

УДК 534.1

DOI: 10.32326/1814-9146-2025-87-1-70-80

**РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПРОДОЛЬНЫХ ВОЛН
В СТЕРЖНЕ МИНДЛИНА – ГЕРМАНА,
ПОГРУЖЕННОМ В НЕЛИНЕЙНО-УПРУГУЮ СРЕДУ***

© 2025 г.

Леонтьева А.В.

*Институт проблем машиностроения РАН – филиал Федерального
исследовательского центра «Институт прикладной физики
им. А.В. Гапонова-Грехова РАН», Нижний Новгород, Российская Федерация*

alconav@mail.ru

Поступила в редакцию 14.10.2024

Изучается распространение продольных волн в однородном стержне, погруженном в нелинейно-упругую среду. Динамическое поведение стержня определяется теорией Миндлина – Германа, которая пренебрегает гипотезой о пропорциональности поперечных деформаций продольным деформациям при осевом растяжении или сжатии. Для описания движения частиц в поперечном направлении вводится дополнительная функция, обеспечивающая большую точность модели.

Исходная система уравнений сводится к одному нелинейному уравнению четвертого порядка относительно продольного смещения частиц стержня. Это уравнение, с одной стороны, позволяет получить эволюционное уравнение и найти его точное решение, с другой – допускает качественное исследование в двух частных случаях в переменных бегущей волны.

Показано, что эволюционное уравнение представляет собой уравнение Островского с дополнительным квадратично-нелинейным слагаемым. Методом простейших уравнений для эволюционного уравнения найдены точные решения из класса стационарных волн, сохраняющих свою форму и скорость в процессе распространения. Волны имеют вид солитона классического профиля. Тип нелинейности (мягкая, жесткая) среды влияет на полярность локализованной волны. Среде с мягкой нелинейностью соответствует солитон положительной полярности. Получены зависимости амплитуды, ширины и скорости нелинейной волны от параметров системы, характеризующих нелинейно-упругую среду.

Случаи, доступные для качественного исследования, возможны при равенстве нулю коэффициента при старшей производной. В одном случае исследуется уравнение ангармонического осциллятора с двумя типами квадратичной нелинейности. Получен первый интеграл уравнения и построены фазовые портреты при различных соотношениях параметров системы, влияющих на существование и вид фазовых траекторий. В другом случае исследуется классическое уравнение ангармонического осциллятора с квад-

* Выполнено в рамках государственного задания на проведение фундаментальных научных исследований на 2024–2026 гг. (FFUF-2024-0031, № НИОКТР 1023032800130-3-2.3.2).

ратичной нелинейностью, которое достаточно хорошо изучено. Качественный анализ частных случаев показывает возможность существования в рассматриваемой системе локализованных и нелинейных периодических волн.

Ключевые слова: продольная волна, модель Миндлина – Германа, нелинейно-упругая среда, солитон.

Введение

Классическая модель Д. Бернулли (техническая теория) показывает, что продольные волны в стержне распространяются с постоянной скоростью, которая зависит только от модуля Юнга и плотности материала и не зависит от частоты. Экспериментально доказано, что такая зависимость существует [1–4].

Математические модели Рэлея и Лява, Бишопа, Миндлина и Германа (уточненные теории) предоставляют возможности для анализа частотной дисперсии [5]. Модель Миндлина – Германа описывает дисперсию продольных волн в широком диапазоне частот благодаря описанию движения частиц в поперечном направлении с помощью введения дополнительной функции, что обеспечивает большую точность модели Миндлина – Германа по сравнению с другими моделями [6–9].

В статье [10] найдено точное решение задачи о продольных колебаниях изотропного стержня Миндлина – Германа, закрепленного на концах. Представлен новый подход к проблеме сопряженного продольного и поперечного распространения волн напряжения в изотропном толстом и упругом стержне. Точное решение получено в терминах функций Грина непосредственно из лагранжиана.

В [11] на основе молекулярно-динамического моделирования показано существование вторых мод колебаний, возбуждающихся в балке Тимошенко и стержне Миндлина – Германа. Существование второй распространяющейся моды, связанной со стержнем Миндлина – Германа, подтверждается результатами моделирования. Отмечено, что балка Тимошенко показывает меньшую точность по отношению к результатам моделирования. Указано, что эти теории стержня и балки точны в ограниченном интервале частот, и их применение для ряда задач оправданно.

В [12] классические стержневые модели, двухмодовая Миндлина – Германа и одномодовая Рэлея – Бишопа расширены с помощью модифицированной теории парных напряжений. Проведен сравнительный анализ полученных моделей с классическими моделями.

Настоящую статью можно считать продолжением публикаций [13, 14] или альтернативным исследованием рассматриваемой задачи, позволяющим выявить новые эффекты.

