УДК 539.3 DOI: 10.32326/1814-9146-2025-87-1-93-102

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ РАЗЛИЧНЫХ МОДЕЛЕЙ ВНУТРЕННЕГО ТРЕНИЯ В РАСЧЕТАХ ДИНАМИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ОБОЛОЧЕК ИЗ ГИПЕРУПРУГИХ МАТЕРИАЛОВ

Коровайцева Е.А.

НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Российская Федерация

katrell@mail.ru

Поступила в редакцию 29.10.2024

Представлена постановка физически и геометрически нелинейной начально-краевой задачи о деформировании оболочки вращения из гиперупругого материала с учетом внутреннего трения. Рассмотрены три модели вязкости – Фойгта, Максвелла и больших вязкоупругих деформаций. Для решения задачи используется метод прямых в сочетании с методом непрерывного продолжения по параметру. При этом производные разрешающих переменных по времени заменяются их четырехточечными аппроксимациями. Таким образом, нелинейная начально-краевая задача сводится к нелинейной краевой задаче, решаемой последовательно для каждого временного слоя, параметр дифференцирования соотношений последней используется в форме, предложенной В.И. Шалашилиным. Рассмотрена задача о раздувании сферической оболочки из неогуковского материала. Исследованы случаи внезапно приложенного постоянного давления и гармонически изменяющегося во времени давления. Параметры классических моделей внутреннего трения выбраны такими, чтобы для моделей больших вязкоупругих деформаций и Максвелла совпадали величины времени релаксации, а для моделей Максвелла и Фойгта совпадали значения коэффициента вязкости. Для случая раздувания оболочки постоянным давлением использование модели больших вязкоупругих деформаций приводит к возникновению колебательного процесса с постоянной амплитудой, существенно меньшей амплитуды колебаний оболочки без учета внутреннего трения. В случае воздействия гармонически изменяющегося давления характер отличия результатов расчетов, полученных при использовании модели больших вязкоупругих деформаций, от результатов, полученных при применении моделей Фойгта и Максвелла, сохраняется. Исследование изменения упругих и вязких деформаций, рассчитываемых по моделям Максвелла и больших вязкоупругих деформаций, показало наличие колебаний упругой деформации, характеризующихся наименьшей частотой для модели Максвелла.

Ключевые слова: гиперупругие материалы, нелинейные начально-краевые задачи, большие деформации, вязкоупругость, метод продолжения по параметру.

Введение

Для оболочек из гиперупругих материалов характерно достижение больших деформаций и перемещений под действием внутреннего давления. Решение подобных задач в динамической постановке отличается существенной трудностью, которая тем более увеличивается при учете диссипативных процессов в материале. Видимо, по этой причине исследования учета внутреннего трения при анализе динамического деформирования оболочек из гиперупругих материалов в доступной литературе освещены весьма ограниченно. Вместе с тем диссипативные свойства гиперупругих материалов находят применение при создании и эксплуатации ряда технических устройств [1–6].

В отечественной литературе учет внутреннего трения в неогуковском материале был проведен лишь одним автором [7, 8]. При этом использовалась модель Фойгта без каких-либо обоснований.

Зарубежная литература отличается более широким спектром исследований вопроса описания диссипативных процессов в гиперупругих материалах. Первые работы в этой области относятся к 40–80-м гг. XX века [9–11]. В дальнейшем авторы рассматривали не только модель Фойгта [12], но и формировали соотношения кинетической модели с учетом конечности величин деформаций. Так, в статье [13] предложен нелинейный закон вязкоупругости для конечных деформаций и приведены примеры его тестирования. В статье [14] рассмотрены две модели вязкоупругости эластомеров, подразумевающие включение в модель стандартного линейного тела ветвей, характерных для моделей Максвелла и Кельвина.

В [15] приведены результаты экспериментов по циклическому нагружению образцов из неогуковского материала, а также представлено соотношение для коэффициента внутреннего трения в случае одноосного напряженного состояния. Экспериментальные исследования внутреннего трения для различных резин представлены в [16, 17]. В статьях [18, 19] представлены эволюционные уравнения для вязких деформаций. Конкретный их вид для случая двухосного напряженного состояния дан в [19] для неогуковского материала, в [20] – для материала Gent'а. Дальнейшее развитие модели нелинейной вязкоупругости для материала Gent'а получили в [21, 22].

Тем не менее, объем экспериментальных публикаций по исследованию вязких свойств гиперупругих материалов представляется недостаточным. Так, белыми пятнами можно считать отсутствие исследований влияния температуры и частоты внешнего воздействия, а также данных о временном диапазоне деформирования, в течение которого те или иные кинетические соотношения можно считать справедливыми. Поэтому представляется обоснованной попытка проанализировать теоретически влияние использования различных моделей внутреннего трения на динамическое деформирование оболочек из гиперупругих материалов с целью оценки как их качественного различия, так и справедливости применения на временных интервалах, превышающих время проведения экспериментов по определению характеристик вязкости материалов.

