

УДК 539.3

DOI: 10.32326/1814-9146-2025-87-1-24-42

**УТОЧНЕННАЯ ТРАНСФОРМАЦИОННАЯ МОДЕЛЬ
ДЕФОРМИРОВАНИЯ СТЕРЖНЯ-ПОЛОСЫ,
ЗАКРЕПЛЕННОГО НА ДВУХСТОРОННЕМ
ОПОРНОМ ЭЛЕМЕНТЕ ЧЕРЕЗ УПРУГИЕ ПРОСЛОЙКИ.
2. ПОСТРОЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ.
ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ***

© 2025 г.

Паймушин В.Н.¹, Шишкин В.М.²

¹*Казанский национальный исследовательский технический университет
им. А.Н. Туполева, Казань, Российская Федерация*

²*Вятский государственный университет, Киров, Российская Федерация*

vpajmushin@mail.ru

Поступила в редакцию 16.09.2024

Рассматривается стержень-полоса, состоящий по длине из закрепленного и незакрепленного участков. Закрепленный участок конечной длины считается соединенным с жестким и неподвижным опорным элементом через упругие прослойки. Для представления перемещений стержня и прослоек приняты аппроксимации по сдвиговой модели С.П. Тимошенко с учетом их поперечного обжатия. На основе уравнений движения закрепленного и незакрепленного участков стержня, записанных в перемещениях, найдено точное аналитическое решение задачи о свободных и вынужденных гармонических колебаниях рассматриваемого стержня. Показано, что в рамках используемых аппроксимаций найденное решение разделяется на уравнения, соответствующие независимым между собою продольно-поперечным и изгибно-сдвиговым колебаниям, из которых наибольший интерес представляет последний тип колебаний, происходящих в сравнительно низком диапазоне частот. Для них проведены численные эксперименты по определению собственных форм и частот, а также динамической реакции при резонансных колебаниях стержня-полосы, закрепленного на двухстороннем опорном элементе через упругие прослойки и выполненного из однонаправленного волокнистого композита на основе углеродной ткани ЭЛУР-П и связующего ХТ-118. Показана значительная трансформация напряжений поперечного сдвига в стержне при переходе через границу от незакрепленного участка стержня к закрепленному, а также ярко выраженная локализация напряжений поперечного обжатия в области закрепленного участка, расположенной вблизи отмеченной границы. Выполнен анализ структуры безразмерных корней характеристического уравнения, соответствующего углам поворота попереч-

* Выполнено при финансовой поддержке, выделяемой Казанскому национальному исследовательскому техническому университету им. А.Н. Туполева по государственному заданию в сфере научной деятельности (проект № FZSU-2024-0010, раздел 1) и за счет средств РНФ (проект № 23-19-00021, разделы 2, 3).

ных сечений и прогибам закрепленного участка стержня. Отмечено, что при анализе резонансных колебаний стержня эти корни являются комплексными, что обусловлено введением комплексных модулей упругости для учета демпфирующих свойств материала.

Ключевые слова: колебания, аналитическое решение, стержень-полоса, сдвиговая модель С.П. Тимошенко, поперечное обжатие.

Введение

В статье [1] построена уточненная трансформационная модель динамического деформирования стержня-полосы θ , закрепленного одним концом на двухстороннем опорном элементе 3 через упругие прослойки 1 и 2 (рис. 1), на основе которой были получены уравнения движения в усилиях и перемещениях его закрепленного и незакрепленного участков. Для представления перемещений отмеченных участков стержня и прослоек были приняты аппроксимации по сдвиговой модели С.П. Тимошенко с учетом их поперечного обжатия.

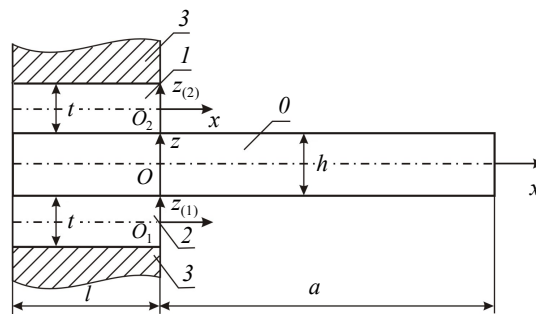


Рис.1. Схема закрепления стержня-полосы в опорном элементе через упругие прослойки

Введение в рассмотрение прослоек в исследуемой механической системе обусловлено наличием их в реальных конструкциях [2]: например, в изделиях конструкционной оптики летательных аппаратов (фонари самолетов, иллюминаторы). Еще одно приложение такой механической системы может состоять в теоретическом обосновании усталостных испытаний композитных пластин на консольный изгиб [3, 4], при которых пластина крепится к двухстороннему опорному элементу через упругие прослойки.

