

УДК 539.3; 534-16; 534-18

DOI: 10.32326/1814-9146-2025-87-1-103-112

ВОЛНЫ В НЕОДНОРОДНОМ ВЯЗКОУПРУГОМ ПОЛОМ ШАРЕ*

© 2025 г.

Пшеничнов С.Г.*НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Российская Федерация*

serp56@yandex.ru

Поступила в редакцию 01.11.2024

Решается задача о распространении нестационарных продольных волн в шаре с концентрической полостью, состоящем из однородных вязкоупругих сферических слоев с условиями непрерывности перемещений и нормальных напряжений на границах между контактирующими слоями. На поверхность шара действует равномерно распределенная нормальная нагрузка, полость остается свободной. Решение задачи построено с использованием интегрального преобразования Лапласа по времени. Решение в оригиналах получено в новой форме, которая особенно удобна для численной реализации при большом количестве однородных слоев как при регулярных ядрах релаксации, так и при сингулярных ядрах Ржаницына – Колтунова. Эта новая форма, также подходящая для других задач, позволила существенно упростить динамические расчеты и с ростом числа слоев легко перейти к исследованию нестационарных процессов в шаре из вязкоупругого функционально-градиентного материала с непрерывно изменяющимися в радиальном направлении физико-механическими свойствами. Применен метод аппроксимации непрерывной неоднородности материала шара слоистой средой, часто используемый в стационарных динамических задачах для упругих, термоупругих и пьезоэластичных тел. Правомочность такого подхода для нестационарных задач была ранее подтверждена расчетами автора для тел с цилиндрическими и плоскими границами. Для шара также наблюдалась сходимость результатов с увеличением числа слоев при непрерывном изменении нагрузки во времени. Исследованы переходные процессы при экспоненциальном типе неоднородности материала шара, в том числе неоднородности сингулярного ядра релаксации.

Ключевые слова: волновые процессы, вязкоупругость, динамика слоистых тел, функционально-градиентные материалы, неоднородный шар.

Введение

В настоящей статье представлены результаты работы, продолжающей исследования переходных волновых процессов в вязкоупругих слоисто-однородных телах [1, 2], а также в функционально-градиентных материалах (ФГМ) с непрерывной зависимостью физико-механических параметров от координат [3–5]. Известные достижения в изучении динамики вязкоупругих кусочно-однородных тел частично отражены в публикациях [6–10], при этом большинство современных исследований по

*Выполнено за счет гранта РФФИ № 24-29-00164, <https://rscf.ru/project/24-29-00164/>.

этой теме относится к гармоническим колебаниям и волнам [11–13]. Появление новых материалов и технологий, а также анализ опубликованных результатов в рассматриваемой области подтверждают актуальность продолжения соответствующих исследований, особенно это касается изучения переходных процессов в телах с произвольным числом слоев при разных типах их наследственных свойств. В области изучения динамики вязкоупругих ФГМ достижения других исследователей относятся к стационарным процессам (например, [14–16]).

В настоящей статье построено решение нестационарной задачи для слоистого вязкоупругого полого шара с использованием интегрального преобразования Лапласа по времени. Задача решалась ранее при регулярных ядрах релаксации [1] и в асимптотических приближениях [17]. Здесь решение в оригиналах получено в новой форме, удобной для численной реализации при большом количестве однородных слоев как при регулярных, так и при сингулярных ядрах Ржаницына – Колтунова. Эта форма позволила существенно упростить расчеты и с ростом числа слоев перейти к исследованию переходных процессов в шаре из вязкоупругого ФГМ. Как и прежде [3–5], применен метод аппроксимации непрерывной неоднородности материала слоистой средой, часто используемый в стационарных динамических задачах для упругих [18], пьезоэластичных [19] и термоупругих ФГМ [20]. Правомерность такого метода для нестационарных задач была подтверждена ранее для тел с цилиндрическими и плоскими границами [3–5] при конкретных исходных данных.

1. Формулировка задачи

Рассмотрим шар радиусом R_N с концентрической полостью радиусом R_0 , состоящий из N однородных вязкоупругих слоев, границами которых являются концентрические сферы с радиусами R_1, R_2, \dots, R_N , причем $R_0 < R_1 < R_2 < \dots < R_N$. С момента $t = 0$ на поверхность шара действует равномерно распределенная нормальная нагрузка $P(t)$, полость остается свободной (рис. 1).

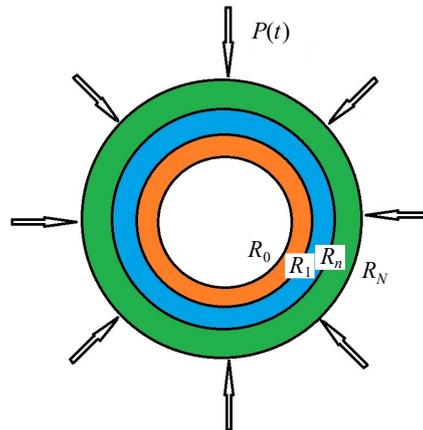


Рис. 1. Центральное сечение шара и схема нагружения

В сферической системе координат R, θ, ϕ с началом в центре полости введем безразмерные величины с учетом симметрии волнового процесса ($n = 1, 2, \dots, N$):