Постановка задачи

Рассматривается задача осесимметричного динамического деформирования оболочки вращения из гиперупругого материала, разрешающие соотношения которой представлены в [23]. При учете внутреннего трения в материале отличие соотношений от соотношений из [23] отражается в зависимостях, связывающих напряжения и деформации.

Рассмотрим модели Фойгта и Максвелла, а также предложенную в [19] модель для случая больших деформаций. Тогда, к примеру, для неогуковского материала физические соотношения примут вид:

1) для модели Фойгта (рис. 1*а*)

$$\sigma_1 = 2C\lambda_1^2\left[1-\frac{1}{\lambda_1^4\lambda_2^2}\right]+\eta\dot{\lambda}_1, \quad 1\leftrightarrow 2; \tag{1}$$

2) для модели Максвелла (рис. 1*б*)

$$\sigma_1 = 2C\lambda_{1,e}^2\left[1-\frac{1}{\lambda_{1,e}^4\lambda_{2,e}^2}\right], \quad \frac{de_{1,\eta}}{dt}=\frac{\sigma_1}{\eta}. \tag{2}$$

При этом вводится понятие времени релаксации в соответствии с соотношением $\tau_R = \eta/C$, а деформация, описываемая моделью, складывается из деформации упругого и вязкого элементов: $e_1 = e_{1,e} + e_{1,\eta}, 1 \leftrightarrow 2$;

3) для модели больших вязкоупругих деформаций (рис. 1*в*) упругий потенциал неогуковского материала имеет вид [19]:

$$W = C_\alpha\left(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2-3\right)+C_\beta\left(\lambda_{1,e}^2+\lambda_{2,e}^2+\lambda_{3,e}^2-3\right).$$

Кратность удлинения, описываемая рассматриваемой моделью, представлена соотношением $\lambda_i = \lambda_{i,e}e_{i,\eta}$, где $\lambda_{i,e}$ – кратность удлинения элемента модели, характеризуемого жесткостью C_β; $e_{i,\eta}$ – кратность удлинения вязкого элемента η.

Тогда совокупность соотношений, описывающих вязкоупругое поведение неогуковского материала, имеет вид

$$\sigma_1 = 2C_\alpha\,\lambda_1^2\left[1-\frac{1}{\lambda_1^4\lambda_2^2}\right]+2C_\beta\lambda_1^2\left[e_{1,\eta}^{-2}-\frac{e_{1,\eta}^2e_{2,\eta}^2}{\lambda_1^4\lambda_2^2}\right], \tag{3}$$

$$\frac{de_{1,\eta}}{dt}=\frac{1}{\tau_R}\left[\lambda_1^2e_{1,\eta}^{-3}-\frac{e_{1,\eta}e_{2,\eta}^2}{\lambda_1^2\lambda_2^2}\right], \quad \frac{de_{2,\eta}}{dt}=\frac{1}{\tau_R}\left[\lambda_2^2e_{2,\eta}^{-3}-\frac{e_{2,\eta}e_{1,\eta}^2}{\lambda_1^2\lambda_2^2}\right]. \tag{4}$$

Время релаксации для этой модели описывается формулой $\tau_R = \eta/C_\beta$.

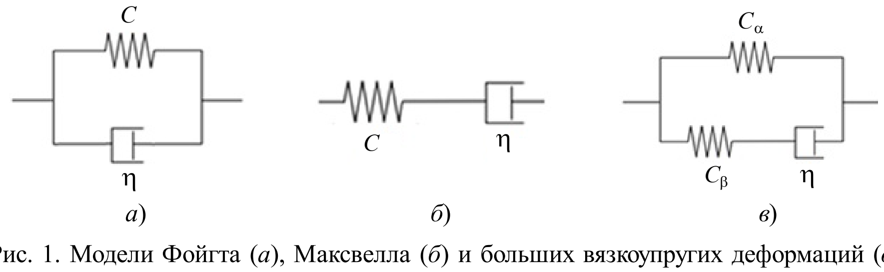

Рис. 1. Модели Фойгта (*а*), Максвелла (*б*) и больших вязкоупругих деформаций (*в*)

Алгоритм решения

Для решения нелинейной начально-краевой задачи, представляемой соотношениями из [23] и дополненной физическими соотношениями (1), (2) или (3), (4), используется метод прямых в сочетании с методом дифференцирования по параметру. Описание указанного алгоритма представлено в [24].

П р и м е р. Рассмотрим задачу динамического раздувания сферической оболочки из неогуковского материала. Примем отношение радиуса к толщине оболочки до деформации $R_0/h_0 = 100$, плотность материала $\rho = 950$ кг/м^3. Параметры модели больших вязкоупругих деформаций, определенные в [19], равны: $C_\alpha = 87{,}8$ кПа, $C_\beta =$ $= 65$ кПа, $\eta = 1{,}3 \cdot 10^7$ Па·с. Для модели Максвелла примем также $C_\alpha = 87{,}8$ кПа, а коэффициент вязкости назначим таким, чтобы времена релаксации моделей Максвелла и больших вязкоупругих деформаций были равны, то есть $\eta = 1{,}76 \cdot 10^7$ Па·с. Для модели Фойгта примем коэффициент вязкости также равным $\eta = 1{,}76 \cdot 10^7$ Па·с.

