УДК 539.3 DOI: 10.32326/1814-9146-2025-87-1-113-121

УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ ТОНКОСТЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ В ДВУМЕРНОЙ ПОСТАНОВКЕ НА ОСНОВЕ СМЕШАННОГО МКЭ

Клочков М.Ю.[1], **Николаев А.П.**[2], **Клочков Ю.В.**[2], **Вахнина О.В.**[2], **Дюкина Н.С.**[3]

[1]*Волгоградский государственный технический университет, Волгоград, Российская Федерация*
[2]*Волгоградский государственный аграрный университет, Волгоград, Российская Федерация*
[3]*Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Российская Федерация*

klotchkov@bk.ru

Поступила в редакцию 07.11.2024

Изложен алгоритм получения матрицы жесткости смешанного конечного элемента в форме четырехугольного фрагмента срединной поверхности тонкостенной конструкции. За узловые неизвестные приняты кинематические величины (приращения перемещений и их первые производные) и величины деформационные (приращения деформаций и приращения искривлений срединной поверхности). Для аппроксимации кинематических величин внутренней точки конечного элемента принимались бикубические функции формы с полиномами Эрмита третьей степени. Приращения деформаций и приращения искривлений аппроксимировались через узловые неизвестные билинейными функциями формы. Физическая нелинейность реализована на основе теории пластического течения. Компоненты тензора приращений упругих деформаций через компоненты тензора приращений напряжений определялись в криволинейной системе координат на основе соотношений механики сплошной среды с учетом гипотезы Кирхгофа – Лява. Компоненты тензора приращений пластических деформаций получены в криволинейной системе координат на основе гипотезы теории пластического течения об их пропорциональности компонентам девиатора напряжений при прямолинейности нормали к срединной поверхности. Для получения матрицы жесткости разработанного конечного элемента использовался нелинейный функционал, основанный на равенстве на шаге нагружения возможных и действительных работ заданных нагрузок и возникающих внутренних усилий, с заменой действительной работы внутренних усилий разностью полной и дополнительной работы внутренних усилий на шаге нагружения. После подстановки аппроксимирующих выражений в нелинейный смешанный функционал и выполнения минимизации по узловым неизвестным образуются две системы алгебраических уравнений относительно искомых узловых неизвестных. На основе этих систем алгебраических уравнений строится матрица жесткости конечного элемента размером 36×36. Матрица жесткости структуры формируется обычным для метода конечных элементов способом. На численном примере показана эффективность разработанного конечного элемента.

Ключевые слова: смешанный функционал, четырехугольный конечный элемент, тензорно-векторная интерполяция искомых величин.

Введение

Из-за наличия в реальных инженерных конструкциях зон концентрации напряжений актуальной является задача определения напряженно-деформированного состояния (НДС) в элементах инженерных сооружений при упругопластическом деформировании [1–4]. Решение таких задач оказалось возможным только на основе численных методов расчета [5–9]. Среди численных методов расчета конструктивных элементов широкое применение получил метод конечных элементов (МКЭ) в формулировке метода перемещений [10–13].

При использовании МКЭ в такой формулировке в качестве неизвестных принимаются кинематические величины (приращения перемещений и их производные различных порядков) [14–18]. Для получения линейных систем алгебраических уравнений применяется вариационный функционал Лагранжа. Недостатком МКЭ в этой формулировке является отсутствие совместности в значениях производных перемещений на границах между элементами, а следовательно, и в значениях напряжений и деформаций.

Для преодоления этого недостатка актуальной задачей становится задача разработки МКЭ в смешанной формулировке, когда за узловые неизвестные принимаются кинематические величины (приращения перемещений и, возможно, их первые производные) и силовые (напряжения) или деформационные (приращения деформаций и искривлений) параметры. При расчетах за пределом упругости вводятся пластические множители [19–22]. Для получения системы алгебраических уравнений используются смешанные функционалы.

В настоящей статье в качестве конечного элемента принят четырехугольный фрагмент срединной поверхности оболочки с двумя полями узловых неизвестных: кинематические величины (приращения перемещений и их первые производные) и деформационные величины (деформации и искривления срединной поверхности). Для получения алгебраических уравнений разработан нелинейный смешанный функционал.

