos \beta)}. \quad (35)$$

Предельные нагрузки P_3 и P_4 не зависят от параметра крепления η .

Сравнивая нагрузки P_3 , P_4 и P_0 , получим, что $P_4 < P_3$ и существует значение $\beta_* > 0$ такое, что при $0 < \beta < \beta_*$ справедливо $P_0 < P_4$ и реализуется схема 1. При $\beta > \beta_*$ будет $P_0 > P_4$ и, следовательно, пластина деформируется по схеме 4. Значит, схемы 3 не будет. Угол β_* определяется из условия $P_0 = P_4$ (см. (12) и (35)), которое принимает вид

$$2[(2 - \eta)(\pi - \beta_*) + \sin \beta_*](1 - \cos \beta_*) = [\pi + 2(\beta - \sin \beta_*)](1 + \cos \beta_*). \quad (36)$$

Решение уравнения (36) в случае защемления части контура ($\eta = 0$) дает $\beta_{*0} \approx 1,07$ рад $\approx 61,4^\circ$, а в случае $\eta = 1$ получим $\beta_{*1} \approx 1,42$ рад $\approx 81,4^\circ$.

Рассмотрим также возможную схему, когда вся пластина деформируется в форме конуса (схема 5). Тогда скорости прогибов всей пластины определяются по (1). Из (4)–(6) при $\ddot{\alpha}(0) = 0$ получим соответствующую предельную нагрузку P_5 :

$$P_5 = 6M_0 \frac{(2 - \eta)(\pi - \beta) + \beta}{\pi R^2}. \quad (37)$$

При $\beta > 0$ будет $P_5 > P_0$ и $P_5 > P_4$ при $\beta > 1$. Следовательно, схемы 5 не может быть.

На рис. 3 показаны безразмерные предельные нагрузки p_3 (линия 5), p_4 (линия 6) и p_5 (линии 7 и 8) в зависимости от угла β . Линия 7 получена при шарнирном опирании, линия 8 – при защемлении. Точки пересечений линии 6 с линиями 1 и 2 соответствуют углам $\beta = \beta_{*1}$ и $\beta = \beta_{*0}$, при которых схема 1 переходит в схему 4.

5. Случай нескольких свободных участков контура

Предложенное решение можно модифицировать на случай, когда на контуре круглой пластины находятся n одинаковых свободных дуг $A_i A'_i$ ($i = 2, \dots, n$), расположенных осесимметрично с суммарным центральным углом $2\beta < 2\pi$ (рис. 7). В этом случае при схеме, аналогичной схеме 1, рассматривая часть пластины с центральным углом π/n , получим, как и (12), предельную нагрузку P_{0n} :

$$P_{0n} = 6M_0 \frac{(2 - \eta)(\pi - \beta) + n \sin(\beta/n)}{R^2 \{\pi + 2[\beta - n \sin(\beta/n)]\}}. \quad (38)$$

Сравнивая P_0 из (12) и P_{0n} из (38), получим, что при увеличении числа участков свободного контура n и при постоянном их суммарном центральном угле предельная нагрузка пластины увеличивается:

$$P_{0n+1} > P_{0n} > \dots > P_0.$$

Поскольку $\lim_{n \rightarrow \infty} [n \sin(\beta/n)] = \beta$, то при $\beta \neq 0$ из (37) и (38) получим оценку для P_{0n} :

$$P_{0n} < 6M_0 \frac{(2 - \eta)(\pi - \beta) + \beta}{\pi R^2} = P_5, \quad n \geq 2.$$

Это сравнение показывает, что и при нескольких участках свободного контура схема 5 в форме конуса не реализуется.