Рассмотрим три варианта зависимости раздувающего оболочку давления от времени.

Задача о раздувании оболочки внезапно приложенным постоянным давлением. Пусть величина давления $p = 0{,}02C_\alpha$. На рис. 2 показаны соответствующие зависимости прогиба оболочки от времени для случая упругого поведения материала и моделей Фойгта, Максвелла и больших вязкоупругих деформаций (графики обозначены цифрами *1*–*4* соответственно). Прогиб указан в долях радиуса недеформированной оболочки, а время – в долях обезразмеривающего параметра $\tau^* = R_0\sqrt{\rho/C_\alpha}$. Безразмерная величина времени релаксации $\tau_R = 1730$.

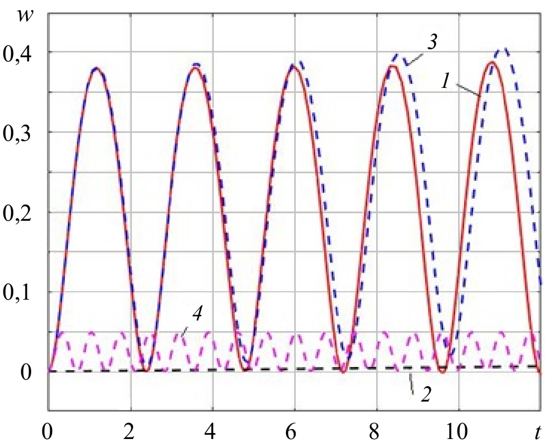

Рис. 2. Графики зависимости прогиба оболочки от времени при $p = 0{,}02C_\alpha$

Для модели больших вязкоупругих деформаций влияние учета внутреннего трения существенно сказывается на величинах прогиба, однако колебательный характер динамического процесса сохраняется.

На рис. 3 представлены аналогичные графики для трех рассматриваемых моделей вязкоупругого поведения материала (*а* – для модели Фойгта, *б* – для модели Максвелла, *в* – для модели больших вязкоупругих деформаций) при величинах времени релаксации $\tau_R = 173$, $\tau_R = 1730$, кривые обозначены цифрами *1* и *2* соответственно.

Как видно, при уменьшении времени релаксации принципиально меняется поведение оболочки из материала, описываемого моделью Максвелла, переходя от колебательного процесса к непрерывному раздуванию оболочки. Для модели больших вязкоупругих деформаций материала с уменьшением времени релаксации амплитуда колебаний начинает возрастать.