1. Математическая модель задачи

Система уравнений, описывающая продольные колебания стержня Миндлина – Германа [15], погруженного в нелинейно-упругую среду, имеет вид [13]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_l^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{2\kappa_2^2 \lambda}{a\rho} \frac{\partial w}{\partial x} + h_1 u + h_2 u^2 = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \kappa_1^2 c_\tau^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{8\kappa_2^2 (\lambda + \mu)}{a^2 \rho} w + \frac{4\kappa_2^2 \lambda}{a\rho} \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (2)$$

где $u(x, t)$, $w(x, t)$ – продольное и поперечное смещения частиц стержня; $c_\tau = \sqrt{\mu/\rho}$ – скорость распространения сдвиговых волн; $c_l = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ – скорость распространения продольных волн в материале стержня ($c_\tau < c_l$); a – радиус поперечного сечения стержня, ρ – плотность материала стержня; λ , μ – коэффициенты Ламе, κ_1 , κ_2 – корректирующие коэффициенты, выбираемые из условия близости дисперсионных веток модели Миндлина – Германа и точного решения Похгаммера – Кри [16]; h_1 , h_2 – коэффициенты, характеризующие нелинейно-упругую среду.

Система уравнений (1), (2) сводится к одному уравнению относительно продольного смещения частиц, которое в безразмерных переменных примет вид:

$$(1 + m_1) \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} - (1 + m_1 m_2 - m_3) \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \frac{\partial^4 U}{\partial \tau^4} - (1 + m_2) \frac{\partial^4 U}{\partial z^2 \partial \tau^2} + m_2 \frac{\partial^4 U}{\partial z^4} + m_1 U + m_4 U^2 + m_4 \left(\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} U^2 - m_2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} U^2 \right) = 0, \quad (3)$$

где $U = u/u_0$, $z = x/X$, $\tau = t/T$ – безразмерные величины перемещения, координаты и времени, соответственно. Характерные величины координаты X , времени T (u_0 – характерное значение перемещения) и безразмерные комплексы исходных параметров имеют вид:

$$T^2 = \frac{a^2 \rho}{8\kappa_2^2 (\lambda + \mu)}, \quad X^2 = \frac{a^2 \rho c_l^2}{8\kappa_2^2 (\lambda + \mu)},$$

$$m_1 = \frac{a^2 \rho h_1}{8\kappa_2^2 (\lambda + \mu)}, \quad m_2 = \frac{\kappa_l^2 c_\tau^2}{c_l^2}, \quad m_3 = \frac{\kappa_2^2 \lambda^2}{(\lambda + \mu) c_l^2 \rho}, \quad m_4 = \frac{a^2 \rho h_2 u_0}{8\kappa_2^2 (\lambda + \mu)},$$

где m_1 и m_4 характеризуют, соответственно, линейную и нелинейную жесткости среды, причем $m_1 > 0$ и $m_4 > 0$ («жесткая» нелинейность) или $m_4 < 0$ («мягкая» нелинейность), $0 < m_2 < 1$, $0 < m_3 < 1$.

2. Эволюционное уравнение и его точное решение в переменных бегущей волны

Решение уравнения (3) ищется в виде асимптотического разложения по малому параметру $U = U_0 + \varepsilon U_1 + \dots$ ($\varepsilon \ll 1$) и вводятся медленные переменные координаты и времени: $\xi = \varepsilon^{1/2} (z - c\tau)$ и $\eta = \varepsilon^{3/2} \tau$. Возмущение, распространяясь со скоростью вдоль оси z , медленно эволюционирует в пространстве и времени из-за нелинейности и дисперсии. Параметры m_1 , m_4 , характеризующие нелинейно-упругую среду, считаются малыми величинами ($m_1 \sim \varepsilon^{3/2}$, $m_4 \sim \varepsilon^{3/2}$).

Во втором приближении по малому параметру ε имеется уравнение

$$\frac{\partial^2 U_0}{\partial \xi \partial \eta} + a_1 \frac{\partial^4 U_0}{\partial \xi^4} - a_2 U_0 - a_3 U_0^2 - a_4 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} U_0^2 = 0, \quad (4)$$

коэффициенты которого определяются формулами:

$$a_1 = \frac{m_3 (1 - m_2 - m_3)}{2\sqrt{1 - m_3}}, \quad a_2 = \frac{m_1}{2\varepsilon^2 \sqrt{1 - m_3}}, \quad a_3 = \frac{m_4}{2\varepsilon^2 \sqrt{1 - m_3}}, \quad a_4 = \frac{m_4 (1 - m_2 - m_3)}{2\varepsilon \sqrt{1 - m_3}}.$$

При получении уравнения (4) учтено, что скорость c определяется выражением $c = \sqrt{1 - m_3}$, найденным из уравнения первого приближения.

Из записи эволюционного уравнения (4) в виде

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial U_0}{\partial \eta} + \tilde{a}_4 U_0 \frac{\partial U_0}{\partial \xi} + a_1 \frac{\partial^3 U_0}{\partial \xi^3} \right) - a_2 U_0 - a_3 U_0^2 = 0 \quad (5)$$

($\tilde{a}_4 = -2a_4$) следует, что это обобщенное уравнение Островского с дополнительным квадратично-нелинейным слагаемым, не содержащим производных.

Уравнение (5) без последнего слагаемого – классическое уравнение Островского [17–19]. Известно, что оно не имеет точных решений. Наличие дополнительной квадратичной нелинейности позволяет найти точные решения в виде солитонов.