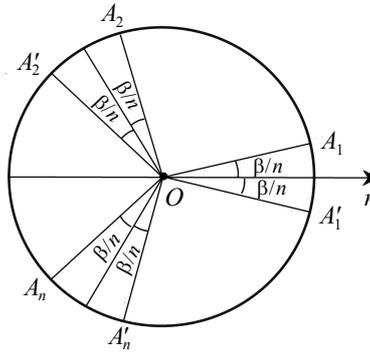


Рис. 7. Круглая пластина с n свободными дугами $A_i A'_i$ ($i = 2, \dots, n$)

Рассмотрим для пластины с n участками свободного контура схему предельного деформирования типа 3, представленную в п. 4, когда центральная часть пластины не деформируется (см. рис. 6). Для нее предельная нагрузка P_{3n} запишется в виде:

$$P_{3n} = \frac{6M_0}{R^2 [3 - \sin^2(\beta/n) - 3\beta/n \operatorname{ctg}(\beta/n)]}. \quad (39)$$

Оценим для пластины с n участками свободного контура предельную схему типа 4, рассмотренную в п. 4, когда центральная часть не деформируется и около свободных участков образуется по три пластических шарнира. Для нее предельная нагрузка

$$P_{4n} = 3M_0 \frac{1 + \cos(\beta/n)}{R^2 (1 - \cos(\beta/n))}. \quad (40)$$

Сравнивая нагрузки P_{3n} , P_{4n} и P_{0n} , получим, что $P_{0n} < P_{4n} < P_{3n}$ при $n \geq 2$. Значит, схем предельного деформирования типа 3 и 4 не будет.

Рассмотрим случай двух симметричных свободных участков контура ($n = 2$). В этом случае возможна схема, когда внутри пластины образуются три шарнирных прямых AA_1 , $B_1 B'_1$ и $A'A'_1$ (схема 6 на рис. 8). Области $B'_1 A_1 A B_1$ и $B'_1 A'_1 A' B_1$ жестко вращаются вокруг шарниров AA_1 и $A'A'_1$ соответственно с углом поворота α_6 . Остальная часть пластины не деформируется. Также рассматриваем половину круглой пластины.

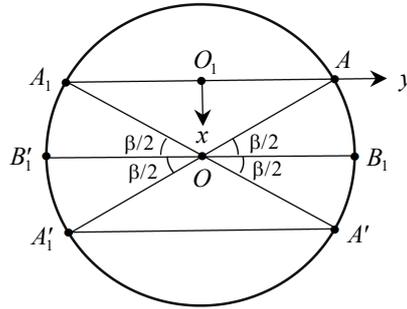


Рис. 8. Круглая пластина с двумя свободными дугами AB_1A' и $A_1B'A_1$.
Схема деформирования 6

На вращающейся области $B_1A_1AB_1$ расположим декартову систему координат (x, y) с центром в точке O_1 (см. рис. 8). Здесь $|OO_1| = R \sin(\beta/2)$, $|O_1A| = R \cos(\beta/2)$ и $|OB_1| = |OA| = R$. Тогда область OO_1AB_1 (половина области $B_1A_1AB_1$) определена как

$$0 \leq x \leq R \sin \frac{\beta}{2}, \quad 0 \leq y \leq \sqrt{R^2 - \left[x - R \sin \frac{\beta}{2} \right]^2}$$

и скорости прогибов в ней

$$\dot{u}(t, x, y) = \dot{\alpha}_6(t)x.$$

Из (4)–(6) при $\ddot{\alpha}_6(0) = 0$ следует, что соответствующая предельная нагрузка

$$P_6 = 6M_0 \frac{1 + \cos(\beta/2)}{R^2 [3 \cos(\beta/2) - \cos^3(\beta/2) + 3(\beta/2) \sin(\beta/2) - 2]}. \quad (41)$$

Сравнивая нагрузки P_6 (41) и P_{02} (см. (38) при $n = 2$), получим, что в случае защемления части контура ($\eta = 0$) при $\beta/2 < \beta_{60} = 0,72$ рад $\approx 41,27^\circ$ реализуется схема типа 1 ($P_6 > P_{02}$), а при $\beta/2 > \beta_{60}$ будет схема 6 ($P_6 < P_{02}$). В случае $\eta = 1$ при $\beta/2 < \beta_{61} = 1,04$ рад $\approx 69,67^\circ$ будет $P_6 > P_{02}$ и пластина деформируется по схеме типа 1. При $\beta/2 > \beta_{61}$ будет схема 6.