1. Определяющие уравнения теории пластического течения

Согласно теории течения, полные приращения деформаций $\Delta\varepsilon^{\zeta}_{\alpha\beta}$ в произвольном слое тонкостенной конструкции равны сумме приращений упругих деформаций $\Delta\varepsilon^{\zeta l}_{\alpha\beta}$ и приращений пластических деформаций $\Delta\varepsilon^{\zeta p}_{\alpha\beta}$ [1, 2]

$$\Delta\varepsilon^{\zeta}_{\alpha\beta} = \Delta\varepsilon^{\zeta l}_{\alpha\beta} + \Delta\varepsilon^{\zeta p}_{\alpha\beta} = \Delta\sigma_{\alpha\beta}\frac{1}{2\mu} - g_{\alpha\beta}\frac{\lambda}{2\mu}\frac{1-2\upsilon}{E}P(\Delta\sigma) +$$

$$+\frac{3}{2\sigma_i}\left(\sigma_{\alpha\beta} - \frac{1}{3}g_{\alpha\beta}P(\sigma)\right)\left[\frac{1}{E_K} - \frac{1}{E_1}\right]\Delta\sigma_i, \qquad (1)$$

где λ, μ – параметры Ламе; E – модуль упругости материала; υ – коэффициент поперечной деформации; $g_{\alpha\beta}$ – компонента метрического тензора; $P(\sigma)$, $P(\Delta\sigma)$ – первые инварианты тензоров напряжений и их приращений; E_1 – модуль начального участка диаграммы деформирования; E_K – касательный модуль диаграммы деформирования;

$$\Delta\sigma_i = \frac{\partial\sigma_i}{\partial\sigma_{\rho\tau}}\Delta\sigma_{\rho\tau} = \underset{1\times3}{\{S\}}^{\mathrm{T}}\underset{3\times1}{\{\Delta\sigma\}}$$

– приращение интенсивности напряжений ($\sigma_{\rho\tau}$ – обозначение компонент тензора напряжений σ_{11}, σ_{22}, σ_{12});

$$\underset{1\times3}{\{\Delta\sigma\}}^{\mathrm{T}} = \left\{\Delta\sigma_{11}\;\; \Delta\sigma_{22}\;\; \Delta\sigma_{12}\right\}.$$

Определяющие уравнения (1) представляются в матричном виде

$$\underset{3\times1}{\left\{\Delta\varepsilon^{\zeta}\right\}} = \underset{3\times3}{\left[C^{p}\right]}\underset{3\times1}{\left\{\Delta\sigma^{\alpha\beta}\right\}}, \tag{2}$$

$$\underset{1\times3}{\left\{\Delta\varepsilon^{\zeta}\right\}}^{\mathrm{T}} = \left\{\Delta\varepsilon_{11}^{\zeta}\;\; \Delta\varepsilon_{22}^{\zeta}\;\; 2\Delta\varepsilon_{12}^{\zeta}\right\},\quad \underset{1\times3}{\left\{\Delta\sigma^{\zeta}\right\}}^{\mathrm{T}} = \left\{\Delta\sigma_{11}^{\zeta}\;\; \Delta\sigma_{22}^{\zeta}\;\; \Delta\sigma_{12}^{\zeta}\right\}.$$

2. Матрица жесткости конечного элемента

Для конечного элемента в форме четырехугольного фрагмента с узлами i, j, k и l срединной поверхности тонкостенной конструкции в качестве узловых неизвестных приняты приращения перемещений и их производных (в локальных координатах ξ, η и криволинейных координатах θ^1, θ^2), а также приращения деформаций и искривлений срединной поверхности:

$$\underset{1\times36}{\left\{\Delta v_y^{S}\right\}}^{\mathrm{T}} = \left\{\Delta v^{1i}\;\; \Delta v^{1j}\;\; \Delta v^{1k}\;\; \Delta v^{1l}\;\; \Delta v^{1i}_{,\xi}\ldots\Delta v^{1l}_{,\xi}\;\Delta v^{1i}_{,\eta}\ldots\Delta v^{1l}_{,\eta}\;\Delta v^{2i}\ldots\Delta v^{2l}_{,\eta}\;\; \Delta v^{i}\ldots\Delta v^{l}_{,\eta}\right\},$$

$$\underset{1\times36}{\left\{\Delta v_y^{g}\right\}}^{\mathrm{T}} = \left\{\Delta v^{1i}\;\Delta v^{1j}\;\; \Delta v^{1k}\;\; \Delta v^{1l}\;\; \Delta v^{1i}_{,\theta^1}\ldots\Delta v^{1l}_{,\theta^1}\;\Delta v^{1i}_{,\theta^2}\ldots\Delta v^{1l}_{,\theta^2}\;\Delta v^{2i}\ldots\Delta v^{2l}_{,\theta^2}\;\Delta v^{i}\ldots\Delta v^{l}_{,\theta^2}\right\}, \tag{3}$$