$$r = \frac{R}{R_N}, \quad r_0 = \frac{R_0}{R_N}, \quad r_n = \frac{R_n}{R_N} \quad (r_N = 1), \quad \tau = \frac{t}{t_0}, \quad P_0 \psi(\tau) = \frac{P}{2G_0^{(N)}},$$

$$\gamma_v^{(n)}(\tau) = t_0 T_v^{(n)}, \quad \gamma_s^{(n)}(\tau) = t_0 T_s^{(n)}, \quad v_n = \frac{c_N}{c_n}, \quad w_n = \frac{1 - v_0^{(n)}}{1 - 2v_0^{(n)}},$$

$$u^{(n)}(r, \tau) = \frac{u_R^{(n)}}{R_N}, \quad \sigma_1^{(n)}(r, \tau) = \frac{\sigma_R^{(n)}}{2G_0^{(n)}}, \quad \sigma_2^{(n)}(r, \tau) = \frac{\sigma_\theta^{(n)}}{2G_0^{(n)}},$$

где $t_0 = R_N/c_N$; $u_R^{(n)}$ – радиальное перемещение; $\sigma_R^{(n)}, \sigma_\theta^{(n)}$ – радиальное и окружное напряжения ($\sigma_\theta^{(n)} = \sigma_\phi^{(n)}$); $G_0^{(n)}, v_0^{(n)}, c_n, T_v^{(n)}, T_s^{(n)}$ – мгновенные значения модуля сдвига и коэффициента Пуассона, скорость продольных упругих волн, а также ядра объемной и сдвиговой релаксации материала n -го слоя; P_0 – безразмерная константа.

Математическую формулировку задачи составляют уравнения ($n = 1, 2, \dots, N$):

$$(1 - \hat{\gamma}_1^{(n)}) \{ (u^{(n)}(r, \tau))' + \frac{2}{r} u^{(n)}(r, \tau) \}' - (v_n)^2 \ddot{u}^{(n)}(r, \tau) = 0, \quad r_{n-1} \leq r \leq r_n, \quad (1)$$

граничные и начальные условия:

$$\sigma_1^{(N)}(1, \tau) = -P_0 \Psi(\tau), \quad \sigma_1^{(1)}(r_0, \tau) = 0 \quad (\tau > 0); \quad u^{(n)}(r, 0) = 0, \quad \dot{u}^{(n)}(r, 0) = 0, \quad (2)$$

а также условия непрерывности на границах между контактирующими слоями:

$$u^{(m)}(r_m, \tau) = u^{(m+1)}(r_m, \tau), \quad G_0^{(m)} \sigma_1^{(m)}(r_m, \tau) = G_0^{(m+1)} \sigma_1^{(m+1)}(r_m, \tau), \quad m = 1, 2, \dots, N-1, \quad (3)$$

при этом

$$\sigma_1^{(n)}(r, \tau) = w_n (1 - \hat{\gamma}_1^{(n)}) [u^{(n)}(r, \tau)]' + 2(w_n - 1)(1 - \hat{\gamma}_2^{(n)}) \frac{u^{(n)}(r, \tau)}{r}, \quad (4)$$

$$\sigma_2^{(n)}(r, \tau) = [w_n (1 - \hat{\gamma}_1^{(n)}) + (w_n - 1)(1 - \hat{\gamma}_2^{(n)})] \frac{u^{(n)}(r, \tau)}{r} + (w_n - 1)(1 - \hat{\gamma}_2^{(n)}) [u^{(n)}(r, \tau)]',$$

где точка и штрих обозначают дифференцирование по τ и r соответственно,

$$\hat{\gamma}_j^{(n)} \xi(\tau) = \int_0^\tau \gamma_j^{(n)}(\tau - \chi) \xi(\chi) d\chi, \quad j = 1, 2,$$

$$\gamma_1^{(n)}(\tau) = \frac{1}{3(1 - v_0^{(n)})} [(1 + v_0^{(n)}) \gamma_v^{(n)}(\tau) + 2(1 - 2v_0^{(n)}) \gamma_s^{(n)}(\tau)],$$

$$\gamma_2^{(n)}(\tau) = \frac{1}{3v_0^{(n)}} [(1 + v_0^{(n)}) \gamma_v^{(n)}(\tau) - (1 - 2v_0^{(n)}) \gamma_s^{(n)}(\tau)].$$

2. Построение решения

Применим к задаче (1)–(4) интегральное преобразование Лапласа по времени, обозначив изображения величин

$$u^{(n)}(r, \tau), \quad \sigma_1^{(n)}(r, \tau), \quad \sigma_2^{(n)}(r, \tau), \quad \gamma_v^{(n)}(\tau), \quad \gamma_s^{(n)}(\tau), \quad \gamma_1^{(n)}(\tau), \quad \gamma_2^{(n)}(\tau), \quad \Psi(\tau)$$

соответственно через

$$U^{(n)}(r, s), \quad S_1^{(n)}(r, s), \quad S_2^{(n)}(r, s), \quad \Theta_v^{(n)}(s), \quad \Theta_s^{(n)}(s), \quad \Theta_1^{(n)}(s), \quad \Theta_2^{(n)}(s), \quad \Psi(s), \quad s \in C.$$