В переменных бегущей волны ($\chi = \xi - v\eta$) уравнение (5) запишется в виде

$$(-vU_0' + \tilde{a}_4 U_0 U_0' + a_1 U_0''')' - a_2 U_0 - a_3 U_0^2 = 0, \quad (6)$$

где v – скорость стационарной волны, распространяющейся в положительном направлении оси ξ .

Методом простейших уравнений, предложенным Н.А. Кудряшовым [20], находим два точных решения уравнения (6):

$$U_0(\chi) = \frac{3m_1}{2m_4} \left(\text{th}^2 \left(\sqrt{\frac{m_1}{4\epsilon m_3}} \chi \right) - 1 \right), \quad U_0(\chi) = \frac{m_1}{2m_4} \left(1 - 3 \text{th}^2 \left(\sqrt{-\frac{m_1}{4\epsilon m_3}} \chi \right) \right), \quad (7)$$

из которых только одно пригодно для анализа волнового процесса при учете интервалов изменения безразмерных параметров m_i .

Решение (7) является локализованной волной и имеет классический симметричный колоколообразный профиль с нулевым смещением подошвы вдоль вертикальной оси. Знак параметра нелинейной жесткости m_4 влияет на полярность солитона. Профиль решения $U_0(\chi)$ при отрицательных значениях параметра изображен на рис. 1.

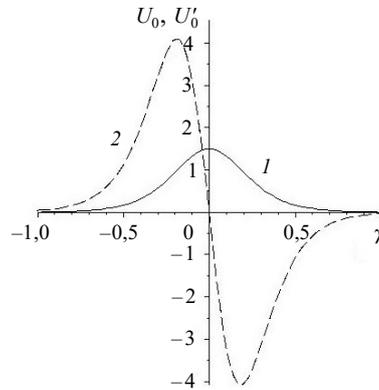


Рис. 1. Зависимости $U_0(\chi)$ – кривая 1 и $U_0'(\chi)$ – кривая 2 при $m_4 < 0$

Выражения для скорости, амплитуды и ширины солитона

$$v = \frac{m_1(1 - m_2 - m_3) - m_3}{2\epsilon\sqrt{1 - m_3}}, \quad A = \frac{3m_1}{2|m_4|}, \quad \Delta = 2\sqrt{\epsilon} \sqrt{\frac{m_3}{m_1}}$$

показывают, как внешняя нелинейно-упругая среда влияет на параметры волны. При изменении параметра линейной жесткости поведение солитона является классическим. От параметра нелинейной жесткости зависит только амплитуда волны, что указывает на аномальное поведение солитона.

3. Частные случаи исходного уравнения и их качественный анализ

Исходное безразмерное уравнение (3) в переменных бегущей волны ($\theta = z - vt$, v – скорость стационарной волны), преобразованное к виду

$$\begin{aligned} & (v^4 - (1 + m_2)v^2 + m_2) \frac{d^4 U}{d\theta^4} + ((1 + m_1)v^2 - 1 - m_1 m_2 + m_3) \frac{d^2 U}{d\theta^2} + \\ & + m_1 U + m_4 U^2 + m_4 (v^2 - m_2) \frac{d^2}{d\theta^2} U^2 = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

допускает качественное исследование в частных случаях.

При равенстве нулю коэффициента при старшей производной ($v^2 = 1$, $v^2 = m_2$) из (8) следуют два уравнения второго порядка:

$$U'' + \frac{m_1}{m_1(1 - m_2) + m_3} U + \frac{m_4}{m_1(1 - m_2) + m_3} U^2 + \frac{m_4(1 - m_2)}{m_1(1 - m_2) + m_3} (U^2)'' = 0, \quad (9)$$

$$U'' + \frac{m_1}{-1 + m_2 + m_3} U + \frac{m_4}{-1 + m_2 + m_3} U^2 = 0. \quad (10)$$

Первое уравнение – уравнение ангармонического осциллятора с двумя типами квадратичной нелинейности; второе, уравнение (10), – классическое уравнение ангармонического осциллятора с квадратичной нелинейностью, которое достаточно хорошо изучено, и известны его сепаратрисное и периодическое решения [15].

Уравнение (9) имеет первый интеграл

$$\left(\frac{dU}{d\theta} \right)^2 = \frac{-d_2 d_3 U^4 / 2 - (d_2 + 2d_1 d_3) U^3 / 3 - d_1 U^2 / 2 + C_0}{(1 + 2d_3 U)^2 / 2},$$

где C_0 – константа интегрирования, d_i – коэффициенты уравнения,

$$d_1 = \frac{m_1}{m_1(1 - m_2) + m_3}, \quad d_2 = \frac{m_4}{m_1(1 - m_2) + m_3}, \quad d_3 = \frac{m_4(1 - m_2)}{m_1(1 - m_2) + m_3}.$$

Фазовое пространство делится на области с различным типом траекторий кривыми первого (вертикальная прямая) и второго (эллипс) порядков

$$1 + 2d_3 U = 0 \quad \text{или} \quad 1 + \frac{2m_4(1 - m_2)}{m_1(1 - m_2) + m_3} U = 0, \quad (11)$$

