УДК 539.3 DOI: 10.32326/1814-9146-2025-87-2-131-143

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ НЕЛИНЕЙНО-УПРУГОЙ МОДЕЛИ МУРНАГАНА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЭВОЛЮЦИОННЫХ АЛГОРИТМОВ

Карякин М.И.[1,2], **Егорова С.А.**[1]

[1]*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Российская Федерация*
[2]*Южный математический институт – филиал Владикавказского научного центра РАН, Владикавказ, Республика Северная Осетия – Алания, Российская Федерация*

karyakin@sfedu.ru, sofegorova@sfedu.ru

Поступила в редакцию 15.07.2024

Разработана и апробирована вычислительная схема идентификации материальных констант модели Мурнагана, описывающей нелинейно-упругие свойства твердого тела на основе экспериментальных данных, полученных путем проведения традиционных статических испытаний по растяжению, кручению и изгибу образцов. Вместо реальных экспериментов используются их вычислительные модели, основанные на применении полуобратного метода нелинейной теории упругости. Входными данными для процесса идентификации служат диаграммы нагружения, построенные на основе численного исследования цепочек нелинейных краевых задач или, в простейшем случае задачи одноосного растяжения, путем аналитического исследования нелинейных алгебраических уравнений. Рассмотрены три типа диаграмм: зависимость удлинения стержня от величины растягивающей силы, зависимость угла поворота сечения скручиваемого вала от величины крутящего момента и зависимость изменения толщины бруса от величины изгибающего момента. Все диаграммы построены в предположении конечности деформаций; последняя из трех типов диаграмм связана с проявлением исключительно нелинейных свойств материала. С целью проверки устойчивости разрабатываемой схемы исследования для идентификации также использованы искусственно зашумленные варианты диаграмм нагружения. Вычислительная схема восстановления материальных параметров основывается на решении задачи минимизации среднеквадратичного отклонения диаграммы нагружения, построенной для этих параметров, от «экспериментальной» диаграммы. Рельеф минимизируемой функции достаточно сложен для градиентных методов, поэтому в качестве средства поиска минимума выбран алгоритм дифференциальной эволюции. Его применение позволило добиться удовлетворительного восстановления нелинейно-упругой модели, в том числе в случае зашумленных входных данных. В то же время оказалось, что чувствительность рассмотренных моделей деформирования к материальным параметрам может существенно различаться вплоть до невозможности идентификации одного из параметров на основе выбранного механического эксперимента.

Ключевые слова: нелинейная упругость, большие деформации, полуобратный метод, материал Мурнагана, обратные задачи, эволюционный алгоритм.

Введение

Модель Мурнагана [1] основана на удержании в выражении упругого потенциала слагаемых третьего порядка малости по деформациям. Она широко применяется для моделирования существенно нелинейных эффектов, характеризующих большие деформации изотропных упругих тел. Модель использована в целом ряде теоретических работ, связанных с учетом сжимаемости материалов при больших деформациях. В [2] модель применялась для описания нелинейных явлений, таких как эффект Пойнтинга, при моделировании классических механических экспериментов. Вопросы теоретической устойчивости модели при описании сверхбольших деформаций обсуждались в [3]. Потенциал Мурнагана использовался для теоретического обоснования ряда моделей распространения волн в нелинейно-упругой среде, построенных на сейсмологических данных [4], применялся для моделирования слоя тектоносферы Земли при исследовании ее напряженно-деформированного состояния [5]. Модель использовалась для описания поведения упругих и упругопластических деформаций различных материалов при сверхвысоких давлениях, например таких, как алмаз [6]. Материал Мурнагана активно применяется при ультразвуковом анализе конструкций [7, 8]. С его помощью в [9] изучено поведение тонкостенных металлических пластин, подверженных усталостному разрушению и коррозии в результате воздействия окружающей среды. Модель находит широкое применение для моделирования материалов с неоднородной структурой и внутренними дефектами, например бетона [10]. Потенциал используется также при изучении двумерных кристаллов, например, с его помощью изучалось плоское напряженное состояние графена в достаточно малом диапазоне нагружения [11]. В [12, 13] показана высокая степень применимости модели не только к хрупким, но и к высокоэластичным материалам. Актуальность модели подтверждает и большое количество ее обобщений, например, на случай упругопластического [14] и вязкоупругого [15] поведения материалов.

В [16] дан обзор основных методик, используемых для экспериментального определения упругих констант третьего порядка – коэффициентов модели Мурнагана. Наиболее распространенным подходом при этом являются акустические методы. Подробная таблица значений констант Мурнагана, полученных на основе акустических испытаний, приведена в [17].

Задачи восстановления материальных свойств на основе механических экспериментов относятся к большому классу коэффициентных обратных задач [18]. В статье [19] для идентификации параметров нелинейно-упругих потенциалов применен метод квазилинеаризации, или обобщенный метод Ньютона – Рафсона. В [20] для восстановления параметров предложена модель искусственной нейронной сети. Мощным инструментом для решения задач идентификации являются эволюционные алгоритмы [21]. В настоящей статье изучена возможность идентификации материальных параметров модели Мурнагана по экспериментальным данным трех классических статических экспериментов механики твердого тела (растяжение, изгиб и кручение) и исследована эффективность алгоритма дифференциальной эволюции, реализованного средствами библиотеки SciPy [22].