Решение $U^{(n)}(r, s)$ соответствующей задачи в изображениях имеет вид ($n = 1, 2, \dots, N$):

$$U^{(n)}(r, s) = -P_0 \Psi \frac{P_n}{\beta_N Z} [\varphi_1(y_n) g_1^{(n)} + \varphi_2(y_n) g_2^{(n)}], \quad r_{n-1} \leq r \leq r_n \quad (r_N = 1), \quad (5)$$

при этом

$$y_n(r, s) = v_n r \beta_n(s), \quad \beta_n(s) = \frac{s}{\sqrt{1 - \Theta_1^{(n)}(s)}}, \quad Z(s) = g_1^{(N)} H_1 + g_2^{(N)} H_2,$$

$$\begin{pmatrix} g_1^{(m+1)} \\ g_2^{(m+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_{11}^{(m)} & \eta_{12}^{(m)} \\ \eta_{21}^{(m)} & \eta_{22}^{(m)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1^{(m)} \\ g_2^{(m)} \end{pmatrix}, \quad m = 1, 2, \dots, N-1,$$

$$g_1^{(1)} = - \left[w_1 (1 - \Theta_1^{(1)}) \varphi_2'(b_0) + 2(w_1 - 1)(1 - \Theta_2^{(1)}) \frac{\varphi_2(b_0)}{b_0} \right],$$

$$g_2^{(1)} = w_1 (1 - \Theta_1^{(1)}) \varphi_1'(b_0) + 2(w_1 - 1)(1 - \Theta_2^{(1)}) \frac{\varphi_1(b_0)}{b_0},$$

$$\eta_{11}^{(m)} = \varphi_1(b_1^{(m)}) \psi_{22}^{(m)} - \varphi_2(b_2^{(m)}) \psi_{11}^{(m)}, \quad \eta_{12}^{(m)} = \varphi_2(b_1^{(m)}) \psi_{22}^{(m)} - \varphi_2(b_2^{(m)}) \psi_{11}^{(m)},$$

$$\eta_{21}^{(m)} = -\varphi_1(b_1^{(m)}) \psi_{21}^{(m)} + \varphi_1(b_2^{(m)}) \psi_{11}^{(m)}, \quad \eta_{22}^{(m)} = -\varphi_2(b_1^{(m)}) \psi_{21}^{(m)} + \varphi_1(b_2^{(m)}) \psi_{12}^{(m)},$$

где

$$\psi_{11}^{(m)} = \frac{G_0^{(m)} v_m \beta_m}{G_0^{(m+1)} v_{m+1} \beta_{m+1}} \left[w_m (1 - \Theta_1^{(m)}) \varphi_1'(b_1^{(m)}) + 2(w_m - 1)(1 - \Theta_2^{(m)}) \frac{\varphi_1(b_1^{(m)})}{b_1^{(m)}} \right],$$

$$\psi_{12}^{(m)} = \frac{G_0^{(m)} v_m \beta_m}{G_0^{(m+1)} v_{m+1} \beta_{m+1}} \left[w_m (1 - \Theta_1^{(m)}) \varphi_2'(b_1^{(m)}) + 2(w_m - 1)(1 - \Theta_2^{(m)}) \frac{\varphi_2(b_1^{(m)})}{b_1^{(m)}} \right],$$

$$\psi_{21}^{(m)} = w_{m+1} (1 - \Theta_1^{(m+1)}) \varphi_1'(b_2^{(m)}) + 2(w_{m+1} - 1)(1 - \Theta_2^{(m+1)}) \frac{\varphi_1(b_2^{(m)})}{b_2^{(m)}},$$

$$\psi_{22}^{(m)} = w_{m+1} (1 - \Theta_1^{(m+1)}) \varphi_2'(b_2^{(m)}) + 2(w_{m+1} - 1)(1 - \Theta_2^{(m+1)}) \frac{\varphi_2(b_2^{(m)})}{b_2^{(m)}}, \quad m = 1, 2, \dots, N-1,$$

$$b_0 = r_0 v_1 \beta_1, \quad b_1^{(m)} = r_m v_m \beta_m, \quad b_2^{(m)} = r_m v_{m+1} \beta_{m+1}, \quad p_N \equiv 1, \quad p_m = p_{m+1} w_{m+1} \frac{1 - \Theta_1^{(m+1)}}{(b_2^{(m)})^2},$$

$$H_1 = w_N (1 - \Theta_1^{(N)}) \varphi_1'(\beta_N) + 2(w_N - 1)(1 - \Theta_2^{(N)}) \frac{\varphi_1(\beta_N)}{\beta_N},$$

$$H_2 = w_N (1 - \Theta_1^{(N)}) \varphi_2'(\beta_N) + 2(w_N - 1)(1 - \Theta_2^{(N)}) \frac{\varphi_2(\beta_N)}{\beta_N}.$$

Функции φ_1, φ_2 некоторого комплексного аргумента y имеют вид

$$\varphi_1(y) = \frac{\operatorname{ch} y}{y} - \frac{\operatorname{sh} y}{y^2}, \quad \varphi_2(y) = \frac{\operatorname{sh} y}{y} - \frac{\operatorname{ch} y}{y^2},$$