и

$$\begin{aligned} & (U_\theta)^2 + \frac{1}{4(1 - m_2)} \left(U + \frac{m_1}{2m_4} \left(1 - \frac{m_3}{3m_1(1 - m_2)} \right) \right)^2 = \\ & = \frac{1}{2(1 - m_2)} \left(\frac{m_1}{2m_4} \right)^2 \left(1 - \left(\frac{m_3}{3m_1(1 - m_2)} \right)^2 \right), \end{aligned} \quad (12)$$

их существование на плоскости (U, U_θ) и взаимное расположение определяют количество и качество замкнутых траекторий. Кривая (12) не является областью запрещенных движений, но при взаимодействии с прямой, то есть при наличии общих точек, принимает такой характер. Центр эллипса смещен вдоль горизонтальной оси и при $m_2 = 3/4$ вырождается в окружность.

Несколько возможных вариантов расположения асимптоты (11) и кривой (12) реализуются при выполнении условий:

$$\begin{cases} 3m_1(1-m_2) - m_3 > 0, \\ m_1(1-m_2) - m_3 = 0, \end{cases} \quad (13)$$

$$\begin{cases} 3m_1(1-m_2) - m_3 > 0, \\ m_1(1-m_2) - m_3 < 0, \end{cases} \quad (14)$$

$$\begin{cases} 3m_1(1-m_2) - m_3 > 0, \\ m_1(1-m_2) - m_3 > 0, \end{cases} \quad (15)$$

$$3m_1(1-m_2) - m_3 \leq 0. \quad (16)$$

На тип фазовых траекторий уравнения (9) влияют числовые значения параметров m_1-m_3 . Первое условие в системах (13)–(15) определяет существование эллипса на плоскости и в последнем варианте (16) его отсутствие. Второе условие в указанных системах показывает наличие точки касания эллипса и прямой – в (13), точек пересечения – в (15) и их отсутствие – в (14).

Фазовые портреты уравнения (9) при различных соотношениях параметров m_i в (13)–(16) изображены на рис. 2, соответствующие профили волн показаны на рис. 3 ($m_4 > 0$). При отрицательных значениях параметра m_4 фазовый портрет отображается симметрично относительно вертикальной оси.

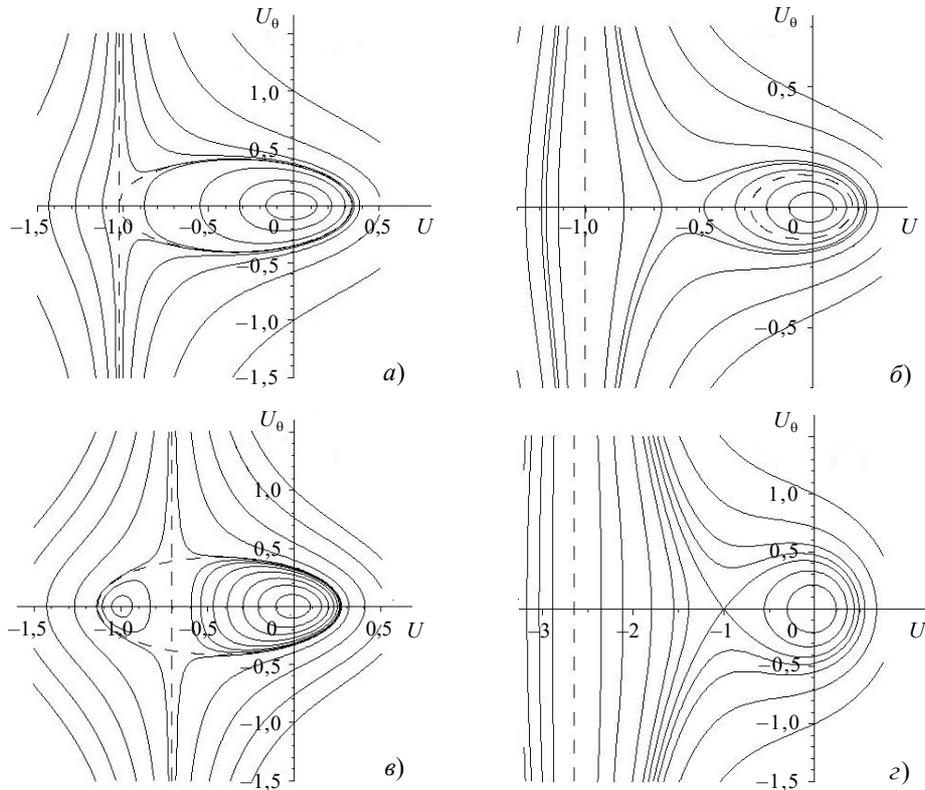


Рис. 2. Фазовый портрет (U, U_0) при $m_4 > 0, m_2 > 1$

Если прямая (11) и эллипс (12) имеют единственную общую точку, то на фазовой плоскости есть замкнутые кривые только одного типа, они концентрические и лежат внутри ограничивающего эллипса (рис. 2а).