Влияние неидеальности закрепления или соединения элементов конструкций (наличие в них прослоек, проскальзывания, трения) на характер движения конструкции достаточно трудно предсказать, если отсутствует понимание реальных физических механизмов взаимодействия в области закрепления или соединения. Существуют подходы, в рамках которых неидеальности предлагается рассматривать как неопределенности [5–9], но главный вектор развития в этой области в настоящее время формируется в направлении исследования физических механизмов взаимодействия. Одним из таких механизмов является трение, которое может существенно изменить характеристики механической системы типа балка–зажим [10–14].

Настоящая статья является продолжением [1] в плане построения точного аналитического решения задачи о вынужденных и свободных колебаниях стержня-полосы на основе полученных уравнений движения закрепленного и незакрепленного участков стержня, граничных условий для этих уравнений, а также силовых условий сопряжения отмеченных участков.

1. Построение аналитического решения задачи о вынужденных колебаниях стержня

Для построения аналитического решения воспользуемся уравнениями движения в перемещениях, полученными в [1] (в обозначениях этой статьи), для закрепленного и незакрепленного участков рассматриваемого стержня (см. рис. 1):

$$\begin{aligned} B_{11}u_{,xx}^{(0)} + \left(B_{11}v_{31} + \frac{h}{2}G_{13}^0\right)\varphi_{,x}^{(0)} - 2G_{13}^0\frac{u^{(0)}}{t} - \left(\rho h + \frac{2\rho_0 t}{3}\right)\ddot{u}^{(0)} = 0, \\ \left(D_{13} + \frac{G_{13}^0 t h^2}{6}\right)\varphi_{,xx}^{(0)} - \left(B_{33}v_{13} + \frac{G_{13}^0 h}{2}\right)u_{,x}^{(0)} - \left(B_{33} + \frac{E_3^0 h^2}{2t}\right)\varphi^{(0)} - \\ - \left(\frac{\rho h^3}{12} + \frac{\rho_0 t h^2}{6}\right)\ddot{\varphi}^{(0)} = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} D_{11}\gamma_{,xx}^{(0)} - \left(B_{13} - \frac{G_{13}^0 h}{2}\right)w_{,x}^{(0)} - \left(B_{13} + \frac{G_{13}^0 h^2}{2t}\right)\gamma^{(0)} - \left(\frac{\rho h^3}{12} + \frac{\rho_0 t h^2}{6}\right)\dot{\gamma}^{(0)} = 0, \\ \left(B_{13} + \frac{2G_{13}^0 t}{3}\right)w_{,xx}^{(0)} + \left(B_{13} - \frac{G_{13}^0 h}{2}\right)\gamma_{,x}^{(0)} - \frac{2E_3^0}{t}w^{(0)} - \left(\rho h + \frac{2\rho_0 t}{3}\right)\dot{w}^{(0)} = 0, \\ B_{11}(u_{,xx} + v_{31}\varphi_{,x}) - \rho h\ddot{u} = 0, \quad D_{13}\varphi_{,xx} - B_{33}(\varphi + v_{13}u_{,x}) - \frac{\rho h^3}{12}\ddot{\varphi} = 0, \\ D_{11}\gamma_{,xx} - B_{13}(\gamma + w_{,x}) - \frac{\rho h^3}{12}\ddot{\gamma} = 0, \quad B_{13}(\gamma_{,x} + w_{,xx}) - \rho h\dot{w} + p_z = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Предположим, что поверхностная нагрузка p_z в последнем уравнении системы (2), действующая на незакрепленном участке стержня, меняется по гармоническому закону

$$p_z = \tilde{p}_z(x) \exp(i\omega t), \quad (3)$$

где i – мнимая единица, ω – круговая частота. В этом случае для функций $u^{(0)}$, $w^{(0)}$, $\gamma^{(0)}$, $\varphi^{(0)}$ можно ввести представления

$$u^{(0)} = \tilde{u}^{(0)} \exp(i\omega t), \quad w^{(0)} = \tilde{w}^{(0)} \exp(i\omega t), \quad \gamma^{(0)} = \tilde{\gamma}^{(0)} \exp(i\omega t), \quad \varphi^{(0)} = \tilde{\varphi}^{(0)} \exp(i\omega t). \quad (4)$$

С учетом этих представлений из (1) следуют две системы однородных дифференциальных уравнений:

$$\tilde{u}_{,xx}^{(0)} + k_1^{(0)}\tilde{\varphi}_{,x}^{(0)} - k_2^{(0)}\tilde{u}^{(0)} = 0, \quad \tilde{\varphi}_{,xx}^{(0)} - k_3^{(0)}\tilde{u}_{,x}^{(0)} - k_4^{(0)}\tilde{\varphi}^{(0)} = 0, \quad (5)$$

$$\tilde{\gamma}_{,xx}^{(0)} - k_5^{(0)}\tilde{w}_{,x}^{(0)} - k_6^{(0)}\tilde{\gamma}^{(0)} = 0, \quad \tilde{w}_{,xx}^{(0)} + k_7^{(0)}\tilde{\gamma}_{,x}^{(0)} - k_8^{(0)}\tilde{w}^{(0)} = 0, \quad (6)$$