а штрих над ними обозначает производную по соответствующему аргументу. Для изображений напряжений, где штрихом обозначена производная по r , получим:

$$S_1^{(n)}(r, s) = w_n (1 - \Theta_1^{(n)}) [U^{(n)}(r, s)]' + 2(w_n - 1)(1 - \Theta_2^{(n)}) \frac{U^{(n)}(r, s)}{r}, \quad (6)$$

$$S_2^{(n)}(r, s) = [w_n (1 - \Theta_1^{(n)}) + (w_n - 1)(1 - \Theta_2^{(n)})] \frac{U^{(n)}(r, s)}{r} + (w_n - 1)(1 - \Theta_2^{(n)}) [U^{(n)}(r, s)]'.$$

Построим оригиналы $u^{(n)}$ в случае, когда нагрузка задана функцией Хевисайда: $\psi(\tau) = h(\tau)$. Тогда точками ветвления изображений $U^{(n)}, S_1^{(n)}, S_2^{(n)}$ на комплексной

плоскости могут быть только точки ветвления изображений ядер $\Theta_v^{(n)}$, $\Theta_s^{(n)}$ (несмотря на вид β_n) [2]. Полюсами $U^{(n)}$, $S_1^{(n)}$, $S_2^{(n)}$ являются $s = 0$ и корни уравнения

$$Z(s) = 0, \quad (7)$$

они же – собственные значения задачи о свободных колебаниях шара при $\sigma_1^{(N)}(1, \tau) = 0$. Множество корней (7) – комплексный спектр E – может иметь конечные предельные точки, не являющиеся полюсами $U^{(n)}$, $S_1^{(n)}$, $S_2^{(n)}$ (5), (6) и определяемые из уравнений

$$1 - \Theta_1^{(n)}(s) = 0, \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (8)$$

Пусть $\gamma_v^{(n)} \equiv 0$ для всех n , а каждое сдвиговое наследственное ядро $\gamma_s^{(n)}$ (если оно не тождественный ноль) является сингулярным ядром Ржаницына – Колтунова:

$$\gamma_s^{(n)}(\tau) = A_n \exp(-B_n \tau) \tau^{\delta_n - 1}, \quad A_n \Gamma(\delta_n) (B_n)^{-\delta_n} < 1, \quad A_n > 0, \quad B_n > 0, \quad 0 < \delta_n < 1, \quad (9)$$

A_n , B_n , δ_n – константы, $\Gamma(\delta_n)$ – гамма-функция аргумента δ_n . Тогда

$$\gamma_1^{(n)}(\tau) = \zeta_1^{(n)} \gamma_s^{(n)}(\tau), \quad \gamma_2^{(n)}(\tau) = \zeta_2^{(n)} \gamma_s^{(n)}(\tau), \quad \Theta_1^{(n)}(s) = \zeta_1^{(n)} \Theta_s^{(n)}(s), \quad \Theta_2^{(n)}(s) = \zeta_2^{(n)} \Theta_s^{(n)}(s),$$

$$\Theta_s^{(n)}(s) = A_n \Gamma(\delta_n) (s + B_n)^{-\delta_n}, \quad \zeta_1^{(n)} = \frac{2(1 - 2\nu_0^{(n)})}{3(1 - \nu_0^{(n)})}, \quad \zeta_2^{(n)} = \frac{2\nu_0^{(n)} - 1}{3\nu_0^{(n)}}.$$

Точками ветвления изображений $U^{(n)}$, $S_1^{(n)}$, $S_2^{(n)}$ являются $s_{br}^{(n)} = -B_n$, а действительными корнями уравнений (8) будут $s_*^{(n)} = -B_n + [\zeta_1^{(n)} A_n \Gamma(\delta_n)]^{1/\delta_n}$.

С учетом ограничений на $\zeta_1^{(n)}$ и неравенств (9) получим $-B_n < s_*^{(n)} < 0$. На действительной оси при $s \in (-B_n; s_*^{(n)})$ выполняется $1 - \Theta_1^{(n)}(s) < 0$, то есть величина $\beta_n(s)$ чисто мнимая и стремится к бесконечности при $s \rightarrow s_*^{(n)}$ слева. На указанном промежутке при мнимой величине β_n функция $Z(s)$ в уравнении (7) содержит периодические функции со стремящимся к бесконечности аргументом при $s \rightarrow s_*^{(n)}$. Таким образом, следует полагать, что бесконечное количество действительных элементов спектра E из окрестностей их предельных точек может находиться именно на интервалах $(-B_n; s_*^{(n)})$, вообще говоря, пересекающихся. Вследствие характера расположения точек $s_{br}^{(n)}$ и $s_*^{(n)}$, формулы Меллина, асимптотики $U^{(n)}$, $S_1^{(n)}$, $S_2^{(n)}$ при $s \rightarrow \infty$ и симметрии расположения элементов E относительно действительной оси решение задачи (1)–(4) в оригиналах можно записать в форме, содержащей ряд по вычетам в комплексных полюсах изображений, вычет в нуле и интегралы, возникшие при обходе точек ветвления $s_{br}^{(n)}$, а также действительных полюсов и точек $s_*^{(n)}$:

$$u^{(n)}(r, \tau) = u_0^{(n)}(r) + 2 \sum_{j=1}^{\infty} \operatorname{Re} \left\{ \operatorname{Res}_{s=z_j} [U^{(n)}(r, s) \exp(s\tau)] \right\} + \frac{1}{\pi} \exp(\alpha_0 \tau) \times$$

$$\times \int_0^{\omega_0} \operatorname{Re} \{ U(r, \alpha_0 + i\omega) \exp(i\omega\tau) \} d\omega - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\alpha_0} \operatorname{Im} \{ U(r, \alpha + i\omega_0) \exp((\alpha + i\omega_0)\tau) \} d\alpha, \quad (10)$$

$$u_0^{(n)}(r) = \operatorname{Res}_{s=0} [U^{(n)}(r, s) \exp(s\tau)], \quad n = 1, 2, \dots, N.$$