Если прямая и эллипс не имеют общих точек (14), то на плоскости очевидно наличие сепаратрисной петли, заключающей в себя эллипс (12) и концентрические кривые, расположенные внутри эллипса и вокруг него (рис. 2б). Два состояния равновесия (особые точки типа «центр» и «седло»), расположенные, соответственно, в начале координат и на промежутке между вертикальной прямой и эллипсом, указывают на существование сепаратрисной петли.

Траектории движения, находящиеся вблизи центра или эллипса (12), соответствуют периодическим квазигармоническим волнам (кривая 1, рис. 3а); траектории, лежащие вблизи сепаратрисы, – кноидальным волнам (кривая 2, рис. 3а). Траектории движения, расположенные на эллипсе (окружности), соответствуют периодическим квазигармоническим (гармоническим) волнам; траектории, находящиеся на сепаратрисе, – локализованным волнам или солитонам (кривая 3, рис. 3а).

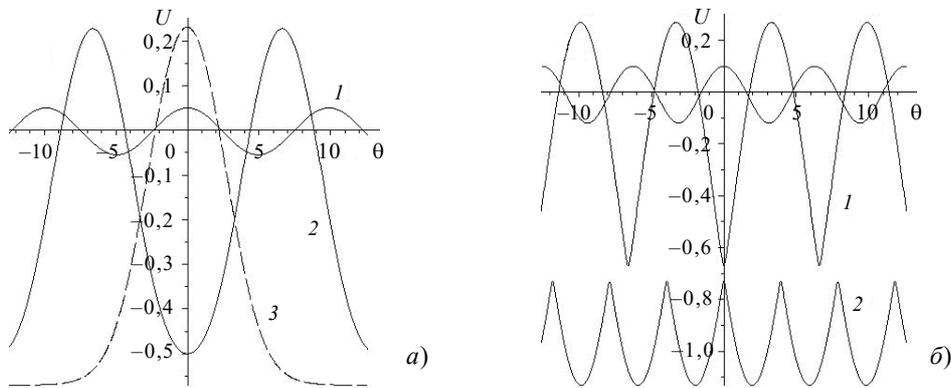


Рис. 3. Профили решений $U(\theta)$ ангармонического осциллятора с квадратичными нелинейностями при различных значениях параметров m_1-m_4 ($m_4 > 0$, $m_2 < 1$)

Если прямая (11) пересекает эллипс (12), то на фазовой плоскости присутствуют замкнутые концентрические кривые двух типов (два состояния равновесия с особыми точками типа «центр»), которые расположены внутри ограничивающего эллипса по обе стороны от вертикальной прямой (рис. 2в). Траектории движения, лежащие вблизи центров, соответствуют периодическим квазигармоническим волнам; траектории, расположенные вблизи границ эллипса и прямой, – кноидальным волнам (кривые 1 и 2, рис. 3б).

В случае мнимого эллипса, который отсутствует на плоскости, имеют место сепаратрисная петля и замкнутые концентрические кривые внутри нее (рис. 2г).

Еще возможен вариант интересный, но не актуальный для исследуемой задачи ($m_2 > 1$), когда эллипс вырождается в гиперболу. Взаимное расположение гиперболы и прямой дает целый ряд замкнутых траекторий на фазовой плоскости (рис. 4).

Если гипербола (12) и прямая (11) не пересекаются или касаются друг друга, то замкнутые траектории отсутствуют (рис. 4а). Если прямая пересекает одну ветвь гиперболы, то на плоскости видны изолированные траектории, заключенные областями запрещенных движений (рис. 4б), как и в случае, если гипербола вырождается в две прямые (рис. 4в). Профили периодических волн (квазигармонических 1 и кно-

идальных 2), соответствующие замкнутым траекториям вблизи устойчивого состояния равновесия и асимптот в виде трех прямых (рис. 4а), изображены на рис. 5. Если прямая пересекает обе ветви гиперболы, то замкнутые concentрические траектории ограничены сепаратрисной петлей (рис. 4з).