1. Схема анализа прямых задач

Эксперименты моделируются с использованием полуобратного метода нелинейной теории упругости. На первом его этапе, исходя из геометрических рассмотрений и соображений симметрии, задается преобразование $\mathbf{R}(\mathbf{r})$, переводящее радиус-вектор $\mathbf{r}$ точки отсчетной (недеформированной) конфигурации в радиус-вектор $\mathbf{R}$ текущей конфигурации, содержащее один-два скалярных параметра, характеризующих деформированное состояние, и, возможно, одну неизвестную функцию одной переменной. Далее вычисляются градиент деформации $\mathbf{C} = \operatorname{grad} \mathbf{R}$ и мера деформации Коши – Грина $\mathbf{G} = \mathbf{C}\cdot\mathbf{C}^{\mathrm{T}}$.

Определяющие соотношения для тензора напряжений Пиолы $\mathbf{D}$ сжимаемого гиперупругого материала записываются с использованием функции удельной потенциальной энергии деформации W в виде:

$$\mathbf{D} = W_{,\mathbf{C}} = 2W_{,\mathbf{G}} \cdot \mathbf{C}. \tag{1}$$

Уравнения равновесия при отсутствии массовых сил, записываемые в виде

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 0, \tag{2}$$

сводятся либо к краевой задаче для одного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка, либо к системе нелинейных алгебраических уравнений.

В настоящей статье используется модель Мурнагана [1], для которой функция W представляется полиномом по степеням инвариантов меры деформации Коши – Грина $I_k = I_k(\mathbf{G})$ $(k = 1, 2, 3)$:

$$W = \frac{1}{4}\Bigg[\left(-3\lambda - 2\mu + \frac{9}{2}l + \frac{n}{2}\right)I_1 + \frac{1}{2}(\lambda + 2\mu - 3l - 2m)I_1^2 + \left(-2\mu + 3m - \frac{n}{2}\right)I_2 - \\ - mI_1I_2 + \frac{1}{6}(l + 2m)I_1^3 + \frac{n}{2}(I_3 - 1)\Bigg]. \tag{3}$$

Материальные константы λ, μ при малых деформациях соответствуют параметрам Ламе линейной теории упругости; константы l, m, n называются константами Мурнагана или модулями упругости второго порядка. При проведении численных расчетов напряжения и энергия приводятся к безразмерному виду путем деления на параметр μ и определяются, таким образом, четырьмя безразмерными материальными параметрами: коэффициентом Пуассона

$$\nu = \frac{\lambda/\mu}{2(1+\lambda/\mu)} \text{ и } \tilde{l} = \frac{l}{\mu}, \quad \tilde{m} = \frac{m}{\mu}, \quad \tilde{n} = \frac{n}{\mu}.$$

Далее значок тильды будем опускать.

2. Математические модели механических экспериментов

Одноосное растяжение образца. В отсчетной и текущей конфигурациях исследуемый образец имеет форму прямоугольной призмы, боковые грани которой параллельны плоскостям декартовых координат. Одноосное напряженно-деформированное состояние реализуется за счет приложения к верхней и нижней граням образца равномерно распределенной нагрузки q; боковые грани образца остаются свободными. Процесс растяжения описывается полуобратным представлением:

$$X_1 = dx_1, \quad X_2 = dx_2, \quad X_3 = kx_3, \tag{4}$$

где x_1, x_2, x_3 и X_1, X_2, X_3 – декартовы координаты в отсчетной и текущей конфигурациях соответственно, d и k – поперечная и продольная кратности удлинения соответственно.

Градиент деформации **C** в этом случае постоянен, таковым является и тензор напряжений Пиолы; следовательно, уравнения равновесия (2) удовлетворяются автоматически для любых значений деформационных параметров d и k. Последние могут быть найдены из граничных условий: отсутствие напряжений на боковой поверхности определяет зависимость между параметрами d и k, а краевое условие на торцах, состоящее в равенстве компоненты (3,3) тензора Пиолы величине растягивающей осевой нагрузки q, определяет связь этой нагрузки с коэффициентом удлинения k. Подробный вывод и полученное (достаточно громоздкое) аналитическое выражение для зависимости $q(k)$ представлено в [23]. На рис. 1 приведены диаграммы растяжения, построенные для трех наборов материальных констант модели Мурнагана, соответствующих таким материалам [17], как

сталь Rex 535 (штриховая линия):

$$\nu = 0{,}269, \quad l = -1{,}103, \quad m = -8{,}064, \quad n = -9{,}333,$$

медь (сплошная линия):

$$\nu = 0{,}346, \quad l = -2{,}264, \quad m = -13{,}082, \quad n = -33{,}375,$$

и вольфрам (штрихпунктирная линия):

$$\nu = 0{,}272, \quad l = -3{,}449, \quad m = -5{,}781, \quad n = -7{,}796.$$

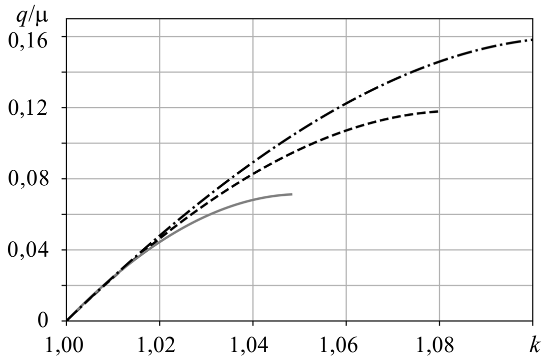

Рис. 1. Диаграмма растяжения образца модели Мурнагана из стали Rex 535, меди и вольфрама