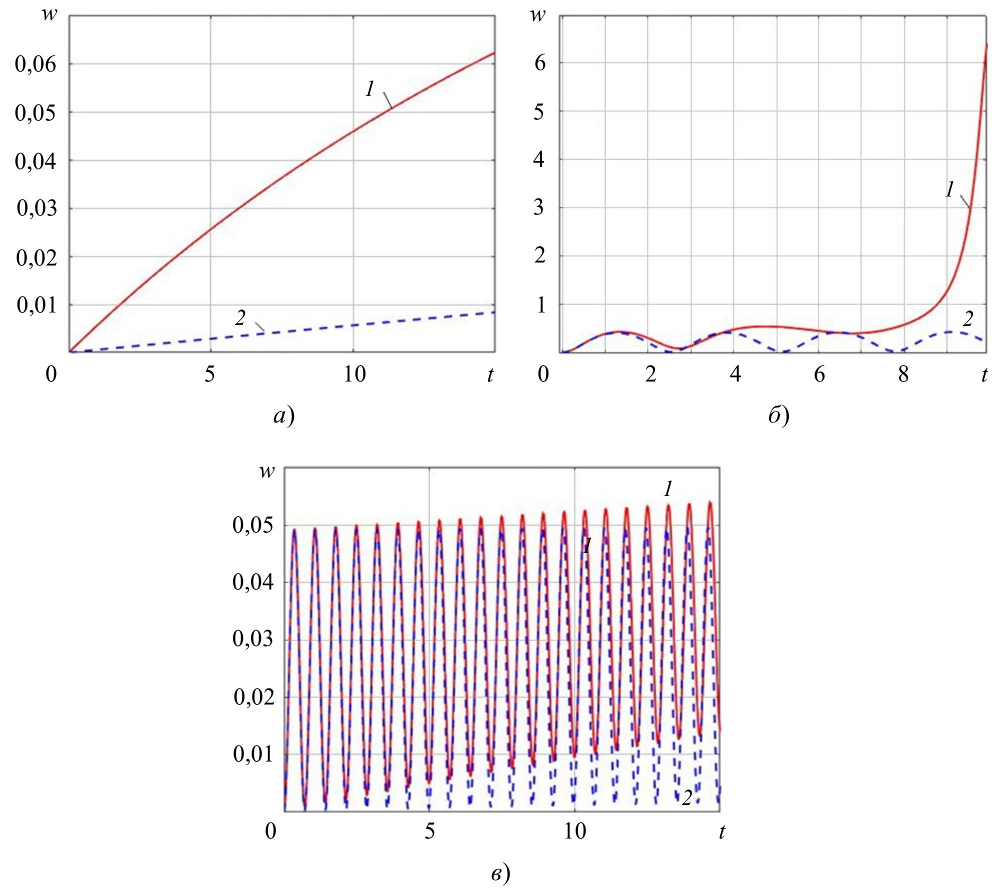

Рис. 3. Графики зависимости прогиба оболочки от времени
при различных значениях времени релаксации

Задача о раздувании оболочки гармонически изменяющимся давлением. Пусть раздувающее оболочку давление изменяется по закону $p = [0{,}015 + 0{,}005\sin(0{,}25t)]C_\alpha$. На рис. 4 представлены графики зависимости прогиба оболочки от времени. В целях сохранения ясности изображений иллюстрации приведены для каждой модели вязкоупругого поведения материала отдельно: *а* – модель Фойгта, *б* – модель Максвелла, *в* – модель больших вязкоупругих деформаций. На каждом графике цифры *1*, *2* соответствуют случаям упругого и вязкоупругого поведения материала. Для моделей Максвелла и больших вязкоупругих деформаций принято $\tau_R = 1730$. Прослеживается аналогичный случаю постоянной величины давления характер влияния учета внутреннего трения – колебательный процесс полностью исчезает для модели Фойгта, сохраняется с меньшими величинами амплитуд для модели больших вязкоупругих деформаций и сопровождается непрерывным увеличением амплитуды для модели Максвелла.

Исследуем соотношение упругих и вязких деформаций, рассчитываемых по моделям Максвелла и больших вязкоупругих деформаций (рис. 5 и 6), предполагая величины времени релаксации $\tau_R = 173$ (рис. 5*а*, 6*а*) и $\tau_R = 1730$ (рис. 5*б*, 6*б*). Цифрами *1* и *2* обозначены графики упругой и вязкой деформаций соответственно.

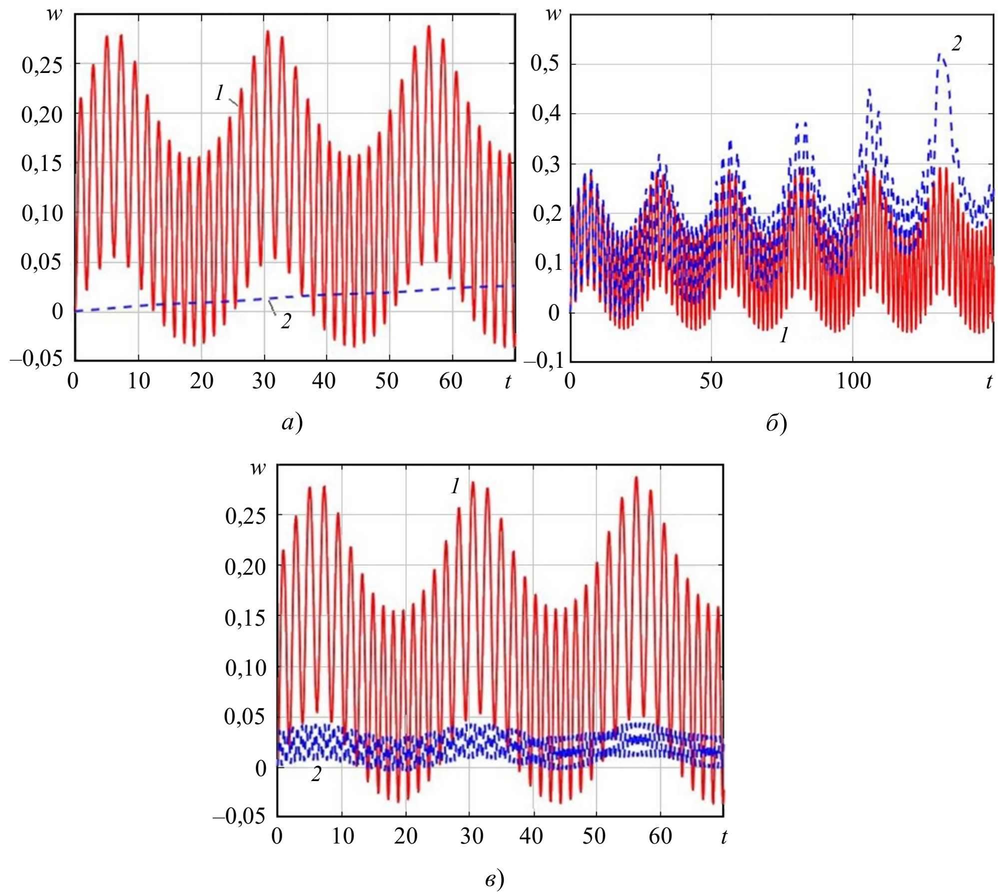

Рис. 4. Графики зависимости прогиба оболочки от времени
при различных временах релаксации