На рис. 9 приведены зависимости безразмерных предельных нагрузок $p_0, p_{0n}, p_6, p_{32}, p_{42}$ от угла β , рассчитанные по формулам (38)–(41). Линия 1 изображает p_0 ($n = 1$) при шарнирном опирании, а линия 2 – p_0 при защемлении. Линия 3 показывает p_{02} ($n = 2$) при шарнирном опирании, линия 4 – p_{02} при защемлении. Линия 5 относится к p_6 . Точки пересечений линии 5 с линиями 3 и 4 соответствуют углам $\beta = 2\beta_{61}$ и $\beta = 2\beta_{60}$, при которых схема типа 1 для $n = 2$ переходит в схему 6. Линии 6 и 7 показывают p_{32} и p_{42} ($n = 2$). Линия 8 изображает p_{03} ($n = 3$) при шарнирном опирании, а линия 9 – p_{03} при защемлении. Линия 10 изображает p_{04} ($n = 4$) при шарнирном опирании, линия 11 – p_{04} при защемлении.

При $n > 2$, как для $n = 2$, при больших углах β/n возможны схемы деформирования (типа схемы 6), отличные от схемы типа 1. В настоящей статье они не рассматриваются.

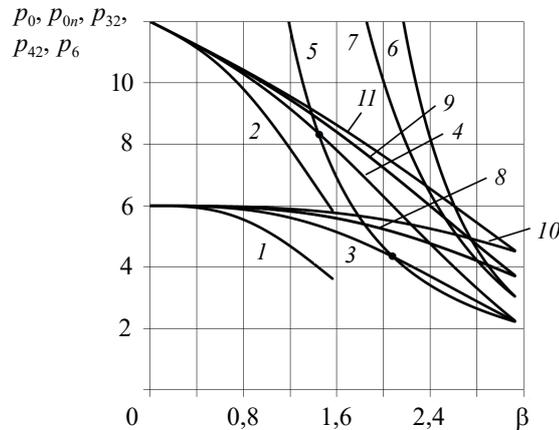


Рис. 9. Безразмерные предельные нагрузки в зависимости от угла β в случае n свободных дуг ($n = 1-4$)

Заключение

На основе модели идеального жесткопластического материала разработана модель предельного поведения и динамического изгиба многослойных круглых пластин с комбинированным креплением контура под действием равномерно распределенной по поверхности кратковременной динамической нагрузки высокой интенсивности взрывного типа. Рассмотрено комбинированное крепление, при котором часть контура пластины свободна, а другая часть шарнирно оперта или зашпелена, что существенно влияет на характер деформирования. Вследствие нерегулярного закрепления контура пластины решение задачи становится неосесимметричным. В зависимости от размера свободной части контура и от амплитуды нагрузки возможны разные схемы деформирования пластин. Во всех схемах пластина деформируется в виде совокупности конических и плоских жестких областей, разделенных пластическими шарнирами с нормальным изгибающим моментом, равным предельному значению. Уравнения динамического деформирования получены на основе принципа виртуальной мощности, дополненного принципом Даламбера. Для каждой из схем проанализированы условия их реализации. Получены простые аналитические выражения для оценки предельных нагрузок. Найденная предельная нагрузка соответствует определению несущей способности рассматриваемых пластин по второму предельному состоянию. Для свободных дуг с углами, меньшими, чем $2,14$ рад при защемлении закрепленной части контура и $2,84$ рад при ее шарнирном опирании, проанализировано динамическое поведение пластины (схемы 1 и 2). При этом определены время деформирования и остаточные прогибы в случае произвольной взрывной нагрузки.

Предложенный подход расширен на случай круглых пластин, имеющих несколько участков свободного контура. Показано, что при увеличении их числа и условии одинаковой длины суммарного свободного контура предельная нагрузка увеличивается, но она всегда меньше предельной нагрузки пластины со схемой предельного деформирования в форме конуса.

Представленные численные примеры иллюстрируют влияние различных факторов (свободной части контура, амплитуды нагрузки, способа крепления) на несущую

способность и динамическое поведение пластины. Показано, что при наличии свободных участков контура прогибы в любой внутренней точке пластины больше, чем при их отсутствии при одинаковой нагрузке. Получено, что при средней нагрузке разность между прогибами пластины со свободным контуром и без него у защемленной пластины больше в центре, чем в середине свободного участка контура.