$$\underset{1\times24}{\left\{\Delta E_y\right\}}^{\mathrm{T}} = \left\{\Delta\varepsilon_{11}^{i}\;\Delta\varepsilon_{22}^{i}\;\;2\Delta\varepsilon_{12}^{i}\;\;\Delta\aleph_{11}^{i}\;\Delta\aleph_{22}^{i}\;2\Delta\aleph_{12}^{i}\ldots\Delta\varepsilon_{11}^{l}\;\Delta\varepsilon_{22}^{l}\;\;2\Delta\varepsilon_{12}^{l}\;\;\Delta\aleph_{11}^{l}\;\Delta\aleph_{22}^{l}\;2\Delta\aleph_{12}^{l}\right\}.$$

Аппроксимация приращений искомых величин в матричных выражениях:

$$\underset{3\times1}{\{\Delta v\}} = \underset{3\times36}{[A]}\underset{36\times1}{\left\{\Delta v_y^{S}\right\}},\quad \underset{6\times1}{\left\{\Delta\varepsilon^{a}\right\}} = \underset{6\times24}{[H]}\underset{24\times1}{\left\{\Delta\varepsilon_y\right\}}, \tag{4}$$

$$\underset{6\times1}{\left\{\Delta\varepsilon_a^{g}\right\}} = \underset{6\times3}{[L]}\underset{3\times1}{\{\Delta v\}} = \underset{6\times3}{[L]}\underset{3\times36}{[A]}\underset{36\times1}{\left\{\Delta v_y^{S}\right\}} = \underset{6\times36}{[B]}\underset{36\times1}{\left\{\Delta v_y^{S}\right\}},$$

$\underset{1\times3}{\{\Delta v\}}^{\mathrm{T}} = \left\{\Delta v^1\;\; \Delta v^2\;\; \Delta v\right\}$, $\underset{6\times1}{\left\{\Delta\varepsilon^{a}\right\}}$, $\underset{6\times1}{\left\{\Delta\varepsilon_a^{g}\right\}}$ – столбцы приращений деформационных параметров, получаемые через узловые неизвестные $\underset{24\times1}{\left\{\Delta\varepsilon_y\right\}}$ и $\underset{36\times1}{\left\{\Delta v_y\right\}}$ соответственно; $\underset{6\times3}{[L]}$ – матрица алгебраических и дифференциальных операторов, $[H]$ – матрица аппроксимирующих функций для компонент тензора приращений деформаций $\Delta\varepsilon_{11}$, $\Delta\varepsilon_{22}$, $\Delta\varepsilon_{12}$; $[A]$ – матрица аппроксимирующих функций для компонент вектора перемещений Δv^1, Δv^2, Δv; $[B]$ – матрица, выражающая приращения деформаций через узловые приращения компонент вектора перемещения, которая компонуется на основании соотношений Коши.

Для получения матрицы жесткости конечного элемента использовался нелинейный смешанный функционал в виде

$$\Phi_{CM} = \int\limits_V \left[\underset{1\times6}{\{\sigma^{ij}\}^{\mathrm{T}}} + \underset{1\times6}{\{\Delta\sigma^{ij}\}^{\mathrm{T}}} \right] \underset{6\times1}{\{\Delta\varepsilon_{ij}^{g}\}}\, dV - \frac{1}{2}\int\limits_V \underset{1\times6}{\{\sigma^{ij}\}^{\mathrm{T}}}\, \underset{6\times1}{\{\Delta\varepsilon_{ij}^{a}\}}\, dV -$$

$$- \int\limits_F \underset{1\times3}{\{\Delta v\}^{\mathrm{T}}} \left[\underset{3\times1}{\{q\}} + \frac{1}{2}\underset{3\times1}{\{\Delta q\}} \right] dF. \qquad (5)$$

При использовании гипотезы Кирхгофа – Лява и аппроксимирующих соотношений (3) функционал (5) преобразуется к выражению

$$\Phi_{CM} = \underset{1\times36}{\{\Delta v\}^{\mathrm{T}}}\, \underset{36\times1}{\{f_\sigma\}} + \underset{1\times24}{\{\Delta\varepsilon_y\}^{\mathrm{T}}}\, \underset{24\times36}{[Q]}\, \underset{36\times1}{\{\Delta v_y\}} -$$

$$-\frac{1}{2}\underset{1\times24}{\{\Delta\varepsilon_y\}^{\mathrm{T}}}\, \underset{24\times24}{[Y]}\, \underset{24\times1}{\Delta\varepsilon_y\}} - \underset{1\times36}{\{\Delta v_y\}^{\mathrm{T}}}\, \underset{36\times1}{\{f_q\}} - \underset{1\times36}{\{\Delta v_y\}^{\mathrm{T}}}\, \underset{36\times1}{\{f_{\Delta q}\}}, \qquad (6)$$

где $[Q]$, $[Y]$ – численно определяемые интегральные матрицы по толщине оболочки и площади конечного элемента; $\{f_\sigma\}$, $\{f_q\}$ – столбцы внутренних усилий и заданной нагрузки за j шагов нагружения; $\{f_{\Delta q}\}$ – столбец узловых усилий на рассматриваемом $(j+1)$-м шаге нагружения.