в которых уравнения (5) описывают продольно-поперечные, а уравнения (6) – изгибно-сдвиговые колебания закрепленного участка стержня с обозначениями

$$\begin{aligned} k_1^{(0)} = v_{31} + \frac{G_{13}^0 h}{2B_{11}}, \quad k_2^{(0)} = \frac{1}{B_{11}} \left[\frac{2G_{13}^0}{t} - \left(\rho h + \frac{2\rho_0 t}{3} \right) \omega^2 \right], \\ k_3^{(0)} = \left(B_{33}v_{13} + \frac{G_{13}^0 h}{2} \right) \left(D_{13} + \frac{G_{13}^0 t h^2}{6} \right)^{-1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_4^{(0)} &= \left[B_{33} + \frac{E_3^0 h^2}{2t} - \left(\frac{\rho h^3}{12} + \frac{\rho_0 t h^2}{6} \right) \omega^2 \right] \left(D_{13} + \frac{G_{13}^0 t h^2}{6} \right)^{-1}, \\
k_5^{(0)} &= \frac{1}{D_{11}} \left(B_{13} - \frac{G_{13}^0 h}{2} \right), \quad k_6^{(0)} = \frac{1}{D_{11}} \left[B_{13} + \frac{G_{13}^0 h^2}{2t} - \left(\frac{\rho h^3}{12} + \frac{\rho_0 t h^2}{6} \right) \omega^2 \right], \\
k_7^{(0)} &= \left(B_{13} - \frac{G_{13}^0 h}{2} \right) \left(B_{13} + \frac{2G_{13}^0 t}{3} \right)^{-1}, \\
k_8^{(0)} &= \left[\frac{2E_3^0}{t} - \left(\rho h + \frac{2\rho_0 t}{3} \right) \omega^2 \right] \left(B_{13} + \frac{2G_{13}^0 t}{3} \right)^{-1}. \quad (7)
\end{aligned}$$

Путем введения разрешающей функции $\Phi^{(0)}$ в соответствии с представлениями

$$\tilde{u}^{(0)} = \Phi_{,x}^{(0)}, \quad \tilde{\varphi}^{(0)} = \frac{1}{k_1^{(0)}} (k_2^{(0)} \Phi^{(0)} - \Phi_{,xx}^{(0)}) \quad (8)$$

первое уравнение системы (5) удовлетворяется тождественно, а второе принимает вид

$$\Phi_{,xxxx}^{(0)} - 2m_0 \Phi_{,xx}^{(0)} + n_0 \Phi^{(0)} = 0, \quad (9)$$

где введены коэффициенты $2m_0 = k_2^{(0)} + k_4^{(0)} - k_1^{(0)} k_3^{(0)}$, $n_0 = k_2^{(0)} k_4^{(0)}$.

Аналогично можно ввести еще одну разрешающую функцию $F^{(0)}$ с использованием соотношений

$$\tilde{\gamma}^{(0)} = F_{,x}^{(0)}, \quad \tilde{w}^{(0)} = \frac{1}{k_5^{(0)}} (-k_6^{(0)} F^{(0)} + F_{,xx}^{(0)}), \quad (10)$$

которые обращают в тождество первое уравнение системы (6), а подстановка их во второе уравнение этой системы приводит к уравнению

$$F_{,xxxx}^{(0)} - 2b_0 F_{,xx}^{(0)} + c_0 F^{(0)} = 0 \quad (11)$$

с коэффициентами $2b_0 = k_6^{(0)} + k_8^{(0)} - k_5^{(0)} k_7^{(0)}$, $c_0 = k_6^{(0)} k_8^{(0)}$.

Решения полученных уравнений (9) и (11) имеют вид

$$\Phi^{(0)} = \sum_{j=1}^4 c_j^{(0)} \exp(r_j x), \quad F^{(0)} = \sum_{j=1}^4 d_j^{(0)} \exp(s_j x). \quad (12)$$