Изгиб панели. Брус прямоугольного сечения, занимающий до деформации область $-a/2 \le x \le a/2$, $-h/2 \le y \le h/2$, где h – ширина сечения, a – толщина, изгибается торцевыми моментами M. В результате деформации сечение приобретает форму сектора полого цилиндра, для ее описания используется полуобратное представление, предложенное в [2]:

$$R = A(x) + \frac{1}{B}, \quad \Phi = By, \quad Z = z. \tag{5}$$

Здесь x_1, x_2, x_3 и R, Φ, Z – декартовы координаты в отсчетной и цилиндрические координаты в текущей конфигурациях соответственно, функция $A(x)$ характеризует изменение толщины сечения после деформации; B – положительная постоянная. Расстояние от начала координат до центра тяжести поперечного сечения после деформации совпадает с величиной $1/B$, а угол раствора кругового сектора, форму которого приобретает сечение бруса после деформации, равен Bh.

Тензор напряжений Пиолы, соответствующий преобразованию (5), имеет структуру:

$$\mathbf{D} = D_{xR}(x)\mathbf{i}_x\mathbf{e}_R + D_{y\Phi}(x)\mathbf{i}_y\mathbf{e}_\Phi + D_{zZ}(x)\mathbf{i}_z\mathbf{e}_Z. \tag{6}$$

Векторное уравнение равновесия (2) сводится к скалярному дифференциальному уравнению второго порядка относительно функции $A(x)$:

$$\frac{dD_{xR}}{dx} - BD_{y\Phi} = 0. \tag{7}$$

Граничное условие, выражающее отсутствие нагрузки на внутренней и внешней боковой поверхностях деформированного бруса, запишется как

$$D_{xR}\left(\pm\frac{a}{2}\right) = 0. \tag{8}$$

С учетом определяющего соотношения (1) и обезразмеривания вида $\widetilde{x} = x/a$, $\widetilde{x}_0 = x_0/a$, $A(\widetilde{x}) = A(x)/a$, $\widetilde{\mathbf{D}} = \mathbf{D}/\mu$, $\widetilde{M} = M/(\mu a^2)$ краевая задача (7), (8) приводится к виду (тильда опущена):

$$A'' = B(BA+1)\frac{N}{D}, \tag{9}$$

$$\begin{gathered}
N = -3lA'^4 + 2A'^2\left(-lBA(2+BA) + l - \lambda\right) + A^4B^4(l+2m) + 4A^3B^3(l+2m) + \\
+ 2A^2B^2(l+\lambda+4m+2) - 4AB(l-\lambda-2) + l - 2\lambda, \\
D = 5A'^4(l+2m) + 6A'^2\left(lBA(2+BA) - l + \lambda - 2m + 2\right) + D_1, \\
D_1 = A^4B^4l + 4A^3B^3l + 2A^2B^2(l+\lambda) - 4AB(l-\lambda) + l - 2\lambda + 2m - 4, \\
\frac{1}{4}A'\left[A'^4(l+2m) + 2A'^2\left(ABl(1+AB) - l + \lambda - 2m + 2\right) + D_1\right] = 0, \\
x = -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}.
\end{gathered} \tag{10}$$

Нелинейная краевая задача (9), (10) решалась численно. По найденной функции $A(x)$ определялся действующий на торцах бруса изгибающий момент:

$$M = \int_{-a/2}^{a/2} D_{y\Phi}A(x)dx. \tag{11}$$

На рис. 2 приведена диаграмма зависимости между приложенным изгибающим моментом и изменением толщины образца $\Delta h = A(a/2) - A(-a/2) - a$ для трех наборов материальных констант, соответствующих стали (штриховая линия), меди (сплошная линия), вольфраму (штрихпунктирная линия). Из представленных графиков видно (и может быть доказано аналитически), что изменение толщины при изгибе представляет собой чисто нелинейный эффект.

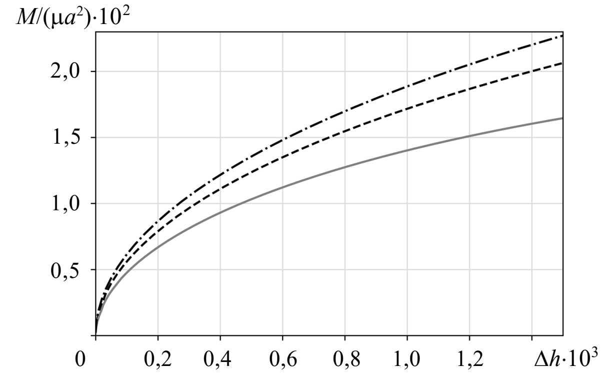

Рис. 2. Диаграмма зависимости изгибающего момента от толщины образца из стали Rex 535, меди и вольфрама

Кручение цилиндра. Исследуемый образец представляет собой полый круговой цилиндр длиной l с внутренним и внешним радиусами r_0 и r_1 соответственно. Цилиндр скручивается равными по величине торцевыми моментами, боковая поверхность свободна от нагружения. Процесс кручения описывается преобразованием:

$$R = P(r), \quad \Phi = \varphi + \psi z, \quad Z = kz, \tag{12}$$

где r, φ, z и R, Φ, Z – цилиндрические координаты в отсчетной и текущей конфигурациях соответственно, $P(r)$ – подлежащая определению функция радиального смещения точек цилиндра, ψ – угол закручивания на единицу длины цилиндра, k – кратность осевого удлинения при кручении.