Проведенное исследование может быть полезно для предварительного анализа конструкций, а также для верификации численных расчетов. Кроме того, оно может служить ориентиром для оценок в различных областях техники при проектировании высоконагруженных элементов конструкций.

Список литературы

1. Conway H.D., Farnham K.A. Deflections of uniformly loaded circular plates with combinations of clamped, simply supported and free boundary conditions. *International Journal of Mechanical Sciences*. 1967. Vol. 9. Iss. 9. P. 661–671. [https://doi.org/10.1016/0020-7403\(67\)90070-7](https://doi.org/10.1016/0020-7403(67)90070-7).
2. Hassan S.M., Makary M. Transverse vibrations of elliptical plate of linearly varying thickness with half of the boundary clamped and the rest simply supported. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2003. Vol. 45. Iss. 5. P. 873–890. [https://doi.org/10.1016/S0020-7403\(03\)00117-6](https://doi.org/10.1016/S0020-7403(03)00117-6).
3. Ostryk V.I., Ulitko A.F. Bending of partially supported circular plate. *Journal of Mathematical Sciences*. 2017. Vol. 220. Iss. 2. P. 149–161. <https://doi.org/10.1007/s10958-016-3173-7>.
4. Strozzi A. Solid circular plate unilaterally supported along two antipodal edge arcs and deflected by a central transverse concentrated force. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*. 2022. Vol. 236. Iss. 21. P. 10736–10741. <https://doi.org/10.1177/0954406220924446>.
5. Резунов А.В., Лютоева Ю.Н. Анализ напряженно-деформированного состояния прямоугольной плиты при различных способах опирания краев и произвольном нагружении. *Строительная механика и конструкции*. 2019. №2 (21). С. 20–31.
6. Sompornjaroensuk Y., Chantarawichit P. Vibration of circular plates with mixed edge conditions. Part I: Review of research. *UTK Research Journal*. 2020. Vol. 14. No 2. P. 136–157.
7. Belounar A., Benmebarek S., Belounar L. Strain based triangular finite element for plate bending analysis. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 2020. Vol. 27. Iss. 8. P. 620–632. <https://doi.org/10.1080/15376494.2018.1488310>.
8. Li Q., Lu V.P. Three-dimensional free vibration of functionally graded material plates on different boundary conditions. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 2011. Vol. 18. Iss. 8. P. 597–601. <https://doi.org/10.1080/15376494.2011.621840>.
9. Tahouneh V., Naei M.H. 3D free vibration analysis of elastically supported thick nanocomposite curved panels with finite length and different boundary conditions via 2D GDQ method. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 2016. Vol. 23. Iss. 10. P. 1216–1235. <https://doi.org/10.1080/15376494.2015.1068402>.
10. Le-Manh T., Luu-Anh T., Lee J. Isogeometric analysis for flexural behavior of composite plates considering large deformation with small rotations. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 2016. Vol. 23. Iss. 3. P. 328–336. <https://doi.org/10.1080/15376494.2014.981616>.
11. Смирнов В.А. *Расчет пластин сложного очертания*. М.: Стройиздат, 1978. 300 с.
12. Gilbert M., He L., Smith C.C., Le C.V. Automatic yield-line analysis of slabs using discontinuity layout optimization. *Proceedings of the Royal Society A*. 2014. Vol. 470. Iss. 2168. P. 1–23. <http://dx.doi.org/10.1098/rspa.2014.0071>.
13. Xueyu Bai, Ling Zhu, Yu T.X. Saturated impulse for pulse-loaded rectangular plates with various boundary conditions. *Thin-Walled Structures*. 2017. Vol. 119. P. 166–177. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2017.03.030>.
14. Ho P.L.H., Le C.V., Tran-Cong T. Limit state analysis of reinforced concrete slabs using an integrated radial basis function based mesh-free method. *Applied Mathematical Modelling*. 2018. Vol. 53. P. 1–11. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2017.08.006>.