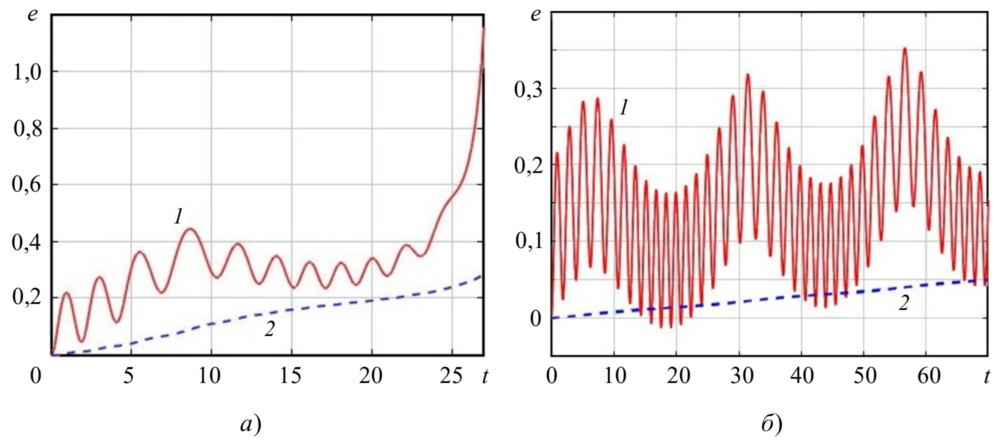

Рис. 5. Графики зависимости деформации оболочки от времени для модели Максвелла

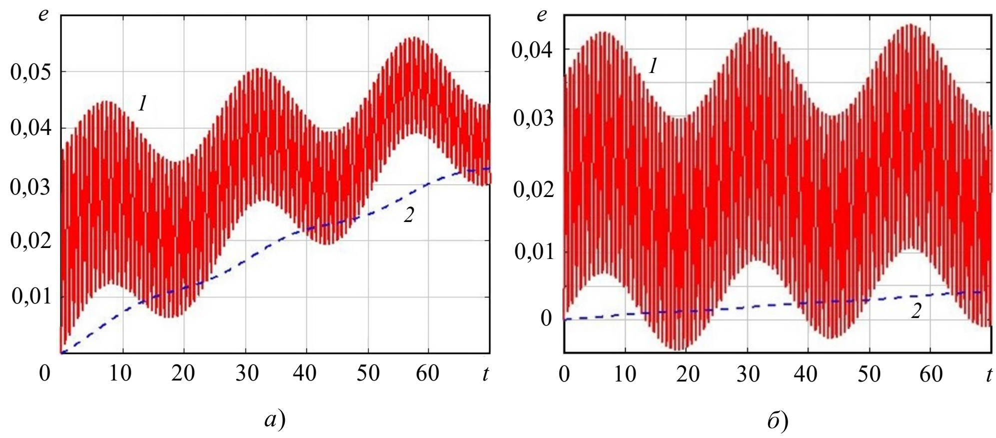

Рис. 6. Графики зависимости деформации оболочки от времени для модели больших вязкоупругих деформаций

Во всех рассмотренных случаях для упругой деформации наблюдается колебательный процесс, заканчивающийся для модели Максвелла при $\tau_R = 173$ неограниченным возрастанием величины деформации. Кроме того, в случае модели Максвелла максимальные значения упругой деформации существенно превышают значения вязкой деформации в текущий момент времени.

Для модели больших вязкоупругих деформаций при деформации $\tau_R = 173$ наблюдаются низкочастотные колебания вязкой деформации с возрастающей амплитудой, при этом величины деформаций на порядок меньше величин, получаемых при проведении расчетов по модели Максвелла.

Заключение

Впервые дана полная постановка задачи об осесимметричном динамическом деформировании оболочки вращения из гиперупругого материала произвольной формы меридиана с учетом внутреннего трения по различным моделям. Отмечено существенное отличие результатов расчетов с использованием модели больших вязкоупругих деформаций даже в диапазоне малых деформаций.

Список литературы

1. Sheng J.J., Chen H.L., Liu L., Zhang J.S., Wang Y.Q., Jia S.H. Dynamic electromechanical performance of viscoelastic dielectric elastomers. *Journal of Applied Physics*. 2013. Vol. 114. Iss. 13. Article No 134101. https://doi.org/10.1063/1.4823861.

2. Gu G.Y., Zhu J., Zhu L.M., Zhu X.Y. A survey on dielectric elastomer actuators for soft robots. *Bioinspiration & Biomimetics*. 2017. Vol. 12. Iss. 1. Article No 011003. DOI: 10.1088/1748-3190/12/1/011003.