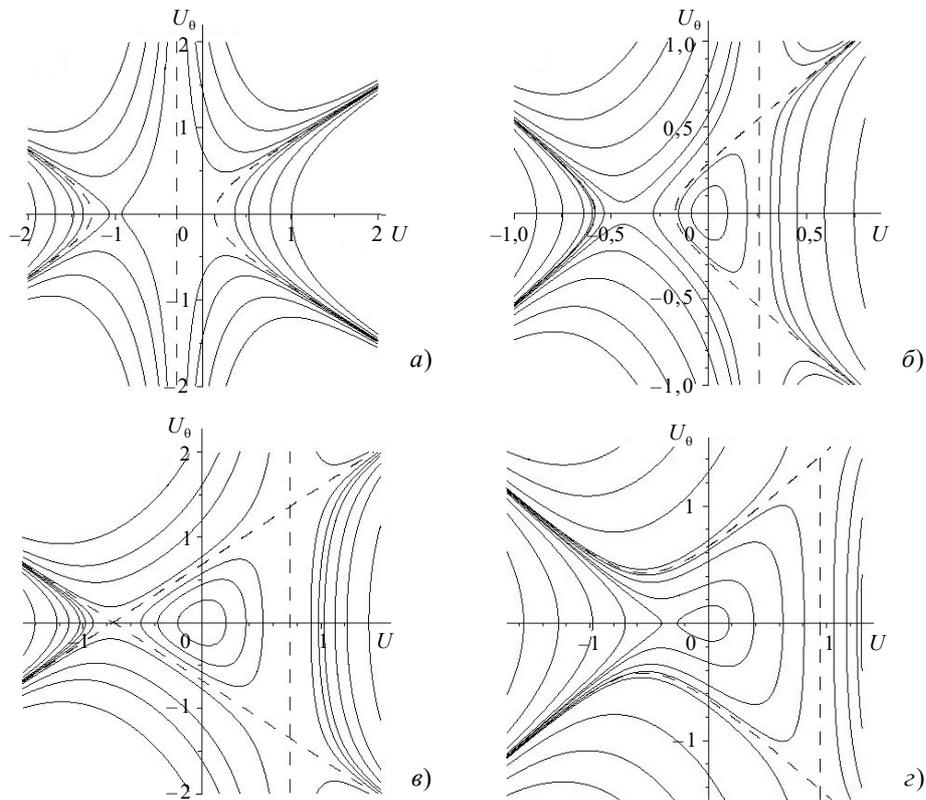


Рис. 4. Фазовый портрет (U, U_0) при $m_4 > 0, m_2 > 1$

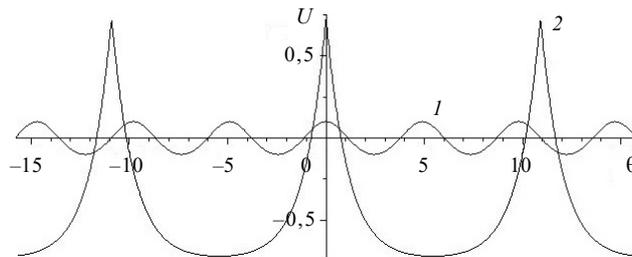


Рис. 5. Профили решений $U(\theta)$ ангармонического осциллятора с квадратичными нелинейностями при различных значениях параметров m_1-m_4 ($m_4 > 0, m_2 > 1$)

Заключение

Показано, что учет внешней нелинейно-упругой среды влияет на существование локализованных и периодических волн, распространяющихся в стержне Миндлина – Германа, совершающем продольные колебания.

Список литературы

1. Зверев В.А. Модуляционный метод измерения дисперсии ультразвука. *Акустический журнал*. 1956. Т. 2. №2. С. 142–145.
2. Abramson H.N., Plass H.J., Ripperger E.A. Stress wave propagation in rods and beams. *Advances in Applied Mechanics*. 1958. Vol. 5. P. 111–194. [https://doi.org/10.1016/S0065-2156\(08\)70019-X](https://doi.org/10.1016/S0065-2156(08)70019-X).
3. Gary G., Klepaczko J.R., Zhao H. Correction de dispersion pour l'analyse des petites deformations aux barres de Hopkinson. *Journal de Physique IV France*. 1991. Vol. 1. Iss. C3. P. 403–410. <https://doi.org/10.1051/jp4:1991357>.
4. Lifshitz J.M., Leber H. Data processing in the split Hopkinson pressure bar tests. *International Journal of Impact Engineering*. 1994. Vol. 15. Iss. 6. P. 723–733. [https://doi.org/10.1016/0734-743X\(94\)90011-9](https://doi.org/10.1016/0734-743X(94)90011-9).
5. Григолюк Э.И., Селезов И.Т. *Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек*. М.: ВИНТИ, 1973. 272 с.
6. Mindlin R.D., Herrmann G. A one-dimensional theory of compressional waves in an elastic rod. *Proceedings of the First U.S. National Congress of Applied Mechanics*. ASME. Chicago, IL. June 11–16, 1951. New York: ASME, 1952. P. 187–191.
7. Mindlin R.D., Herrmann G. Erratum. *Proceedings of the Second U.S. National Congress of Applied Mechanics*. ASME. Ann Arbor, MI. June 14–18, 1954. ASME, 1955. P. 233.
8. Mindlin R.D., Herrmann G. A one-dimensional theory of compressional waves in an elastic rod. *The Collected Papers of Raymond D. Mindlin*. Vol. 1. New York: Springer, 1989. P. 243–248. https://doi.org/10.1007/978-1-4613-8865-4_31.
9. Herrmann G. Forced motions of elastic rods. *Journal of Applied Mechanics*. 1954. Vol. 21. Iss. 3. P. 221–224. <https://doi.org/10.1115/1.4010897>.
10. Tenkam H.M., Anguelov R., Fedotov I., Shatalov M. Exact solution of the Mindlin – Herrmann model for longitudinal vibration of an isotropic rod. *Journal of Engineering Mathematics*. 2016. Vol. 99. P. 185–201. <https://doi.org/10.1007/s10665-015-9827-5>.
11. Patra A.K., Gopalakrishnan S., Ganguli R. Existence of second spectrums of Timoshenko beam and Mindlin – Herrmann rod theories on the basis of atomistic studies. *Acta Mechanica*. 2020. Vol. 231. P. 1159–1171. <https://doi.org/10.1007/s00707-019-02587-5>.
12. Guven U. Two mode Mindlin – Herrmann rod solution based on modified couple stress theory. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2014. Vol. 94. Iss. 12. P. 1011–1016. <https://doi.org/10.1002/zamm.201300066>.
13. Ерофеев В.И., Леонтьева А.В. Ангармонические волны в стержне Миндлина – Германа, погруженном в нелинейно-упругую среду. *Прикладная математика и механика*. 2020. Т. 84. №4. С. 511–528. <https://doi.org/10.31857/S0032823520040049>.
14. Ерофеев В.И., Леонтьева А.В. Квазигармоническая продольная волна, распространяющаяся в стержне Миндлина – Германа, погруженном в нелинейно-упругую среду. *Теоретическая и математическая физика*. 2022. Т. 211. №2. С. 216–235. <https://doi.org/10.4213/tmf10253>.
15. Ерофеев В.И., Кажаяев В.В., Семерикова Н.П. *Волны в стержнях. Дисперсия. Диссипация. Нелинейность*. М.: Физматлит, 2002. 208 с.
16. Ляв А. *Математическая теория упругости*. М.: ОНТИ, 1935. 674 с.
17. Гандарнас М.Л., Брузон М.С. Симметричный анализ и точные решения для некоторых уравнений Островского. *Теоретическая и математическая физика*. 2011. Т. 168. №1. С. 49–64. <https://doi.org/10.4213/tmf6663>.
18. Stepanyants Y.A. On stationary solutions of the reduced Ostrovsky equation: Periodic waves, compactons and compound solitons. *Chaos, Solitons and Fractals*. 2006. Vol. 28. Iss. 1. P. 193–204. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2005.05.020>.
19. Степанянц Ю.А. Нелинейные волны во вращающемся океане (уравнение Островского, его обобщения и приложения). *Известия РАН. Физика атмосферы и океана*. 2020. Т. 56. №1. С. 20–42. <https://doi.org/10.31857/S0002351520010071>.
20. Кудряшов Н.А. *Методы нелинейной математической физики*. М.: МИФИ, 2008. 352 с.