15. Thavalingam A., Jennings A., McKeown J.J., Sloan D. A computerised method for rigid-plastic yield-line analysis of slabs. *Computers and Structures*. 1998. Vol. 68. Iss. 6. P. 601–612. [https://doi.org/10.1016/S0045-7949\(98\)00082-0](https://doi.org/10.1016/S0045-7949(98)00082-0).
16. Wüst J., Wagner W. Systematic prediction of yield-line configurations for arbitrary polygonal plates. *Engineering Structures*. 2008. Vol. 30. Iss. 7. P. 2081–2093. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2008.01.005>.
17. Kozniowski E., Orłowski M. Pre-determination of prediction of yield-line pattern of slabs using Voronoi diagrams. *Open Engineering*. 2022. Vol. 12. Iss. 1. P. 647–661. <https://doi.org/10.1515/eng-2022-0376>.
18. Ржаницын А.Р. *Расчет сооружений с учетом пластических свойств материалов*. М.: Стройиздат, 1954. 288 с.
19. Дехтярь А.С. Пластинки, частично опертые по контуру. *Строительная механика и расчет сооружений*. 2020. №2 (289). С. 15–20. <https://doi.org/10.37538/0039-2383.2020.2.15.20>.
20. Megson T.H.G. *Structural and Stress Analysis*. New York–Oxford–Parise: Elsevier Butterworth-Heinemann, 2014. 768 p.
21. Alotaibi S.A.E., Rigby S.E., Guadagnini M., Tyas A. Rigid-plastic membrane response of thin plates under impulsive blast loads using the extended Hamilton principle. *International Journal of Impact Engineering*. 2023. Vol. 178. P. 104624-1–104624-19. <https://doi.org/10.1016/j.ijimpeng.2023.104624>.
22. Braestrup M.W. Concrete plasticity-A historical perspective. *Structural Concrete*. 2021. Vol. 22. Iss. 5. P. 2508–2525. <https://doi.org/10.1002/suco.202100444>.
23. Гопкинс Г., Прагер В. Динамика пластической круглой пластинки. *Механика*. 1955. №3. С. 112–122.
24. Немировский Ю.В., Романова Т.П. Динамический изгиб пластических полигональных плит. *Прикладная механика и техническая физика*. 1988. № 4. С. 149–157.
25. Romanova T.P., Nemirovsky Yu.V. Dynamic rigid-plastic deformation of arbitrarily shaped plates. *Journal of Mechanics of Materials and Structures*. 2008. Vol. 3. Iss. 2. P. 313–334. <https://doi.org/10.2140/jomms.2008.3.313>.
26. He G., Liu Y. et al. A historical review of the traditional methods and the internal state variable theory for modeling composite materials. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 2022. Vol. 29. Iss. 18. P. 2617–2638. <https://doi.org/10.1080/15376494.2021.1872124>.
27. Романова Т.П. Моделирование динамического изгиба жесткопластических армированных слоистых круглых пластин с произвольным отверстием на вязком основании при взрывных нагрузках. *Проблемы прочности и пластичности*. 2017. Т. 79. №3. С. 267–284. <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2017-79-3-267-284>.

References

1. Conway H.D., Farnham K.A. Deflections of uniformly loaded circular plates with combinations of clamped, simply supported and free boundary conditions. *International Journal of Mechanical Sciences*. 1967. Vol. 9. Iss. 9. P. 661–671. [https://doi.org/10.1016/0020-7403\(67\)90070-7](https://doi.org/10.1016/0020-7403(67)90070-7).
2. Hassan S.M., Makary M. Transverse vibrations of elliptical plate of linearly varying thickness with half of the boundary clamped and the rest simply supported. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2003. Vol. 45. Iss. 5. P. 873–890. [https://doi.org/10.1016/S0020-7403\(03\)00117-6](https://doi.org/10.1016/S0020-7403(03)00117-6).
3. Ostryk V.I., Ulitko A.F. Bending of partially supported circular plate. *J. Math. Sci*. 2017. Vol. 220. Iss. 2. P. 149–161. <https://doi.org/10.1007/s10958-016-3173-7>.
4. Strozzi A. Solid circular plate unilaterally supported along two antipodal edge arcs and deflected by a central transverse concentrated force. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*. 2022. Vol. 236. Iss. 21. P. 10736–10741. <https://doi.org/10.1177/0954406220924446>.
5. Rezunov A.V., Lyutoeva Yu.N. Analiz napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya pryamougolnoy plity pri razlichnykh sposobakh opiraniya kraev i proizvolnom zagruzhenii [Analysis of stressed-deformed state rectangular plate with different methods of the surfacing

of the edges and arbitrary loading]. *Stroitel'naya mekhanika i konstruksii* [Structural Mechanics and Structures]. 2019. No 2 (21). P. 20–31 (In Russian).