Тензор напряжений Пиолы, соответствующий преобразованию (12), имеет следующую структуру:

$$\mathbf{D} = D_{rR}(r)\mathbf{e}_r\mathbf{e}_R + D_{\varphi\Phi}(r)\mathbf{e}_\varphi\mathbf{e}_\Phi + D_{\varphi Z}(r)\mathbf{e}_\varphi\mathbf{e}_Z + D_{z\Phi}(r)\mathbf{e}_z\mathbf{e}_\Phi + D_{zZ}(r)\mathbf{e}_z\mathbf{e}_Z. \tag{13}$$

Векторное уравнение равновесия (2) сводится к скалярному дифференциальному уравнению второго порядка относительно функции $P(r)$:

$$\frac{dD_{rR}(r)}{dr} + \frac{D_{rR}(r) - D_{\varphi\Phi}(r)}{r} - \psi D_{z\Phi}(r) = 0. \tag{14}$$

Граничное условие на боковой поверхности цилиндра с единичной нормалью $\mathbf{e}_r$ записывается в виде

$$D_{rR}(r)\big|_{r=r_0,\,r_1} = 0. \tag{15}$$

Выражения для продольной силы Q и крутящего момента M, действующих в поперечном сечении цилиндра, записываются как

$$Q = 2\pi\int_{r_0}^{r_1} D_{zZ} r\,dr, \tag{16}$$

$$M = 2\pi\int_{r_0}^{r_1} D_{z\Phi} rP\,dr. \tag{17}$$

Выражение краевой задачи (14), (15) через функцию $P(r)$ не приводится в силу громоздкости. Ее численное решение сопровождалось одновременным определением коэффициента k из условия обращения осевой силы Q (16) в нуль. По найденным значениям кратности удлинения k и функции $P(r)$ вычислялось выражение (17) для крутящего момента при заданном угле поворота.

На рис. 3 представлены диаграммы кручения цилиндра – зависимость между крутящим моментом M и углом закручивания ψ при $r_0/r_1 = 0{,}9$ для трех наборов материальных констант модели Мурнагана, соответствующих стали Rex 535 (штриховая линия), меди (сплошная линия) и вольфраму (штрихпунктирная линия).

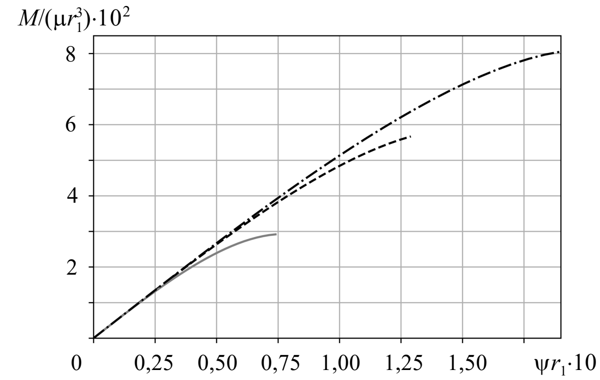

Рис. 3. Диаграмма кручения образца модели Мурнагана из стали Rex 535, меди и вольфрама

3. Обратные задачи

Цель дальнейшего исследования состоит в идентификации параметров модели Мурнагана на основе заданной диаграммы нагружения. Вместо реальных экспериментальных данных использованы результаты численного решения прямых задач, в том числе содержащие искусственный шум. При тестировании вычислительной схемы решения обратных задач был использован весь набор вариантов значений материальных параметров из [17]. Ограничимся представлением результатов, соответствующих набору параметров для стали Rex 535; все качественные выводы относятся ко всем рассматриваемым вариантам.

Полагаем, что параметры Ламе λ и μ, или модули упругости первого порядка, известны, а искомыми являются модули упругости второго порядка, или параметры Мурнагана l, m, n. Задача идентификации сводится к задаче нахождения минимума функции отклонения расчетных теоретических данных, полученных численным решением одной из перечисленных выше краевых задач, от экспериментальных данных с использованием метода наименьших квадратов:

$$F(l,m,n) = \sum_{i=1}^{M} (y_i - y_i^*)^2, \tag{18}$$

где y_i^* – известные «экспериментальные» значения параметра нагружения; y_i – расчетные значения этого параметра, вычисленные при тех же значениях деформационной характеристики для заданных значений l, m, n параметров Мурнагана; M – число точек на диаграмме нагружения. В качестве средства численной минимизации в настоящей статье использован алгоритм дифференциальной эволюции из пакета SciPy языка Python [22]. Размер популяции выбран равным 10, условием остановки является достижение заданного числа итераций, принятого далее равным 100. В качестве области поиска выбран диапазон в ±75% от известного значения для каждой константы. Полагаем, что эксперименты моделируют устойчивое нагружение образцов.