Минимизация функционала (6) по узловым неизвестным приводит к системе уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Phi_{CM}}{\partial\{\Delta\varepsilon_y\}} &= \underset{24\times36}{[Q]}\, \underset{36\times1}{\{\Delta v\}} - \underset{24\times24}{[Y]}\, \underset{24\times1}{\{\Delta\varepsilon_y\}} = 0, \\ \frac{\partial\Phi_{CM}}{\partial\{\Delta v_y\}} &= \underset{36\times1}{[f_\sigma]} + \underset{36\times24}{[Q]^{\mathrm{T}}}\, \underset{24\times1}{\{\Delta\varepsilon_y\}} - \underset{36\times1}{\{f_q\}} - \underset{36\times1}{\{f_{\Delta q}\}} = 0, \end{aligned} \qquad (7)$$

решение которой приводит к получению матрицы жесткости конечного элемента

$$\underset{36\times36}{[K]}\, \underset{36\times1}{\{\Delta v_y\}} = \underset{36\times1}{\{f_{\Delta q}\}} + \underset{36\times1}{\{R\}}, \qquad (8)$$

где $\underset{36\times36}{[K]} = \underset{36\times24}{[Q]^{\mathrm{T}}}\, \underset{24\times24}{[Y]^{\mathrm{T}}}\, \underset{24\times36}{[Q]}$ – матрица жесткости конечного элемента, $\underset{36\times1}{\{R\}} = \underset{36\times1}{\{f_q\}} -$ $- \underset{36\times1}{\{f_\sigma\}}$ – невязка Рафсона [23, 24] на рассматриваемом шаге нагружения. Матрица жесткости всей конструкции получается суммированием матриц (8).

После определения кинематических узловых неизвестных в результате решения алгебраических уравнений для рассматриваемой конструкции по уравнениям (7) находятся деформационные параметры и выполняется вычисление параметров прочности.

3. Численный эксперимент

В качестве примера была рассчитана цилиндрическая оболочка, жестко защемленная по правому торцу и свободная от закреплений по левому торцу, нагружаемая внутренним давлением интенсивностью $q = 5$ МПа. Исходные данные имели следующие значения: длина образующей $L = 0{,}8$ м; радиус цилиндра $R = 0{,}9$ м; толщина стенки $h = 0{,}02$ м; модуль упругости $E = 74{,}9$ ГПа; коэффициент Пуассона $\nu = 0{,}32$. Диаграмма деформирования принята в виде ломаной из двух звеньев, на этапе упрочнения имеющей вид $\sigma_i = 200 + 18087\,(\varepsilon_i - 0{,}023496)$ МПа.

Вследствие осевой симметрии оболочка моделировалась одной лентой конечных элементов, ориентированной вдоль образующей. Результаты расчета при последовательном сгущении сетки дискретизации и фиксированном числе шагов нагружения $n_ш = 32$ позволили сделать вывод об удовлетворительной сходимости вычислительного процесса.

Зафиксировав сетку узлов дискретизации 2×61 и последовательно увеличивая количество шагов нагружения, можно проследить сходимость вычислительного процесса в зависимости от количества этапов нагружения в таблице 1, в которой приведены численные значения нормальных напряжений на опорном и свободном торцах на внутренней (in) и наружной (out) поверхностях оболочки.