3. Haslach H.W., Humphrey J.D. Dynamics of biological soft tissue and rubber: internally pressurized spherical membranes surrounded by a fluid. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2004. Vol. 39. Iss. 3. P. 399–420. https://doi.org/10.1016/S0020-7462(02)00196-8.

4. Mihai L.A., Fitt D., Woolley T.E., Goriely A. Likely equilibria of stochastic hyperelastic spherical shells and tubes. *Mathematics and Mechanics of Solids*. 2019. Vol. 24. No 7. P. 2066–2082. https://doi.org/10.1177/1081286518811881.

5. Laalej H., Lang Z.Q., Daley S., Zazas I., Billings S., Tomlinson G. Application of nonlinear damping to vibration isolation: an experimental study. *Nonlinear Dynamics.* 2012. Vol. 69. P. 409–421. https://doi.org/10.1007/s11071-011-0274-1.

6. Ibrahim R.A. Recent advances in nonlinear passive vibration isolators. *Journal of Sound and Vibration*. 2008. Vol. 314. Iss. 3–5. P. 371–452. https://doi.org/10.1016/j.jsv.2008.01.014.

7. Гимадиев Р.Ш. Моделирование динамики раздува избыточным давлением трехслойной резиноподобной оболочки. *Известия Уфимского научного центра РАН*. 2018. №1. С. 5–10.

8. Гимадиев Р. Ш., Гимадиева Т.З., Паймушин В.Н. О динамическом процессе раздувания тонких оболочек из эластомеров под действием избыточного давления. *Прикладная математика и механика*. 2014. Т. 78. №2. С. 236–248.

9. Green M.S., Tobolsky A.V. A new approach to the theory of relaxing polymeric media. *Journal of Chemical Physics.* 1946. Vol. 14. P. 80–92. https://doi.org/10.1063/1.1724109.

10. Sidoroff F. Un modele viscoelastique non lineire avec configuration intermediaire. *Journal de Mecanique*. 1974. Vol. 13. Iss. 4. P. 679–713.

11. Lubliner J. A model of rubber viscoelasticity. *Mechanics Research Communications.* 1985. Vol. 12. Iss. 2. P. 93–99. DOI: 10.1016/0093-6413(85)90075-8.

12. Asnafi A. Dynamic stability recognition of cylindrical shallow shells in Kelvin – Voigt viscoelastic medium under transverse white noise excitation. *Nonlinear Dynamics*. 2017. Vol. 90. P. 2125–2135. https://doi.org/10.1007/s11071-017-3789-2.

13. Reese S., Govindee S. A theory of finite viscoelasticity and numerical aspects. *International Journal of Solids and Structures*. 1998. Vol. 35. Iss. 26-27. P. 3455–3482. DOI: 10.1016/s0020-7683(97)00217-5.

14. Huber N., Tsakmakis C. Finite deformation viscoelasticity laws. *Mechanics of Materials.* 2000. Vol. 32. Iss. 1. P. 1–18. https://doi.org/10.1016/S0167-6636(99)00045-9.

15. Liu Min, Hoo Fatt M.S. A constitutive equation for filled rubber under cyclic loading. *International Journal of Non-linear Mechanics*. 2011. Vol. 46. Iss. 2. P. 446–456. https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2010.11.006.

16. Bergstrom J.S., Boyce M.C. Constitutive modeling of the large strain time-dependent behavior of elastomers. *Journal of the Mechanics and Physics of Solid*s. 1998. Vol. 46. Iss. 5. P. 931–954. https://doi.org/10.1016/S0022-5096(97)00075-6.

17. Bergstrom J.C., Boyce M.C. Constitutive modeling of the time-dependent and cyclic loading of elastomers and application to soft biological tissues. *Mechanics of Materials.* 2001. Vol. 33. Iss. 9. P. 523–530. https://doi.org/10.1016/S0167-6636(01)00070-9.

18. Wei Hong. Modeling viscoelastic dielectrics. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2011. Vol. 59. Iss. 3. P. 637–650. https://doi.org/10.1016/j.jmps.2010.12.003.

19. Xuanhe Zhao, Soo Jin Adrian Koh, Zhigang Suo. Nonequilibrium thermodynamics of dielectric elastomers. *International Journal of Applied Mechanics*. 2011. Vol. 3. Iss. 2. P. 203–217. https://doi.org/10.1142/S1758825111000944.

20. Choon Chiang Foo, Shengqiang Cai, Soo Jin Adrian Koh et al. Model of dissipative dielectric elastomers. *Journal of Applied Physics*. 2012. Vol. 111. Iss. 3. Article No 034102. https://doi.org/10.1063/1.3680878.