References

1. Zverev V.A. Modulyatsionnyy metod izmereniya dispersii ultrazvuka [Modulation method for measuring ultrasound dispersion]. *Akusticheskij Zhurnal*. 1956. Vol. 2. No 2. P. 142–145 (In Russian).
2. Abramson H.N., Plass H.J., Ripperger E.A. Stress wave propagation in rods and beams. *Advances in Applied Mechanics*. 1958. Vol. 5. P. 111–194. [https://doi.org/10.1016/S0065-2156\(08\)70019-X](https://doi.org/10.1016/S0065-2156(08)70019-X).
3. Gary G., Klepaczko J.R., Zhao H. Correction de dispersion pour l'analyse des petites deformations aux barres de Hopkinson. *Journal de Physique IV France*. 1991. Vol. 1. Iss. C3. P. 403–410. <https://doi.org/10.1051/jp4:1991357>.
4. Lifshitz J.M., Leber H. Data processing in the split Hopkinson pressure bar tests. *Int. J. Impact Eng.* 1994. Vol. 15. Iss. 6. P. 723–733. [https://doi.org/10.1016/0734-743X\(94\)90011-9](https://doi.org/10.1016/0734-743X(94)90011-9).
5. Grigolyuk E.I., Selezov I.T. *Neklassicheskie teorii kolebaniy sterzhney, plastin i obolochek* [Non-Classical Theories of Vibrations of Rods, Plates and Shells]. Moscow. VINITI Publ. 1973. 272 p. (In Russian).
6. Mindlin R.D., Herrmann G. A one-dimensional theory of compressional waves in an elastic rod. *Proceedings of the First U.S. National Congress of Applied Mechanics*. ASME. Chicago, IL. June 11–16, 1951. New York. ASME. 1952. P. 187–191.
7. Mindlin R.D., Herrmann G. Erratum. *Proceedings of the Second U.S. National Congress of Applied Mechanics*. ASME. Ann Arbor, MI. June 14–18. 1954. ASME. 1955. P. 233.
8. Mindlin R.D., Herrmann G. A one-dimensional theory of compressional waves in an elastic rod. *The Collected Papers of Raymond D. Mindlin*. Vol. 1. New York. Springer. 1989. P. 243–248. https://doi.org/10.1007/978-1-4613-8865-4_31.
9. Herrmann G. Forced motions of elastic rods. *J. Appl. Mech.* 1954. Vol. 21. Iss. 3. P. 221–224. <https://doi.org/10.1115/1.4010897>.
10. Tenkam H.M., Anguelov R., Fedotov I., Shatalov M. Exact solution of the Mindlin – Herrmann model for longitudinal vibration of an isotropic rod. *J. Eng. Math.* 2016. Vol. 99. P. 185–201. <https://doi.org/10.1007/s10665-015-9827-5>.
11. Patra A.K., Gopalakrishnan S., Ganguli R. Existence of second spectrums of Timoshenko beam and Mindlin – Herrmann rod theories on the basis of atomistic studies. *Acta Mech.* 2020. Vol. 231. P. 1159–1171. <https://doi.org/10.1007/s00707-019-02587-5>.
12. Guven U. Two mode Mindlin-Herrmann rod solution based on modified couple stress theory. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2014. Vol. 94. Iss. 12. P. 1011–1016. <https://doi.org/10.1002/zamm.201300066>.
13. Erofeev V.I., Leontyeva A.V. Anharmonic waves in a Mindlin – Herrmann rod immersed in a nonlinearly elastic medium. *Mechanics of Solids*. 2020. Vol. 55. Iss. 8. P. 1284–1297. <https://doi.org/10.3103/S0025654420080087>.
14. Erofeev V.I., Leont'eva A.V. Quasiharmonic longitudinal wave propagating in a Mindlin – Herrmann rod in a nonlinearly elastic environment. *Theor. Math. Phys.* 2022. Vol. 211. Iss. 2. P. 625–641. <https://doi.org/10.1134/S004057792205004>.
15. Erofeev V.I., Kazhaev V.V., Semerikova N.P. *Volny v sterzhnyakh. Dispersiya. Dissipatsiya. Nelineynost* [Waves in the Rods. Dispersion. Dissipation. Nonlinearity]. Moscow. Fizmatlit Publ. 2002. 208 p. (In Russian).
16. Love A.E.H. *A Treatise of the Mathematical Theory of Elasticity*. Cambridge. Cambridge University Press. 1920. 653 p.
17. Gandarias M.L., Bruzón M.S. Symmetry analysis and exact solutions of some Ostrovsky equations. *Theoretical and Mathematical Physics*. 2011. Vol. 168. Iss. 1. P. 898–911. <https://doi.org/10.1007/s11232-011-0073-3>.
18. Stepanyants Y.A. On stationary solutions of the reduced Ostrovsky equation: Periodic waves, compactons and compound solitons. *Chaos, Solitons and Fractals*. 2006. Vol. 28. Iss. 1. P. 193–204. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2005.05.020>.
19. Stepanyants Y.A. Nonlinear waves in a rotating ocean (the Ostrovsky equation and its generalizations and applications). *Izvestiya, Atmospheric and Oceanic Physics*. 2020. Vol. 56. No 1. P. 16–32. DOI: 10.1134/S0001433820010077.