Таблица 1

Сечение	Напряжения, МПа	Количество шагов нагружения					Аналитическое значение, МПа
		32	42	52	62	72	
Опорное	σ_{11}^{in}	322,3	322,1	321,9	322,5	323,1	–
	σ_{11}^{out}	–322,2	–322,1	–321,7	–322,5	–323,1	–
	σ_{22}^{in}	131,6	134,9	136,4	131,6	133,2	–
	σ_{22}^{out}	–131,0	–135,0	–134,4	–131,8	–134,5	–
Свободный торец	σ_{11}^{in}	0,026	0,017	0,014	0,012	0,011	0
	σ_{11}^{out}	0,028	0,019	0,016	0,015	0,014	
	σ_{22}^{in}	225,3	225,4	225,4	225,4	225,4	225,0
	σ_{22}^{out}	223,8	223,8	223,8	223,8	223,8	

Анализ численных значений нормальных напряжений, представленных в таблице 1, позволяет сделать вывод о стабильности вычислительного процесса определения прочностных параметров НДС оболочки при увеличении числа шагов последовательного нагружения. Также следует отметить соответствие численных значений напряжений на свободном торце цилиндра аналитическим значениям, полученным из условия статического равновесия: $\sigma_{11} = 0$, $\sigma_{22} = qR/h = 5 \cdot 0{,}9/0{,}02 = 225$ МПа.

На рис. 1 представлена эпюра нормальных напряжений σ_{11} в опорном жестко защемленном сечении оболочки при 62 шагах нагружения.

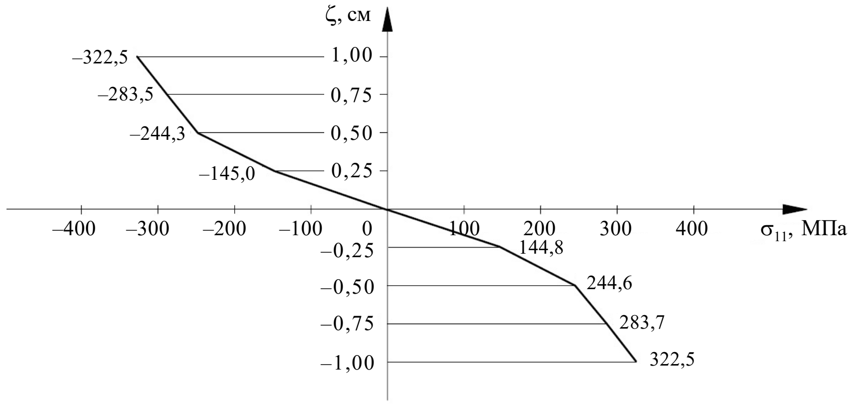

Рис. 1. Эпюра нормальных напряжений σ_{11} в опорном сечении оболочки

Анализ эпюры позволяет констатировать выраженный нелинейный характер напряженного состояния оболочки в наиболее нагруженном сечении и выполнение условия равновесия оболочки: сумма проекций всех сил на продольную ось x равна нулю.

Заключение

Основываясь на анализе результатов решения тестовой задачи, можно сделать вывод о том, что разработанный алгоритм упругопластического расчета тонкостенных конструкций из оболочек позволяет получать адекватную картину НДС такого рода объектов с приемлемой для инженерных расчетов точностью.

Список литературы

1. Малинин Н.Н. *Прикладная теория пластичности и ползучести.* М.: Изд-во «Юрайт», 2024. 402 с.

2. Седов Л.И. *Механика сплошной среды*. М.: Наука, 1970. Т. 1. 488 с.

3. Зубчанинов В.Г. *Механика сплошных деформируемых сред.* Тверь: ТГТУ, 2000. 703 с.

4. Ramachandran V., Gupta N.K. Energy absorption characteristics of metallic and composite shells. *Defence Science Journal.* 2003. Vol. 53. Iss. 2. P. 127–138. DOI: 10.14429/dsj.53.2137.

5. Zhao G., Cho Ch. On impact damage of composite shells by a low-velocity projectile. *Journal of Composite Materials.* 2004. Vol. 38. Iss. 14. P. 1231–1254. DOI: 10.1177/0021998 304042084.

6. Петров В.В., Кривошеин И.В. *Методы расчета конструкций из нелинейно деформируемого материала.* М.: Изд-во АСВ, 2009. 208 с.

7. Баженов В.Г., Казаков Д.А., Кибец А.И., Нагорных Е.В., Самсонова Д.А. Постановка и численное решение задачи потери устойчивости упругопластических оболочек вращения с упругим заполнителем при комбинированных осесимметричных нагружениях с кручением. *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*. 2022. №3. С. 95–106. https://doi.org/10.15593/perm.mech/2022.3.10.

8. Баженов В.Г., Казаков Д.А., Осетров С.Л., Осетров Д.Л., Рябов А.А. Анализ предельных состояний цилиндрических упругопластических оболочек при растяжении и комбинированном нагружении внутренним давлением и растяжением. *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*. 2022. №2. С. 39–48. https://doi.org/10.15593/perm.mech/2022.2.04.

9. Паймушин В.Н. Нелинейная теория трехслойных оболочек с трансверсально-мягким заполнителем, имеющих участки расслоений и контурную подкрепляющую диафрагму. *Прикладная математика и механика*. 2018. Т. 82. №1. С. 44–57.