В таблице 1 представлены найденные значения параметров l, m, n. Поскольку алгоритм дифференциальной эволюции использует при реализации псевдослучайные числа, результат при каждом его запуске, строго говоря, может варьироваться. Присутствующий в таблице разброс значений материальных параметров связан с проведением не одного, а целого цикла вычислительных экспериментов для каждой модели нагружения.

Таблица 1

Определение параметров Мурнагана с помощью алгоритма дифференциальной эволюции

	l	m	n
Восстанавливаемые значения	–1,103	–8,064	–9,333
Одноосное растяжение	–1,1031 — –1,1029	–8,0645 — –8,0634	–9,3331 — –9,3328
Кручение	–1,104 — –1,019	–8,0642 — –8,0637	–9,3333 — –9,3320
Изгиб	–1,1035 — –1,1029	–8,0644 — –8,0640	–10,845 — –7,821

В результате проведенных численных экспериментов можно сделать вывод о надежном восстановлении констант l, m, n на основе экспериментальных данных по одноосному растяжению и кручению. Из эксперимента на изгиб панели удается восстановить лишь параметры l и m, надежное определение константы n здесь не представляется возможным. Заметим, что, согласно [2], в формулу, связывающую величину изгибающего момента с изменением толщины панели в квадратичном приближении, действительно не входит параметр n. Таким образом, использование эксперимента на изгиб для его идентификации представляется бесперспективным.

Рассмотрим задачу восстановления параметров модели на основе искусственно зашумленных входных данных. Считаем, что шум является «абсолютным», то есть его величина не зависит от значения деформационной или силовой характеристики конкретной точки диаграммы нагружения, а представляет собой некоторое свойство «средства измерения». В качестве такого свойства выбиралась доля от максимально возможного значения измеряемой величины. Таким образом, для моделирования шума точки на диаграмме нагружения отклонялись от своих первоначальных позиций на малые случайные расстояния по следующей схеме: задавались два параметра ε_x и ε_y, характеризующие максимально возможные смещения точки диаграммы в горизонтальном и вертикальном направлениях соответственно, а затем точка с координатами (x, y) на диаграмме заменялась точкой $(x + \delta_x, y + \delta_y)$, где δ_x – случайное число в диапазоне $(-\varepsilon_x x_{\max}, \varepsilon_x x_{\max})$, а δ_y – случайное число в диапазоне $(-\varepsilon_y y_{\max}, \varepsilon_y y_{\max})$. Например, в задаче об одноосном растяжении $y_{\max} = q_{\max}$ – максимальное значение приложенной нагрузки на исследуемой диаграмме нагружения, $x_{\max} = (k_{\max} - 1)$, где $k_{\max}$ – максимальное значение коэффициента удлинения образца. В качестве ε_x и ε_y здесь выбирались пары $\varepsilon_x = 0{,}005$, $\varepsilon_y = 0{,}01$ (малый шум) и $\varepsilon_x = 0{,}01$, $\varepsilon_y = 0{,}03$ (средний шум). Для задачи о кручении рассматривались параметры амплитуды шума $\varepsilon_x = 0{,}005$, $\varepsilon_y = 0{,}01$ и $\varepsilon_x = 0{,}01$, $\varepsilon_y = 0{,}03$, для задачи изгиба – $\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0{,}005$ и $\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0{,}01$. Получившийся набор точек далее заменялся его сплайн-интерполяцией.

Результаты идентификации параметров Мурнагана на основе зашумленных диаграмм приведены в таблице 2. Заметим, что поскольку для конкретных значений шума использовался генератор случайных чисел, вычислительные эксперименты для каждой модели нагружения образца проводились десятки раз.

Таблица 2

Результаты восстановления параметров Мурнагана на основе зашумленных данных

	Шум	l	m	n
Восстанавливаемые значения		–1,103	–8,064	–9,333
Одноосное растяжение	Малый	–1,471 — –0,672	–8,211 — –7,919	–9,746 — –8,932
	Средний	–1,818 — –0,353	–8,236 — –7,882	–11,07 — –7,621
Кручение	Малый	–1,497 — –0,658	–8,379 — –7,756	–12,07 — –6,423
	Средний	–1,910 — –0,316	–8,396 — –7,742	–14,07 — –4,833
Изгиб	Малый	–1,160 — –1,046	–8,087 — –8,033	–12,30 — –6,373
	Средний	–1,710 — –0,516	–8,146 — –7,985	–16,03 — –2,573

Вычисления показали, что при учете шума единственным надежно восстанавливаемым параметром является коэффициент m, относительная погрешность восстановления которого для всех перечисленных выше вариантов значений параметра шума не превышала 4%. Коэффициент l оказался существенно зависимым от шума в начальных данных. В экспериментах на растяжение и кручение даже малый шум приводил к погрешности 40% в определении этого параметра. В эксперименте на изгиб при малом шуме относительная погрешность его восстановления не превышала 5%, но добавление абсолютного шума в 1% увеличивало эту погрешность до 55%, что практически приближало найденное значение к случайному из области поиска. Аналогично, хоть и не в столь существенных пропорциях, шум влиял и на восстанавливаемое значение параметра n.