Здесь $z_j = \alpha_j + i\omega_j$; $\alpha_j, \omega_j \in R$, $\omega_j > 0$ ($j = 1, 2, 3, \dots$), при этом $\alpha_j < 0$, $\{\alpha_j \pm i\omega_j\} \subset E$. Действительные величины α_0 , ω_0 следует выбирать из интервалов $\alpha_0 \in (s_*^{(\max)}; 0)$, $\omega_0 \in (0; \omega_1)$, где $s_*^{(\max)} = \max \{s_*^{(n)}\}$, $\omega_1 = \operatorname{Im} z_1 = \min \{\operatorname{Im}(z_j)\}$, причем выбор на этих интервалах произволен. Комплексные элементы z_j будем находить методом ите-

раций, взяв за начальное приближение чисто мнимые элементы E для упругого слоистого шара. Процесс начинается с поиска z_1 с наименьшей положительной мнимой частью ω_1 и продолжается до достижения нужного количества слагаемых в частичной сумме ряда из (10). Напряжения через их изображения (6) выражаются аналогично. При других функциях нагрузки $\psi(\tau)$ решение строится с помощью (10) и интеграла Дюамеля.

В формуле (10) интеграл по отрезку умножается на функцию, стремящуюся к нулю с ростом τ . Скорость сходимости к нулю несобственного интеграла с течением времени растет, а его подынтегральная функция не является быстро осциллирующей, что является достоинством формулы (10). Расчеты показали, что интегралы (10) практически не влияют на волновой процесс после прихода первого фронта от возмущенной границы в заданную точку, но влияют на точность выполнения начальных условий до его прихода. При ядрах в виде сумм экспонент формула (10) тоже верна.

3. Результаты вычислений

Простота численной реализации решения (10) при $N \gg 1$ позволяет аппроксимировать слоями непрерывную неоднородность ФГМ. На рис. 2, 3 показаны результаты при воздействии треугольного импульса шириной $2\tau_d$:

$$\psi(\tau) = \frac{\tau}{\tau_d} \quad (0 < \tau \leq \tau_d), \quad \psi(\tau) = 2 - \frac{\tau}{\tau_d} \quad (\tau_d < \tau \leq 2\tau_d), \quad \psi(\tau) = 0 \quad (\tau > 2\tau_d), \quad \tau_d = 0,5$$

на шар из ФГМ с полостью радиусом $r_0 = 0,5$ и со следующими свойствами материала:

$$v_0 \equiv 0,3; \quad \frac{G_0(r)}{G_0(r_0)} = \frac{\rho(r)}{\rho(r_0)} = \exp(3(r - r_0)); \quad \gamma_v \equiv 0;$$

$$\gamma_s(r, \tau) = 0,09 \exp(3(r_0 - r)) \exp(-0,05\tau) \tau^{-0,8},$$

где $v_0, G_0, \rho, \gamma_v, \gamma_s$ – мгновенные значения коэффициента Пуассона и модуля сдвига, плотность и безразмерные ядра релаксации ФГМ. Скорость продольных упругих волн от r не зависит, а ядро релаксации γ_s зависит с монотонностью, противоположной $G_0(r), \rho(r)$.

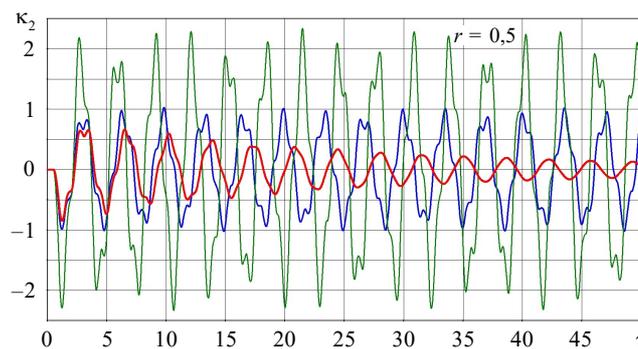


Рис. 2. Графики $\kappa_2(r_0, \tau)$ для шаров из ФГМ и для однородного упругого шара

Представлены относительные напряжения $\kappa_1(r, \tau), \kappa_2(r, \tau)$ в шаре из ФГМ, которые приближались величинами

$$\kappa_1^{(n)} = \frac{G_0^{(n)} \sigma_1^{(n)}}{G_0^{(N)} P_0} = \frac{\sigma_R^{(n)}}{2G_0^{(N)} P_0}, \quad \kappa_2^{(n)} = \frac{G_0^{(n)} \sigma_2^{(n)}}{G_0^{(N)} P_0} = \frac{\sigma_\theta^{(n)}}{2G_0^{(N)} P_0}$$