10. Бате К.Ю. *Метод конечных элементов*. М.: Физматлит, 2010, 1022 с.

11. Голованов А.И., Тюленева О.Н., Шигабутдинов А.Ф. *Метод конечных элементов в статике и динамике тонкостенных конструкций*. М.: Физматлит, 2006. 391 с.

12. Левин В.А., Вершинин А.В. *Нелинейная вычислительная механика прочности. В 5 т. Т. 2. Численные методы. Параллельные вычисления на ЭВМ.* М.: Физматлит, 2015. 544 с.

13. Левин В.А. *Нелинейная вычислительная механика прочности. В 5 т. Т. 1. Модели и методы.* М.: Физматлит, 2015. 456 с.

14. Хайруллин Ф.С., Сахбиев О.М. О расчете упругопластических деформаций вариационным методом на основе функций с конечными носителями. *Вестник технологического университета*. 2021. Т. 24. №4. С. 102–106.

15. Гуреева Н.А., Киселева Р.З., Киселев А.П., Николаев А.П., Клочков Ю.В. Объемный элемент с векторной аппроксимацией искомых величин для нелинейного расчета оболочки вращения. *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений.* 2022. Т. 18. №3. С. 228–241. https://doi.org/10.22363/1815-5235-2022-18-3-228-241.

16. Сагдатуллин М.К. Численное моделирование процессов нелинейного деформирования оболочек средней толщины. *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2023. Т. 19. №2. С. 130–148. https://doi.org/10.22363/1815-5235-2023-19-2-130-148.

17. Sultanov L.U. Analysis of finite elasto-plastic strains: integration algorithm and numerical examples. *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2018. Vol. 39. Iss. 9. P. 1478–1483. https://doi.org/10.1134/S1995080218090056.

18. Maslennikov A.M., Kobelev E.A., Maslennikov N.A. Solution of stability problems by the finite element method. *Bulletin of Civil Engineers*. 2020. Vol. 2. Iss. 79. P. 68–74.

19. Liguori F., Madeo A., Garcea G. A mixed finite-element formulation for the elasto-plastic analysis of shell structures. *Materials Research Proceedings*. 2023. Vol. 26. P. 227–232. https://doi.org/10.21741/9781644902431-37.

20. Liguori F., Madeo A., Garcea G. A dual decomposition of the closest point projection in incremental elasto-plasticity using a mixed shell finite element. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2022. Vol. 123. Iss. 24. P. 6243–6266. https://doi.org/10.1002/nme.7112.

21. Madeo A., Liguori F., Zucco G. et al. An efficient isostatic mixed shell element for coarse mesh solution. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2021. Vol. 122. Iss. 1. P. 82–121. https://doi.org/10.1002/nme.6526.

22. Cavalcante E.L.B., Neto E.L. A pseudo-equilibrium finite element for limit analysis of Reissner – Mindlin plates. *Applied Mathematical Modelling*. 2021. Vol. 96. P. 336–354. https://doi.org/10.1016/j.apm.2021.03.004.

23. Shi G., Liu X.L. Multi-parameter accelerated modified Newton – Raphson methods for rigid-plastic FE analysis. *Acta Mechanica Solida Sinica*. 2002. Vol. 15. Iss. 4. P. 323–331.

24. Liu X.-L., Lam Y.C., Thomson P.F. Single parameter accelerated modified Newton – Raphson methods for rigid/plastic FE analysis. *Journal of Materials Processing Technology*. 2002. Vol. 123. Iss. 3. P. 385–392. DOI: 10.1016/S0924-0136(01)01199-2.

References

1. Malinin N.N. *Prikladnaya teoriya plastichnosti i polzuchesti* [*Applied Theory of Plasticity and Creep*]. Moscow. Yurayt Publ. 2024. 402 p. (In Russian).

2. Sedov L.I. *Mekhanika sploshnoy sredy* [*Continuum Mechanics*]. Moscow. Nauka Publ. 1970. Vol. 1. 488 p. (In Russian).

3. Zubchaninov V.G. *Mekhanika sploshnykh deformiruemykh sred* [*Mechanics of Continuous Deformable Media*]. Tver. Tverskoy gosudarstvenniy tekhnicheskiy universitet Publ. 2000. 703 p. (In Russian).

4. Ramachandran V., Gupta N.K. Energy absorption characteristics of metallic and composite shells. *Def. Sci. J.* 2003. Vol. 53. Iss. 2. P. 127–138. DOI: 10.14429/dsj.53.2137.