Заключение

Изучена возможность идентификации упругих постоянных третьего порядка – коэффициентов модели нелинейно-упругого материала Мурнагана – по данным статических испытаний. Для моделирования выбран такой набор механических экспериментов, который позволил применить полуобратный метод нелинейной теории упругости и свести решение задачи по описанию процесса деформирования к исследованию набора нелинейных алгебраических уравнений или к анализу нелинейной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения. Построение теоретической диаграммы «силовой фактор–деформация» для заданного набора материальных констант сведено, таким образом, к численному решению последовательности нелинейных краевых задач, при этом эффективно использован метод продолжения по параметру нагружения. Такие диаграммы, а также их зашумленные аналоги использованы в качестве входных данных для анализа обратных задач об идентификации параметров Мурнагана, которые решались с применением алгоритма дифференциальной эволюции.

Показано, что надежность восстановления констант существенно зависит от вида механического эксперимента. Для устойчивого определения двух из трех параметров Мурнагана, возможно, потребуется другая схема организации таких экспериментов, например исследование эффекта Пойнтинга вместо анализа зависимости угла поворота от момента при кручении.

Во всех численных экспериментах область поиска была хоть и достаточно большой, тем не менее обязательно содержала искомую точку – триплет параметров Мурнагана. Направление дальнейших исследований может быть связано с построением начального, хотя бы грубого, приближения к искомым параметрам только на основе диаграмм нагружения с использованием технологий машинного обучения.

Список литературы

1. Murnaghan F.D. *Finite Deformation of an Elastic Solid.* New York: John Wiley & Sons, 1951. 140 p.

2. Karyakin M., Kalashnikov V., Shubchinskaya N. Nonlinear effects in a plane problem of the pure bending of an elastic rectangular panel. *International Journal of Engineering Science*. 2014. Vol. 80. P. 90–105. https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2014.02.023.

3. Карякин М.И., Обрезков Л.П. Устойчивость цилиндра из материала Мурнагана при растяжении, сжатии и раздувании. *Проблемы прочности и пластичности*. 2019. Т. 81. №1. С. 30–39. https://doi.org/10.32326/1814-9146-2019-81-1-30-39.

4. Guliyev H.H. The features of the propagation of elastic waves in isotropic media at high and ultra-high pressures. *Vestnik of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Geology*. 2017. Vol. 79. Iss. 4. P. 27–34. DOI: 10.17721/1728-2713.79.04.

5. Osipova E.B. Stability of equilibrium of a compressible hyperelastic hollow sphere. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2015. Vol. 56. Iss. 4. P. 679–687. https://doi.org/10.1134/S002189441504015X.

6. Feng B., Levitas V.I., Hemley R. J. Large elastoplasticity under static megabar pressures: Formulation and application to compression of samples in diamond anvil cells. *International Journal of Plasticity*. 2016. Vol. 84. P. 33–57. https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2016.04.017.

7. Yeung C., Ng C.-T. Nonlinear guided wave mixing in pipes for detection of material nonlinearity. *Journal of Sound and Vibration.* 2020. Vol. 485. P. 115541-1–115541-14. https://doi.org/10.1016/j.jsv.2020.115541.

8. Cho H., Hasanian M., Shan S., Lissenden C.J. Nonlinear guided wave technique for localized damage detection in plates with surface-bonded sensors to receive Lamb waves generated by shear-horizontal wave mixing. *NDT & E International*. 2019. Vol. 102. P. 35–46. https://doi.org/10.1016/j.ndteint.2018.10.011.

9. Hu X., Ng C.-T., Kotousov A. Early damage detection of metallic plates with one side exposed to water using the second harmonic generation of ultrasonic guided waves. *Thin-Walled Structures*. 2022. Vol. 176. P. 109284-1–109284-12. https://doi.org/10.1016/j.tws.2022.109284.

10. Payan C., Garnier V., Moysan J., Johnson P.A. Determination of third order elastic constants in a complex solid applying coda wave interferometry. *Applied Physics Letters*. 2009. Vol. 94. Iss. 1. Article No 011904. https://doi.org/10.1063/1.3064129.

11. Wei X., Fragneaud B., Marianetti C.A., Kysar J.W. Nonlinear elastic behavior of graphene: Ab initio calculations to continuum description. *Physical Review B*. 2009. Vol. 80. P. 205407-1–205407-8. https://doi.org/10.1103/PhysRevB.80.205407.

12. Jemiolo S., Franus A., Domanski W. Scope of application of the murnaghan hyperelastic model for elastomers. In: *Theoretical Foundations of Civil Engineering: Mechanics of Materials and Structures*. Eds. A. Szwed, I. Kamińska. Warsaw: Warsaw University of Technology Publishing House, 2019. Vol. 9. P. 145–159.

13. Ambroziak A. Application of the Murnaghan model in analysis of non-linear elastic material properties of PVC-coated fabric. *TASK Quarterly: Scientific Bulletin of Academic Computer Centre in Gdansk*. 2006. Vol. 10. Iss. 3. P. 253–265.

14. Shved O.L. Murnaghan's elastoplastic material model. *Mechanics of Solids*. 2019. Vol. 54. Iss. 5. P. 819–831. https://doi.org/10.3103/S0025654419050169.