в слоистом шаре с 80 слоями одинаковой толщины при удержании 100 членов в рядах (10). Для $N > 80$ результаты практически не менялись. Найдены значения $s_*^{(\max)} \approx -0,0499$, $\omega_1 \approx 1,769$, и в качестве верхних границ интегрирования в (10) выбраны $\alpha_0 = -0,001$, $\omega_0 = 0,5$. Отрицательные напряжения сжимающие ($P_0 > 0$). На рисунках изображены изменения во времени κ_2 на границе $r = r_0$ и κ_1 на срединной поверхности $r = 0,75$. Красные линии относятся к результатам для вязкоупругого ФГМ, синие – для упругого ФГМ (при сохранении прочих исходных данных), зеленые – для однородного упругого шара. Видно влияние на переходный процесс как вязкости, так и неоднородности материала.

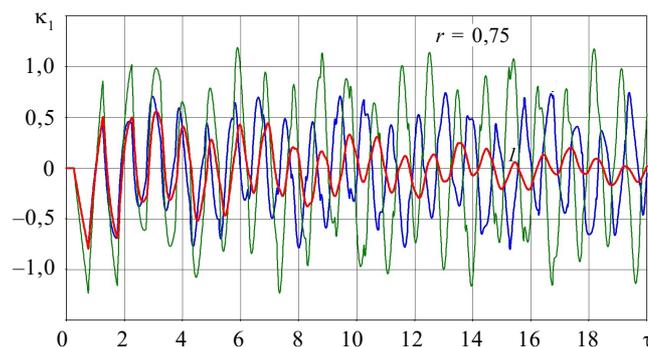


Рис. 3. Графики $\kappa_1(0,75, \tau)$ для шаров из ФГМ и для однородного упругого шара

Заключение

Построено решение нестационарной задачи для слоисто-однородного вязкоупругого полого шара с использованием интегрального преобразования Лапласа по времени. Решение в оригиналах получено в новой форме, отличной от представленной в статье [4], которая удобна для численной реализации при большом количестве однородных слоев как при регулярных, так и при сингулярных ядрах Ржаницына – Колтунова. Эта форма, являющаяся еще одной модификацией спектрального разложения, существенно упростила динамические расчеты при аппроксимации непрерывной неоднородности материала многослойной средой. Наблюдалась сходимость результатов с ростом числа слоев. Впервые исследованы переходные процессы в полом шаре из вязкоупругого ФГМ при экспоненциально изменяющихся вдоль радиуса физико-механическими параметрами, в том числе при экспоненциально изменяющемся параметре сингулярного наследственного ядра.

Список литературы

1. Пшеничников С.Г. Аналитическое решение одномерных задач динамики кусочно-однородных вязкоупругих тел. *Изв. АН СССР. МТТ*. 1991. №1. С. 95–103.
2. Пшеничников С.Г. Динамические задачи линейной вязкоупругости для кусочно-однородных тел. *Изв. РАН. МТТ*. 2016. №1. С. 79–89.
3. Pshenichnov S., Ivanov R., Datcheva M. Transient wave propagation in functionally graded viscoelastic structures. *Mathematics*. 2022. Vol. 10. Iss. 23. P. 4505-1–4505-18. <https://doi.org/10.3390/math10234505>.
4. Пшеничников С.Г. Нестационарные волны в функционально-градиентном вязкоупругом плоскопараллельном слое. *Проблемы прочности и пластичности*. 2024. Т. 86. №2. С. 192–201. <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2024-86-2-192-201>.