21. Li Yunlong, Oh Inkyu, Chen Jiehao, Zhang Haohui, Hu Yuhang. Nonlinear dynamic analysis and active control of visco-hyperelastic dielectric elastomer membrane. *International Journal of Solids and Structures*. 2018. Vol. 152-153. P. 28–38. https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2018.05.006.

22. Zhentao Zhao, Datian Niu, Hongwu Zhang, Xuegang Yuan. Nonlinear dynamics of loaded visco-hyperelastic spherical shells. *Nonlinear Dynamics*. 2020. Vol. 101. P. 911–933. https://doi.org/10.1007/s11071-020-05855-5.

23. Коровайцева Е.А. Моделирование процессов деформирования тонкостенных оболочек вращения из гиперупругих материалов: *Дисс. ... докт. физ.-мат. наук*. Москва, 2024. 290 с.

24. Коровайцева Е.А. Применение метода дифференцирования по параметру в решении нелинейных задач стационарной динамики осесимметричных мягких оболочек. *Вестник Самарского государственного технического университета. Серия Физико-математические науки*. 2021. Т. 25. №3. С. 556–570. https://doi.org/10.14498/vsgtu1855.

References

1. Sheng J.J., Chen H.L., Liu L., Zhang J.S., Wang Y.Q., Jia S.H. Dynamic electromechanical performance of viscoelastic dielectric elastomers. *J. Appl. Phys*. 2013. Vol. 114. Iss. 13. Article No 134101. https://doi.org/10.1063/1.4823861.

2. Gu G.Y., Zhu J., Zhu L.M., Zhu X.Y. A survey on dielectric elastomer actuators for soft robots. *Bioinspiration & Biomimetics*. 2017. Vol. 12. Iss. 1. Article No 011003. DOI: 10.1088/1748-3190/12/1/011003.

3. Haslach H.W., Humphrey J.D. Dynamics of biological soft tissue and rubber: internally pressurized spherical membranes surrounded by a fluid. *Int. J. Non Linear Mech*. 2004. Vol. 39. Iss. 3. P. 399–420. https://doi.org/10.1016/S0020-7462(02)00196-8.

4. Mihai L.A., Fitt D., Woolley T.E., Goriely A. Likely equilibria of stochastic hyperelastic spherical shells and tubes. *Math. Mech. Solids*. 2019. Vol. 24. No 7. P. 2066–2082. https://doi.org/10.1177/1081286518811881.

5. Laalej H., Lang Z.Q., Daley S., Zazas I., Billings S., Tomlinson G. Application of non-linear damping to vibration isolation: an experimental study. *Nonlinear Dyn*. 2012. Vol. 69. P. 409–421. https://doi.org/10.1007/s11071-011-0274-1.

6. Ibrahim R.A. Recent advances in nonlinear passive vibration isolators. *J. Sound Vib.* 2008. Vol. 314. Iss. 3–5. P. 371–452. https://doi.org/10.1016/j.jsv.2008.01.014 (In Russian).

7. Gimadiev R.Sh. Modelirovanie dinamiki razduva izbytochnym davleniem trekhsloynoy rezinopodobnoy obolochki [Modeling the dynamics of inflation of three-layer rubber-like shell with excessive pressure]. *Izvestiya Ufimskogo nauchnogo tsentra RAN* [*Proceedings of the RAS Ufa Scientific Centre*]. 2018. No 1. P. 5–10 (In Russian).

8. Gimadiyev P.S., Gimadiyeva T.Z., Paimushin V.N. The dynamic process of the inflation of thin elastomeric shells under the action of an excess pressure. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2014. Vol. 78. No 2. P. 163–171. DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2014.07.009.

9. Green M.S., Tobolsky A.V. A new approach to the theory of relaxing polymeric media. *J. Chem. Phys.* 1946. Vol. 14. P. 80–92. https://doi.org/10.1063/1.1724109.

10. Sidoroff F. Un modele viscoelastique non lineire avec configuration intermediaire. *Journal de Mecanique*. 1974. Vol. 13. Iss. 4. P. 679–713.

11. Lubliner J. A model of rubber viscoelasticity. *Mech. Res. Commun*. 1985. Vol. 12. Iss. 2. P. 93–99. DOI: 10.1016/0093-6413(85)90075-8.

12. Asnafi A. Dynamic stability recognition of cylindrical shallow shells in Kelvin – Voigt viscoelastic medium under transverse white noise excitation. *Nonlinear Dyn*. 2017. Vol. 90. P. 2125–2135. https://doi.org/10.1007/s11071-017-3789-2.

13. Reese S., Govindee S. A theory of finite viscoelasticity and numerical aspects. *Int. J. Solids Struct.* 1998. Vol. 35. Iss. 26-27. P. 3455–3482. DOI: 10.1016/s0020-7683(97)00217-5.

14. Huber N., Tsakmakis C. Finite deformation viscoelasticity laws. *Mech. Mater*. 2000. Vol. 32. Iss. 1. P. 1–18. https://doi.org/10.1016/S0167-6636(99)00045-9.