15. Garbuzov F.E., Beltukov Y.M. Generalization of nonlinear Murnaghan elastic model for viscoelastic materials. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2024. Vol. 159. P. 104598-1–104598-11. https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2023.104598.

16. Rushchitsky J.J. On the constants of the nonlinear Murnaghan's hyperelastic material

model. *International Applied Mechanics*. 2016. Vol. 52. Iss. 5. P. 508–519. https://doi.org/10.1007/s10778-016-0771-5.

17. Lurie A.I. *Nonlinear Theory of Elasticity.* Amsterdam: North-Holland Publishing Co, 1990. 617 p.

18. Ватульян А.О. *Коэффициентные обратные задачи механики.* М.: Физматлит, 2019. 272 с.

19. Ватульян А.О., Сухов Д.Ю. Об одном методе определения параметров упругих потенциалов. *Экологический вестник научных центров ЧЭС*. 2012. Т. 9. №4. С. 27–32.

20. Yenigun B., Gkouti E., Barbaraci G., Czekanski A. Identification of hyperelastic material parameters of elastomers by reverse engineering approach. *Materials*. 2022. Vol. 15. Iss. 24. P. 8810-1 – 8810-14. https://doi.org/10.3390/ma15248810.

21. Slowik A., Kwasnicka H. Evolutionary algorithms and their applications to engineering problems. *Neural Computing and Applications*. 2020. Vol. 32. P. 12363–12379. https://doi.org/10.1007/s00521-020-04832-8.

22. SciPy 1.0: Fundamental algorithms for scientific computing in Python. *Nature Methods*. 2020. Vol. 17. P. 261–272. https://doi.org/10.1038/s41592-019-0686-2.

23. Карякин М.И., Егорова С.А. Вычисление коэффициентов определяющих соотношений нелинейно-упругих материалов с использованием эволюционных алгоритмов. *Изв. вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки*. 2023. №2. С. 4–14.

References

1. Murnaghan F.D. *Finite Deformation of an Elastic Solid.* New York. John Wiley & Sons. 1951. 140 p.

2. Karyakin M., Kalashnikov V., Shubchinskaya N. Nonlinear effects in a plane problem of the pure bending of an elastic rectangular panel. *Int. J. Eng. Sci*. 2014. Vol. 80. P. 90–105. https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2014.02.023.

3. Karyakin M.I., Obrezkov L.P. Ustoychivost tsilindra iz materiala Murnagana pri rastyazhenii, szhatii i razduvanii [Stability of a cylinder from Murnaghan material under stretching, compression and inflation]. *Problemy prochnosti i plastichnosti* [*Problems of Strength and Plasticity*]. 2019. Vol. 81. Iss. 1. P. 30–39 (In Russian).

4. Guliyev H.H. The features of the propagation of elastic waves in isotropic media at high and ultra-high pressures. *Vestnik of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Geology.* 2017. Vol. 79. Iss. 4. P. 27–34. DOI: 10.17721/1728-2713.79.04.

5. Osipova E.B. Stability of equilibrium of a compressible hyperelastic hollow sphere. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2015. Vol. 56. Iss. 4. P. 679–687. https://doi.org/10.1134/S002189441504015X.

6. Feng B., Levitas V.I., Hemley R. J. Large elastoplasticity under static megabar pressures: Formulation and application to compression of samples in diamond anvil cells. *Int. J. Plast.* 2016. Vol. 84. P. 33–57. https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2016.04.017.

7. Yeung C., Ng C.-T. Nonlinear guided wave mixing in pipes for detection of material nonlinearity. *J. Sound Vib*. 2020. Vol. 485. P. 115541-1–115541-14. https://doi.org/10.1016/j.jsv.2020.115541.

8. Cho H., Hasanian M., Shan S., Lissenden C.J. Nonlinear guided wave technique for localized damage detection in plates with surface-bonded sensors to receive Lamb waves generated by shear-horizontal wave mixing. *NDT & E International*. 2019. Vol. 102. P. 35–46. https://doi.org/10.1016/j.ndteint.2018.10.011.

9. Hu X., Ng C.-T., Kotousov A. Early damage detection of metallic plates with one side exposed to water using the second harmonic generation of ultrasonic guided waves. *Thin-Walled Struct*. 2022. Vol. 176. P. 109284-1–109284-12. https://doi.org/10.1016/j.tws.2022.109284.

10. Payan C., Garnier V., Moysan J., Johnson P.A. Determination of third order elastic constants in a complex solid applying coda wave interferometry. *Appl. Phys. Lett*. 2009. Vol. 94. Iss. 1. Article No 011904. https://doi.org/10.1063/1.3064129.

11. Wei X., Fragneaud B., Marianetti C.A., Kysar J.W. Nonlinear elastic behavior of graphene: Ab initio calculations to continuum description. *Phys. Rev. B*. 2009. Vol. 80. P. 205407-1–205407-8. https://doi.org/10.1103/PhysRevB.80.205407.

12. Jemiolo S., Franus A., Domanski W. Scope of application of the murnaghan hyperelastic model for elastomers. In: *Theoretical Foundations of Civil Engineering: Mechanics of Materials and Structures*. Eds. A. Szwed, I. Kamińska. Warsaw. Warsaw University of Technology Publishing House. 2019. Vol. 9. P. 145–159.