5. Пшеничнов С.Г. Нестационарные волновые процессы в цилиндре из функционально-градиентного вязкоупругого материала. *Вестник Московского университета. Серия 1, Математика. Механика*. 2024. №2. С. 37–44. <https://doi.org/10.55959/MSU0579-9368-1-65-2-5>.
6. Баженов В.Г., Белов А.А., Игумнов Л.А. *Гранично-элементное моделирование динамики кусочно-однородных сред и конструкций*. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2009. 180 с.
7. Петров А.Н., Ермолаев М.Д. Расчет методом граничных элементов динамики составных вязкоупругих тел. *Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Механика деформируемого твердого тела*. 2011. №4 (4). С. 1694–1696.
8. Hosseini-Hashemi S., Bakhshi Khaniki H. Dynamic behavior of multi-layered viscoelastic nanobeam system embedded in a viscoelastic medium with a moving nanoparticle. *Journal of Mechanics*. 2017. Vol. 33. Iss. 5. P. 559–575. <https://doi.org/10.1017/jmech.2016.91>.
9. Hyung Suk Lee. Viscowave – a new solution for viscoelastic wave propagation of layered structures subjected to an impact load. *International Journal of Pavement Engineering*. 2014. Vol. 15. Iss. 6. P. 542–557. <https://doi.org/10.1080/10298436.2013.782401>.
10. Khudoynazarov K. Longitudinal-radial vibrations of a viscoelastic cylindrical three-layer structure. *Facta Universitatis. Series: Mechanical Engineering*. 2024. Vol. 22. No 3. P. 473–484. <https://doi.org/10.22190/FUME231219010K>.
11. Shamaev A.S., Shumilova V.V. Asymptotics of the spectra of one-dimensional natural vibrations in media consisting of solid and fluid layers. *Doklady Physics*. 2020. Vol. 65. P. 153–156. <https://doi.org/10.1134/S1028335820040084>.
12. Alizadeh V., Amirkhizi A.V. Overall dynamic properties of locally resonant viscoelastic layered media based on consistent field integration for oblique anti-plane shear waves. *Mechanics of Materials*. 2021. Vol. 160. Article No 103981. <https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2021.103981>.
13. Borchardt R.D. *Viscoelastic Waves and Rays in Layered Media*. Cambridge: Cambridge University Press, 2020. 450 p.
14. Ватульян А.О., Юров В.О. Волны в вязкоупругом цилиндрическом волноводе с дефектом. *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика*. 2021. Т. 21. Вып. 3. С. 352–367. DOI: 10.18500/1816-9791-2021-21-3-352-367.
15. Cao X., Jiang H., Ru Y., Shi J. Asymptotic solution and numerical simulation of lamb waves in functionally graded viscoelastic film. *Materials*. 2019. Vol. 12. Iss. 2. P. 268–284. <https://doi.org/10.3390/ma12020268>.
16. Zhang X., Li Z., Wang X., Yu J.G. The fractional Kelvin–Voigt model for circumferential guided waves in a viscoelastic FGM hollow cylinder. *Applied Mathematical Modelling*. 2021. Vol. 89. Iss. 1. P. 299–313. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2020.06.077>.
17. Перов М.А. Решение одномерных нестационарных задач динамики кусочно-однородных тел. *Дисс. канд. физ.-мат. наук*. Москва, 2003. 102 с.
18. Kielczynski P., Szalewski M., Balcerzak A., Wieja K. Propagation of ultrasonic Love waves in nonhomogeneous elastic functionally graded materials. *Ultrasonics*. 2016. Vol. 65. P. 220–227. <https://doi.org/10.1016/j.ultras.2015.10.001>.
19. Ezzin H., Wang B., Qian Z. Propagation behavior of ultrasonic Love waves in functionally graded piezoelectric-piezomagnetic materials with exponential variation. *Mechanics of Materials*. 2020. Vol. 148. Article No 103492. <https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2020.103492>.
20. Larin N.V., Tolokonnikov L.A. Sound scattering by a thermoelastic ball with a continuously inhomogeneous coating in a heat-conducting fluid. *Mathematical Models and Computer Simulations*. 2019. Vol. 11. Iss. 6. P. 1007–1018. <https://doi.org/10.1134/S2070048219060139>.

References

1. Pshenichnov S.G. Analiticheskoe reshenie odnomernykh zadach dinamiki kusochno-odnorodnykh vyazkoupругikh tel [Analytical solution of one-dimensional problems of dynamics of piecewise homogeneous viscoelastic bodies]. *Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Mekhanika tverdogo tela [Mechanics of Solids]*. 1991. No 1. P. 95–103 (In Russian).
2. Pshenichnov S.G. Dynamic linear viscoelasticity problems for piecewise homogeneous bodies. *Mechanics of Solids*. 2016. Vol. 51. No 1. P. 65–74.