20. Kudryashov N.A. *Metody nelineynoy matematicheskoy fiziki* [Methods of Nonlinear Mathematical Physics]. Moscow. MIFI Publ. 2008. 352 p. (In Russian).

**PROPAGATION OF LONGITUDINAL WAVES IN A MINDLIN-HERRMANN ROD
IMMERSED IN A NONLINEAR ELASTIC MEDIUM***

Leonteva A.V.

*Mechanical Engineering Research Institute of the Russian Academy of Sciences –
Branch of Federal Research Center “Institute of Applied Physics n.a. A.V. Gaponov-Grekhov
of the RAS”, Nizhny Novgorod, Russian Federation*

aleonav@mail.ru

Received by the Editor 2024/10/14

In this work, the propagation of longitudinal waves in a homogeneous rod immersed in a non-linear elastic medium is studied. The dynamic behavior of the rod is determined by the Mindlin – Herrmann theory, which neglects the hypothesis of the proportionality of transverse deformations to longitudinal deformations under axial tension or compression. To describe the movement of particles in the transverse direction, an additional function is introduced that provides greater model accuracy.

The initial system of equations reduces to one nonlinear equation of the fourth order relative to the longitudinal displacement of the rod particles. This equation, on the one hand, allows you to obtain an evolutionary equation and find its exact solution, on the other hand, it allows qualitative research in two special cases in traveling wave variables.

It is shown that the evolutionary equation is Ostrovsky's equation with an additional quadratic-nonlinear term. By the method of the simplest equations for the evolutionary equation, exact solutions were found from the class of stationary waves that retain their shape and speed during propagation. Waves have the appearance of a soliton of a classic profile. The type of non-linearity (soft, hard) of the medium affects the polarity of the localized wave. A medium with soft nonlinearity corresponds to a soliton of positive polarity. Relationships of amplitude, width and velocity of nonlinear wave from system parameters characterizing nonlinear elastic medium are obtained.

Cases available for qualitative research are possible if the coefficient at the highest derivative is equal to zero. In one case, the equation of an anharmonic oscillator follows, with two types of quadratic nonlinearity. The first integral of the equation was obtained and phase portraits were constructed at various ratios of system parameters affecting the existence and appearance of phase trajectories. In another case, the classical equation of an anharmonic oscillator with quadratic nonlinearity follows, which is quite well studied. Qualitative analysis of particular cases shows the possibility of the existence, in the system under consideration, of localized and nonlinear periodic waves.

Keywords: longitudinal wave, Mindlin – Herrmann model, nonlinear elastic medium, soliton.

* Completed within the state assignment for conducting fundamental scientific research for 2024–2026 (topic FFUF -2024-0031, No 1023032800130-3-2.3.2).