13. Ambroziak A. Application of the Murnaghan model in analysis of non-linear elastic material properties of PVC-coated fabric. *TASK Quarterly: Scientific Bulletin of Academic Computer Centre in Gdansk*. 2006. Vol. 10. Iss. 3. P. 253–265.

14. Shved O.L. Murnaghan's elastoplastic material model. *Mechanics of Solids*. 2019. Vol. 54. Iss. 5. P. 819–831. https://doi.org/10.3103/S0025654419050169.

15. Garbuzov F.E., Beltukov Y.M. Generalization of nonlinear Murnaghan elastic model for viscoelastic materials. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2024. Vol. 159. P. 104598-1–104598-11. https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2023.104598.

16. Rushchitsky J.J. On the constants of the nonlinear Murnaghan's hyperelastic material model. *Int. Appl. Mech*. 2016. Vol. 52. Iss. 5. P. 508–519. https://doi.org/10.1007/s10778-016-0771-5.

17. Lurie A.I. *Nonlinear Theory of Elasticity*. Amsterdam. North-Holland Publishing Co. 1990. 617 p.

18. Vatulyan A.O. *Koeffitsientnye obratnye zadachi mekhaniki* [*Inverse Coefficient Problems in Mechanics*]. Moscow. Fizmatlit Publ. 2019. 272 p. (In Russian).

19. Vatulyan A.O., Sukhov D.Yu. Ob odnom metode opredeleniya parametrov uprugikh potentsialov [On a method for determining the parameters of elastic potentials]. *Ekologicheskiy vestnik nauchnykh tsentrov ChES* [*Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*]. 2012. Vol. 9. No 4. P. 27–32 (In Russian).

20. Yenigun B., Gkouti E., Barbaraci G., Czekanski A. Identification of hyperelastic material parameters of elastomers by reverse engineering approach. *Materials*. 2022. Vol. 15. Iss. 24. P. 8810-1–8810-14. https://doi.org/10.3390/ma15248810.

21. Slowik A., Kwasnicka H. Evolutionary algorithms and their applications to engineering problems. *Neural Computing and Applications*. 2020. Vol. 32. P. 12363–12379. https://doi.org/10.1007/s00521-020-04832-8.

22. SciPy 1.0: Fundamental algorithms for scientific computing in Python. *Nature Methods*. 2020. Vol. 17. P. 261–272. https://doi.org/10.1038/s41592-019-0686-2.

23. Karyakin M.I., Egorova S.A. Vychislenie koeffitsientov opredelyayushchikh sootnosheniy nelineyno-uprugikh materialov s ispolzovaniem evolyutsionnykh algoritmov [Parameter identification for constitutive relations of a nonlinear-elastic materials using evolutionary algorithms]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Severo-Kavkazskiy region. Estestvennye nauki* [*Bulletin of Higher Educational Institutions. North Caucasus Region. Natural Science*]. 2023. No 2. P. 4–14 (In Russian).

PARAMETER IDENTIFICATION FOR THE NONLINEAR-ELASTIC MURNAGHAN MODEL BASED ON EVOLUTIONARY ALGORITHMS

Karyakin M.I.[1,2]**, Egorova S.A.**[1]

[1]*Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russian Federation*
[2]*Southern Mathematical Institute – Branch of Vladikavkaz Scientific Center, Russian Academy of Sciences, Vladikavkaz, Republic of North Ossetia – Alania, Russian Federation*

karyakin@sfedu.ru, sofegorova@sfedu.ru

Received by the Editor 2024/07/15

The aim of the study is to develop and test a computational scheme for identifying the material parameters of the Murnaghan model, which describes the nonlinear elastic properties of solid bodies based on experimental data obtained through traditional static tests for tension, torsion, and bending of samples. Instead of real experiments, their computational models based on the application of the semi-inverse method of nonlinear elasticity theory are used. The input data for the identification process consists of loading diagrams constructed based on numerical studies of chains of nonlinear boundary value problems or, in the simplest case, uniaxial tension problems, through analytical investigation of nonlinear algebraic equations. Three types of diagrams are considered: the dependence of the rod elongation on the tensile force, the dependence of the angle of the section of a twisted shaft on the torque, and the dependence of the change in the plate thickness on the bending moment. All diagrams are constructed under the assumption of finite deformations; the last of the three diagrams is associated with the manifestation of extremely nonlinear material properties. To verify the stability of the developed scheme, artificially noisy versions of loading diagrams are also used for identification. The computational scheme for material parameters identification is based on the solution of the problem of minimizing the mean square deviation between the loading diagram constructed for these parameters and the "experimental" diagram. The relief of the minimized function is quite complex for gradient methods; therefore, a differential evolution algorithm was chosen to find the minimum. Its application allows one to achieve satisfactory retrieving of the nonlinear elastic model, including cases of noisy input data. At the same time, it was found that the sensitivity of the considered deformation models to material parameters can vary significantly, up to the impossibility of identifying one of the parameters based on the chosen mechanical experiment.

Keywords: nonlinear elasticity, large strains, semi-inverse method, Murnaghan material, inverse problems, evolutional algorithm.