15. Liu Min, Hoo Fatt M.S. A constitutive equation for filled rubber under cyclic loading. *Int. J. Non Linear Mech*. 2011. Vol. 46. Iss. 2. P. 446–456. https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2010.11.006.

16. Bergstrom J.S., Boyce M.C. Constitutive modeling of the large strain time-dependent behavior of elastomers. *J. Mech. Phys. Solids*. 1998. Vol. 46. Iss. 5. P. 931–954. https://doi.org/10.1016/S0022-5096(97)00075-6.

17. Bergstrom J.C., Boyce M.C. Constitutive modeling of the time-dependent and cyclic loading of elastomers and application to soft biological tissues. *Mech. Mater.* 2001. Vol. 33. Iss. 9. P. 523–530. https://doi.org/10.1016/S0167-6636(01)00070-9.

18. Wei Hong. Modeling viscoelastic dielectrics. *J. Mech. Phys. Solids*. 2011. Vol. 59. Iss. 3. P. 637–650. https://doi.org/10.1016/j.jmps.2010.12.003.

19. Xuanhe Zhao, Soo Jin Adrian Koh, Zhigang Suo. Nonequilibrium thermodynamics of dielectric elastomers. *Int. J. Appl. Mech.* 2011. Vol. 3. Iss. 2. P. 203–217. https://doi.org/10.1142/S1758825111000944.

20. Choon Chiang Foo, Shengqiang Cai, Soo Jin Adrian Koh et al. Model of dissipative dielectric elastomers. *J. Appl. Phys.* 2012. Vol. 111. Iss. 3. Article No 034102. https://doi.org/10.1063/1.3680878.

21. Li Yunlong, Oh Inkyu, Chen Jiehao, Zhang Haohui, Hu Yuhang. Nonlinear dynamic analysis and active control of visco-hyperelastic dielectric elastomer membrane. *Int. J. Solids Struct.* 2018. Vol. 152-153. P. 28–38. https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2018.05.006.

22. Zhentao Zhao, Datian Niu, Hongwu Zhang, Xuegang Yuan. Nonlinear dynamics of loaded visco-hyperelastic spherical shells. *Nonlinear Dyn.* 2020. Vol. 101. P. 911–933. https://doi.org/10.1007/s11071-020-05855-5.

23. Korovaytseva E.A. Modelirovanie protsessov deformirovaniya tonkostennykh obolochek vrashcheniya iz giperuprugikh materialov [Modeling of processes of hyperelastic thin-walled shells of revolution deforming]. *Dissertatsiya doktora fiziko-matematicheskikh nauk* [*D. Sci. (Phys.&Math*). *Dissertation*]. Moscow, 2024. 290 p. (In Russian).

24. Korovaytseva E.A. Primenenie metoda differentsirovaniya po parametru v reshenii nelineynykh zadach statsionarnoy dinamiki osesimmetrichnykh myagkikh obolochek [Parameter differentiation method in solution of axisymmetric soft shells stationary dynamics nonlinear problems]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya Fiziko-matematicheskie nauki* [*Journal of Samara State Technical University. Ser. Physical and Mathematical Sciences*]. 2021. Vol. 25. No 3. P. 556–570 (In Russian).

VARIOUS MODELS OF INTERNAL FRICTION USING IN CALCULATIONS OF HYPERELASTIC SHELLS DYNAMIC DEFORMING

Korovaytseva E.A.

Institute of Mechanics, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation

katrell@mail.ru

Received by the Editor 2024/10/29

Physically and geometrically nonlinear initial boundary value problem statement concerning hyperelastic shell of revolution deforming taking into account internal friction is represented in the work. Three models of viscosity are considered – Voigt, Maxwell and large viscoelastic strains. For problem solution method of lines combined with parameter continuation method is used. At this time derivatives of resolving variables are replaced by their four-point approximations. Thus nonlinear initial boundary value problem is reduced to a nonlinear boundary value problem, solved consequently for each time layer. Differentiation parameter for this problem is used in the form suggested by V.I. Shalashilin. As an example the problem of spherical shell made of neohookean material inflation is considered. Cases of suddenly applied constant pressure and harmonic pressure are investigated. Parameters of classical models of internal friction are chosen in such a way that for Maxwell and large viscoelastic strains models values of relaxation time coincide, and for Maxwell and Voigt models values of damping coefficient coincide. For the case of shell inflation by constant pressure large viscoelastic strains model using leads to occurrence of oscillation process with constant amplitude which is much smaller than shell oscillations amplitude without taking internal friction into account. In the case of harmonic pressure acting the same character of differences of calculation results obtained using large viscoelastic strains model and Voigt or Maxwell models remains. Investigation of time dependence of elastic and viscous strains calculated by Maxwell and large viscoelastic strains showed existence of elastic strain oscillations characterized by the smallest frequency for Maxwell model.

Keywords: hyperelastic materials, nonlinear initial boundary value problems, large strains, viscoelasticity, parameter continuation method.