5. Zhao G., Cho Ch. On impact damage of composite shells by a low-velocity projectile. *J. Compos. Mater.* 2004. Vol. 38. Iss. 14. P. 1231–1254. DOI: 10.1177/0021998304042084.

6. Petrov V.V., Krivoshein I.V. *Metody rascheta konstruktsiy iz nelineyno deformiruemogo materiala* [*Methods for Calculating Structures Made of Nonlinearly Deformable Material*]. Moscow. ASV Publ. 2009. 208 p. (In Russian).

7. Bazhenov V.G., Kazakov D.A., Kibec A.I., Nagornykh E.V., Samsonova D.A. Postanovka i chislennoe reshenie zadachi poteri ustoychivosti uprugoplasticheskikh obolochek vrashcheniya s uprugim zapolnitelem pri kombinirovannykh osesimmetrichnykh nagruzheniyakh s krucheniem [Formulation and numerical solution of the stability loss problem of elastic-plastic shells of revolution with an elastic filler under combined axisymmetric and torsional loadins]. *Vestnik Permskogo natsionalnogo issledovatelskogo politekhnicheskogo universiteta. Mekhanika* [*PNRPU Mechanics Bulletin*]. 2022. No 3. P. 95–106 (In Russian).

8. Bazhenov V.G., Kazakov D.A., Osetrov S.L., Osetrov D.L., Ryabov A.A. Analiz predelnykh sostoyaniy tsilindricheskikh uprugoplasticheskikh obolochek pri rastyazhenii i kombinirovannom nagruzhenii vnutrennim davleniem i rastyazheniem [Analysis of the limiting states of cylindrical elastic-plastic shells under tension and combined loading by internal pressure and tension]. *Vestnik Permskogo natsionalnogo issledovatelskogo politekhnicheskogo universiteta. Mekhanika* [*PNRPU Mechanics Bulletin*]. 2022. No 2. P. 39–48 (In Russian).

9. Paimushin V.N. Nonlinear theory of sandwich shells with a transversely soft core containing delamination zones and edge support diaphragm. *Mechanics of Solids*. 2018. Vol. 53. No 5. P. 76–87. DOI: 10.3103/S0025654418030111.

10. Bathe K.J. *Finite Element Procedures*. New Jersey. Prentice Hall. 1996. 1037 p.

11. Golovanov A.I., Tyuleneva O.N., Shigabutdinov A.F. *Metod konechnykh elementov v*

statike i dinamike tonkostennykh konstruktsiy [*Finite Element Method in the Statics and Dynamics of Thin-Walled Structures*]. Moscow. Fizmatlit Publ. 2006. 391 p. (In Russian).

12. Levin V.A., Vershinin A.V. *Nelineynaya vychislitelnaya mekhanika prochnosti. V 5 t. T. 2. Chislennye metody. Parallelnye vychisleniya na EVM* [*Nonlinear Computational Strength Mechanics. In 5 vols. Vol. 2. Numerical Methods. Parallel Computing on a Computer*]. Moscow. Fizmatlit Publ. 2015. 544 p. (In Russian).

13. Levin V.A. *Nelineynaya vychislitelnaya mekhanika prochnosti. V 5 t. T. 1. Modeli i metody* [*Nonlinear Computational Strength Mechanics. In 5 vols. Vol. 1. Models and Methods*]. Moscow. Fizmatlit Publ. 2015. 456 p. (In Russian).

14. Khayrullin F.S., Sakhbiev O.M. O raschete uprugoplasticheskikh deformatsiy variatsionnym metodom na osnove funktsiy s konechnymi nositelyami [Calculation of the elastoplastic deformations by the variational method based on functions with finite carriers]. *Vestnik tekhnologicheskogo universiteta* [*Herald of Technological University*]. 2021. Vol. 24. No 4. P. 102–106 (In Russian).

15. Gureeva N.A., Kiseleva R.Z., Kiselev A.P., Nikolaev A.P., Klochkov Yu.V. Obemnyy element s vektornoy approksimatsiey iskomykh velichin dlya nelineynogo rascheta obolochki vrashcheniya [Analytical and numerical methods of analysis of structures]. *Stroitelnaya mekhanika inzhenernykh konstruktsiy i sooruzheniy* [*Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*]. 2022. Vol. 18. No 3. P. 228–241 (In Russian).

16. Sagdatullin M.K. Chislennoe modelirovanie protsessov nelineynogo deformirovaniya obolochek sredney tolshchiny [Numerical modeling of nonlinear deformation processes for shells of medium thickness]. *Stroitelnaya mekhanika inzhenernykh konstruktsiy i sooruzheniy* [*Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*]. 2023. Vol. 19. No 2. P. 130–148 (In Russian).