6. Sompornjaroensuk Y., Chantarawichit P. Vibration of circular plates with mixed edge conditions. Part I: Review of research. *UTK Research Journal*. 2020. Vol. 14. No 2. P. 136–157.

7. Belounar A., Benmebarek S., Belounar L. Strain based triangular finite element for plate bending analysis. *Mech. Adv. Mater. Struct.* 2020. Vol. 27. Iss. 8. P. 620–632. <https://doi.org/10.1080/15376494.2018.1488310>.

8. Li Q., Lu V.P. Three-dimensional free vibration of functionally graded material plates on different boundary conditions. *Mech. Adv. Mater. Struct.* 2011. Vol. 18. Iss. 8. P. 597–601. <https://doi.org/10.1080/15376494.2011.621840>.

9. Tahouneh V., Naei M.H. 3D free vibration analysis of elastically supported thick nanocomposite curved panels with finite length and different boundary conditions via 2D GDQ method. *Mech. Adv. Mater. Struct.* 2016. Vol. 23. Iss. 10. P. 1216–1235. <https://doi.org/10.1080/15376494.2015.1068402>.

10. Le-Manh T., Luu-Anh T., Lee J. Isogeometric analysis for flexural behavior of composite plates considering large deformation with small rotations. *Mech. Adv. Mater. Struct.* 2016. Vol. 23. Iss. 3. P. 328–336. <https://doi.org/10.1080/15376494.2014.981616>.

11. Smirnov V.A. *Raschet plastin slozhnogo ocheraniya* [Calculation of Plates of Complex Shape]. Moscow. Stroyizdat Publ. 1978. 300 p. (In Russian).

12. Gilbert M., He L., Smith C.C., Le C.V. Automatic yield-line analysis of slabs using discontinuity layout optimization. *Proceedings of the Royal Society A*. 2014. Vol. 470. Iss. 2168. P. 1–23. <http://dx.doi.org/10.1098/rspa.2014.0071>.

13. Xueyu Bai, Ling Zhu, Yu T.X. Saturated impulse for pulse-loaded rectangular plates with various boundary conditions. *Thin Walled Struct.* 2017. Vol. 119. P. 166–177. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2017.03.030>.

14. Phuc L.H. Ho, Canh V.Le and T. Tran-Cong. Limit state analysis of reinforced concrete slabs using an integrated radial basis function based mesh-free method. *Appl. Math. Model.* 2018. Vol. 53. P. 1–11. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2017.08.006>.

15. Thavalingam A., Jennings A., McKeown J.J., Sloan D. A computerised method for rigid-plastic yield-line analysis of slabs. *Computers and Structures*. 1998. Vol. 68. Iss. 6. P. 601–612. [https://doi.org/10.1016/S0045-7949\(98\)00082-0](https://doi.org/10.1016/S0045-7949(98)00082-0).

16. Wüst J., Wagner W. Systematic prediction of yield-line configurations for arbitrary polygonal plates. *Engineering Structures*. 2008. Vol. 30. Iss. 7. P. 2081–2093. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2008.01.005>.

17. Kozniewski E., Orłowski M. Pre-determination of prediction of yield-line pattern of slabs using Voronoi diagrams. *Open Engineering*. 2022. Vol. 12. Iss. 1. P. 647–661. <https://doi.org/10.1515/eng-2022-0376>.

18. Rzhaničyn A.R. *Raschet sooruzheniy s uchetom plasticheskikh svoystv materialov* [Calculation of Structures Taking into Account the Plastic Properties of Materials]. Moscow. Stroyizdat Publ. 1954. 288 p. (In Russian).

19. Dekhtyar A.S. Plastinki, chastichno opertye po konturu [Plates partly supported]. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy* [Structural Mechanics and Analysis of Constructions]. 2020. No 2 (289). P. 15–20 (In Russian).