3. Pshenichnov S., Ivanov R., Datcheva M. Transient wave propagation in functionally graded viscoelastic structures. *Mathematics*. 2022. Vol. 10. Iss. 23. P. 4505-1–4505-18. <https://doi.org/10.3390/math10234505>.
4. Pshenichnov S.G. Nestatsionarnye volny v funktsionalno-gradientnom vyazkouprugom ploskoparallelnom sloe [Non-stationary waves in a functionally graded viscoelastic plane-parallel layer]. *Problemy prochnosti i plastichnosti [Problems of Strength and Plasticity]*. 2024. Vol. 86. No 2. P. 192–201 (In Russian).
5. Pshenichnov S.G. Unsteady wave processes in a cylinder made of viscoelastic functionally graded material. *Moscow University Mechanics Bulletin*. 2024. Vol. 79. P. 29–37.
6. Bazhenov V.G., Belov A.A., Igumnov L.A. *Granichno-elementnoe modelirovanie dinamiki kusochno-odnorodnykh sred i konstruksiy [Boundary Element Modeling of the Dynamics of Piecewise Homogeneous Media and Structures]*. N. Novgorod. NNGU Publ. 2009. 180 p. (In Russian).
7. Petrov A.N., Yermolayev M.D. Raschet metodom granichnykh elementov dinamiki sostavnykh vyazkouprugikh tel [Boundary-element analysis of the dynamics of composite viscoelastic bodies]. *Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N.I. Lobachevskogo. Mekhanika deformiruемого tverdogo tela [Vestnik of Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod. Solid Mechanics]*. 2011. No 4 (4). P. 1694–1696 (In Russian).
8. Hosseini-Hashemi S., Bakhshi Khaniki H. Dynamic behavior of multi-layered viscoelastic nanobeam system embedded in a viscoelastic medium with a moving nanoparticle. *J. Mech.* 2017. Vol. 33. Iss. 5. P. 559–575. <https://doi.org/10.1017/jmech.2016.91>.
9. Hyung Suk Lee. Viscowave – a new solution for viscoelastic wave propagation of layered structures subjected to an impact load. *Int. J. Pavement Eng.* 2014. Vol. 15. Iss. 6. P. 542–557. <https://doi.org/10.1080/10298436.2013.782401>.
10. Khudoynazarov K. Longitudinal-radial vibrations of a viscoelastic cylindrical three-layer structure. *Facta Univ. Ser.: Mech. Eng.* 2024. Vol. 22. No 3. P. 473–484. <https://doi.org/10.22190/FUME231219010K>.
11. Shamaev A.S., Shumilova V.V. Asymptotics of the spectra of one-dimensional natural vibrations in media consisting of solid and fluid layers. *Doklady Physics*. 2020. Vol. 65. P. 153–156. <https://doi.org/10.1134/S1028335820040084>.
12. Alizadeh V., Amirkhizi A.V. Overall dynamic properties of locally resonant viscoelastic layered media based on consistent field integration for oblique anti-plane shear waves. *Mechanics of Materials*. 2021. Vol. 160. Article No 103981. <https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2021.103981>.
13. Borchardt R.D. *Viscoelastic Waves and Rays in Layered Media*. Cambridge. Cambridge University Press. 2020. 450 p.
14. Vatulyan A.O., Yurov V.O. Volny v vyazkouprugom tsilindricheskom volnovode s defektom [Waves in a viscoelastic cylindrical waveguide with a defect]. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya: Matematika. Mekhanika. Informatika [Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics]*. 2021. Vol. 21. Iss. 3. P. 352–367 (In Russian).
15. Cao X., Jiang H., Ru Y., Shi J. Asymptotic solution and numerical simulation of lamb waves in functionally graded viscoelastic film. *Materials*. 2019. Vol. 12. Iss. 2. P. 268–284. <https://doi.org/10.3390/ma12020268>.
16. Zhang X., Li Z., Wang X., Yu J.G. The fractional Kelvin–Voigt model for circumferential guided waves in a viscoelastic FGM hollow cylinder. *App. Math. Model.* 2021. Vol. 89. Iss. 1. P. 299–313. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2020.06.077>.
17. Perov M.A. Reshenie odnomernykh nestatsionarnykh zadach dinamiki kusochno-odnorodnykh tel [Solving one-dimensional nonstationary problems to dynamics of piecewise homogeneous bodies]. *Diss. kand. fiz.-mat. nauk [Cand. Sci. (Phys.&Math.). Dissertation]*. Moscow. 2003. 102 p. (In Russian).
18. Kielczynski P., Szalewski M., Balcerzak A., Wieja K. Propagation of ultrasonic Love waves in nonhomogeneous elastic functionally graded materials. *Ultrasonics*. 2016. Vol. 65. P. 220–227. <https://doi.org/10.1016/j.ultras.2015.10.001>.
19. Ezzin H., Wang B., Qian Z. Propagation behavior of ultrasonic Love waves in functionally

graded piezoelectric-piezomagnetic materials with exponential variation. *Mech. Mater.* 2020. Vol. 148. Article No 103492. <https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2020.103492>.

20. Larin N.V., Tolokonnikov L.A. Sound scattering by a thermoelastic ball with a continuously inhomogeneous coating in a heat-conducting fluid. *Math. Models Comput. Simul.* 2019. Vol. 11. Iss. 6. P. 1007–1018. <https://doi.org/10.1134/S2070048219060139>.

WAVES IN AN INHOMOGENEOUS VISCOELASTIC HOLLOW SPHERE*

Pshenichnov S.G.

Institute of Mechanics, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation

serp56@yandex.ru

Received by the Editor 2024/11/01

The problem of propagation of nonstationary longitudinal waves in a sphere with a concentric cavity consisting of homogeneous viscoelastic spherical layers with continuity conditions for displacement and normal stresses at the boundaries between the contacting layers is solved. A uniformly distributed normal load acts on the surface of the sphere, the cavity remains free. The solution of the problem is constructed using the integral Laplace transform in time. The solution in originals is presented in a new form, which is especially convenient for numerical implementation with a large number of homogeneous layers for both regular relaxation kernels and singular Rzhantitsyn – Koltunov kernels. This new form, also suitable for other problems, made it possible to significantly simplify dynamic calculations and, with an increase in the number of layers, it is easy to proceed to the study of transients in a sphere of viscoelastic functionally graded material with continuously changing physical and mechanical properties in the radial direction. A method for approximating the continuous inhomogeneity of the sphere material by a layered medium is applied, which is often used in stationary dynamic problems for elastic, thermoelastic and piezoelectroelastic bodies. The validity of this approach for nonstationary problems was previously confirmed by the author's calculations for bodies with cylindrical and plane boundaries. For the sphere, the convergence of the results was also observed with an increase in the number of layers under a continuously time-varying load. Transient processes with exponential type of the sphere material inhomogeneity, including the inhomogeneity of the singular relaxation kernel, are investigated.

Keywords: wave processes, viscoelasticity, dynamics of layered bodies, functionally graded materials, inhomogeneous sphere.

* The research was supported by the Russian Science Foundation, grant No 24-29-00164, <https://rscf.ru/en/project/24-29-00164/>.