17. Sultanov L.U. Analysis of finite elasto-plastic strains: integration algorithm and numerical examples. *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2018. Vol. 39. Iss. 9. P. 1478–1483. https://doi.org/10.1134/S1995080218090056.

18. Maslennikov A.M., Kobelev E.A., Maslennikov N.A. Solution of stability problems by the finite element method. *Bulletin of Civil Engineers*. 2020. Vol. 2. Iss. 79. P. 68–74.

19. Liguori F., Madeo A., Garcea G. A mixed finite-element formulation for the elasto-plastic analysis of shell structures. *Materials Research Proceedings*. 2023. Vol. 26. P. 227–232. https://doi.org/10.21741/9781644902431-37.

20. Liguori F., Madeo A., Garcea G. A dual decomposition of the closest point projection in incremental elasto-plasticity using a mixed shell finite element. *Int. J. Numer. Methods Eng.* 2022. Vol. 123. Iss. 24. P. 6243–6266. https://doi.org/10.1002/nme.7112.

21. Madeo A., Liguori F., Zucco G. et al. An efficient isostatic mixed shell element for coarse mesh solution. *Int. J. Numer. Methods Eng.* 2021. Vol. 122. Iss. 1. P. 82–121. https://doi.org/10.1002/nme.6526.

22. Cavalcante E.L.B., Neto E.L. A pseudo-equilibrium finite element for limit analysis of Reissner – Mindlin plates. *Appl. Math. Model*. 2021. Vol. 96. P. 336–354. https://doi.org/10.1016/j.apm.2021.03.004.

23. Shi G., Liu X.L. Multi-parameter accelerated modified Newton – Raphson methods for rigid-plastic FE analysis. *Acta Mech. Solida Sin*. 2002. Vol. 15. Iss. 4. P. 323–331.

24. Liu X.-L., Lam Y.C., Thomson P.F. Single parameter accelerated modified Newton – Raphson methods for rigid/plastic FE analysis. *J. Mater. Process. Technol*. 2002. Vol. 123. Iss. 3. P. 385–392. DOI: 10.1016/S0924-0136(01)01199-2.

ELASTIC-PLASTIC DEFORMATION OF THIN-WALLED STRUCTURES IN TWO-DIMENSIONAL STATEMENT BASED ON MIXED FEM

Klochkov M.Yu.[1], Nikolaev A.P.[2], Klochkov Yu.V.[2], Vakhnina O.V.[2], Dyukina N.S.[3]

[1]*Volgograd State Technical University, Volgograd, Russian Federation*
[2]*Volgograd State Agrarian University, Volgograd, Russian Federation*
[3]*National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Nizhny Novgorod, Russian Federation*

klotchkov@bk.ru

Received by the Editor 2024/11/07

An algorithm for obtaining the stiffness matrix of a mixed finite element in the form of a quadrangular fragment of the middle surface of a thin-walled structure is presented. The following are accepted as nodal unknowns: kinematic quantities (displacement increments and their first derivatives) and deformation quantities (strain increments and curvature increments of the middle surface). To approximate the kinematic quantities of an internal point of a finite element, bicubic shape functions with Hermite polynomials of the third degree were accepted. Strain increments and curvature increments were approximated through nodal unknowns by bilinear shape functions. Physical nonlinearity is implemented based on the theory of plastic flow. The components of the elastic strain increment tensor were determined through the components of the stress increment tensor in a curvilinear coordinate system based on the relations of continuum mechanics, taking into account the Kirchhoff – Love hypothesis. The components of the plastic strain increment tensor are obtained in a curvilinear coordinate system based on the hypothesis of the plastic flow theory about their proportionality to the components of the stress deviator with a straight normal to the middle surface. To obtain the stiffness matrix of the developed finite element, a nonlinear functional was used based on the equality of possible and actual works of specified loads and arising internal forces at the loading step, with the replacement of the actual work of internal forces by the difference between the total and additional work of internal forces at the loading step. After substituting the approximating expressions into the nonlinear mixed functional and performing minimization over the nodal unknowns, two systems of algebraic equations are obtained with respect to the sought nodal unknowns. Based on the obtained systems of algebraic equations, a 36x36 finite element stiffness matrix is obtained. The structure stiffness matrix is formed in the usual way for FEM. The efficiency of the developed finite element is shown in a numerical example.

Keywords: mixed functional, quadrangular finite element, tensor-vector interpolation of sought quantities.