20. Megson T.H.G. *Structural and Stress Analysis*. New York. Oxford. Parise. Elsevier Butterworth-Heinemann. 2014. 768 p.

21. Alotaibi S.A.E., Rigby S.E., Guadagnini M., Tyas A. Rigid-plastic membrane response of thin plates under impulsive blast loads using the extended Hamilton principle. *Int. J. Impact Eng.* 2023. Vol. 178. P. 104624-1–104624-19. <https://doi.org/10.1016/j.ijimpeng.2023.104624>.

22. Braestrup M.W. Concrete plasticity-A historical perspective. *Struct. Concr.* 2021. Vol. 22. Iss. 5. P. 2508–2525. <https://doi.org/10.1002/suco.202100444>.

23. Hopkins H.G., Prager W. On the dynamics of plastic circular plates. *J. of Applied Mathematics and Physics*. 1954. Vol. 5. P. 317–330. <https://doi.org/10.1007/BF01587827>.

24. Nemirovskii Yu.V., Romanova T.P. Dynamic bending of polygonal plastic slabs. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 1988. Vol. 29. Iss. 4. P. 591–597. <https://doi.org/10.1007/BF00852503>.

25. Romanova T.P., Nemirovsky Yu.V. Dynamic rigid-plastic deformation of arbitrarily shaped

plates. *Journal of Mechanics of Materials and Structures*. 2008. Vol. 3. Iss. 2. P. 313–334. <https://doi.org/10.2140/jomms.2008.3.313>.

26. He G., Liu Y. et al. A historical review of the traditional methods and the internal state variable theory for modeling composite materials. *Mech. Adv. Mater. Struct.* 2022. Vol. 29. Iss. 18. P. 2617–2638. <https://doi.org/10.1080/15376494.2021.1872124>.

27. Romanova T.P. Modelirovanie dinamicheskogo izgiba zhestkoplasticheskikh armirovannykh sloistykh kruglykh platin s proizvolnym otverstiem na vyazkom osnovanii pri vzryvnykh nagruzkakh [Modeling of rigid-plastic dynamic bending of reinforced layered circular plates with arbitrary hole on viscous foundation under explosive loads]. *Problemy prochnosti i plastichnosti [Problems of Strength and Plasticity]*. 2017. Vol. 79. Iss. 3. P. 267–284 (In Russian).

**BEARING CAPACITY AND DYNAMIC BEHAVIOR
OF RIGID PLASTIC CIRCULAR PLATES WITH FREE CONTOUR SECTIONS
UNDER EXPLOSIVE LOADS***

Romanova T.P.

*Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics the SB RAS,
Novosibirsk, Russian Federation*

romanova@itam.nsc.ru

Received by the Editor 2025/02/05

Based on the model of an ideal rigid-plastic body, a general solution to the problem of the limit and dynamic behavior of layered circular plates with mixed edge conditions is constructed. Part of the contour is free; the supported part of the plates is simply supported or clamped. A short-term dynamic load of high explosive intensity evenly distributed over the surface of the plate acts. The solution of the problem becomes non-axisymmetric due to the irregular supporting of the contour. It is shown that there are several schemes of limit and dynamic deformation of plates depending on the size of the free part of the contour and on the amplitude of the load. In all schemes, the plate takes the form of a set of ruled surfaces (conical or flat rigid areas) separated by plastic hinges with a normal bending moment equal to the limit value. These hinges can be straight or curved; their position changes in time. The governing equations are obtained on the basis of the virtual power principle in combination with the D'Alembert principle. For each of the deformation mechanisms, the conditions for their implementation are defined. Simple analytical expressions for the limit load and the maximum final deflection of the plate are obtained. The proposed approach is extended to the case of circular plates with several sections of a free contour. It is shown that with an increase their number and under the condition of the same length of the total free contour, the limit load increases, but it is always less than the limit load of the plate with the limit deformation scheme in the shape of a cone. Numerical examples are given. It is shown that as the free part of the contour increases, the limit load decreases.

Keywords: rigid-plastic model, laminated plate, circular plate, mixed edge conditions, free contour, explosive load, limit load, final deflection.

*Completed within the framework of the state assignment (state registration number 124021400036-7).