Здесь $c_j^{(0)}$, $d_j^{(0)}$ – постоянные интегрирования; r_j , s_j – корни характеристических уравнений, составленных соответственно для (9) и (11), определяемые выражениями

$$\begin{aligned}
r_1 &= \left(m_0 + \sqrt{m_0^2 - n_0} \right)^{1/2}, \quad r_2 = - \left(m_0 + \sqrt{m_0^2 - n_0} \right)^{1/2}, \\
r_3 &= \left(m_0 - \sqrt{m_0^2 - n_0} \right)^{1/2}, \quad r_4 = - \left(m_0 - \sqrt{m_0^2 - n_0} \right)^{1/2}, \\
s_1 &= \left(b_0 + \sqrt{b_0^2 - c_0} \right)^{1/2}, \quad s_2 = - \left(b_0 + \sqrt{b_0^2 - c_0} \right)^{1/2}, \\
s_3 &= \left(b_0 - \sqrt{b_0^2 - c_0} \right)^{1/2}, \quad s_4 = - \left(b_0 - \sqrt{b_0^2 - c_0} \right)^{1/2}. \quad (13)
\end{aligned}$$

Имея корни (13), в соответствии с (8) и (10) находим функции $\tilde{u}^{(0)}, \tilde{\varphi}^{(0)}, \tilde{\gamma}^{(0)}, \tilde{w}^{(0)}$, определяющие движение закрепленного участка стержня:

$$\begin{aligned}\tilde{u}^{(0)} &= \sum_{j=1}^4 c_j^{(0)} r_j \exp(r_j x), & \tilde{\varphi}^{(0)} &= \sum_{j=1}^4 c_j^{(0)} \alpha_j^{(0)} \exp(r_j x), \\ \tilde{\gamma}^{(0)} &= \sum_{j=1}^4 d_j^{(0)} s_j \exp(s_j x), & \tilde{w}^{(0)} &= \sum_{j=1}^4 d_j^{(0)} \beta_j^{(0)} \exp(s_j x).\end{aligned}\quad (14)$$

Здесь введены обозначения

$$\alpha_j^{(0)} = \frac{k_2^{(0)} - r_j^2}{k_1^{(0)}}, \quad \beta_j^{(0)} = \frac{-k_6^{(0)} + s_j^2}{k_5^{(0)}}. \quad (15)$$

В соответствии с (4) для усилий $T_x^{(0)}, Q_{xz}^{(0)}$ и моментов $M_x^{(0)}, H_{xz}^{(0)}$ на закрепленном участке стержня можно ввести представления

$$\begin{aligned}T_x^{(0)} &= \tilde{T}_x^{(0)} \exp(i\omega\tau), & Q_{xz}^{(0)} &= \tilde{Q}_{xz}^{(0)} \exp(i\omega\tau), \\ M_x^{(0)} &= \tilde{M}_x^{(0)} \exp(i\omega\tau), & H_{xz}^{(0)} &= \tilde{H}_{xz}^{(0)} \exp(i\omega\tau),\end{aligned}\quad (16)$$

в которых величины $\tilde{T}_x^{(0)}, \tilde{Q}_{xz}^{(0)}, \tilde{M}_x^{(0)}, \tilde{H}_{xz}^{(0)}$ на основании соотношений упругости

$$\begin{aligned}T_x^{(0)} &= B_{11}(u_{,x}^{(0)} + \nu_{31}\varphi^{(0)}), & T_z^{(0)} &= B_{33}(\varphi^{(0)} + \nu_{13}u_{,x}^{(0)}), \\ T_{xz}^{(0)} &= B_{13}(\gamma^{(0)} + w_{,x}^{(0)}), & M_x^{(0)} &= D_{11}\gamma_{,x}^{(0)}, & M_{xz}^{(0)} &= D_{13}\varphi_{,x}^{(0)},\end{aligned}\quad (17)$$

а также зависимостей

$$\begin{aligned}Q_{xz}^{(0)} &= T_{xz}^{(0)} + \frac{T_{xz}^+}{2} + \frac{M_{xz}^-}{t}, & H_{xz}^{(0)} &= M_{xz}^{(0)} - \frac{h}{2} \left(\frac{T_{xz}^-}{2} + \frac{M_{xz}^+}{t} \right), \\ T_{xz}^+ &= G_{13}^0 (tw_{,x}^{(0)} - h\gamma^{(0)}), & T_{xz}^- &= G_{13}^0 \left(2u^{(0)} - \frac{ht}{2} \varphi_{,x}^{(0)} \right), \\ M_{xz}^+ &= -\frac{G_{13}^0 h t^2}{12} \varphi_{,x}^{(0)}, & M_{xz}^- &= M_{xz}^{(1)} - M_{xz}^{(2)} = \frac{G_{13}^0 t^2}{6} w_{,x}^{(0)},\end{aligned}\quad (18)$$

построенных в статье [1], будут определяться выражениями

$$\begin{aligned}\tilde{T}_x^{(0)} &= B_{11} \sum_{j=1}^4 c_j^{(0)} (r_j^2 + \nu_{31} \alpha_j^{(0)}) \exp(r_j x), & \tilde{Q}_{xz}^{(0)} &= B_{13} \sum_{j=1}^4 A_j d_j^{(0)} s_j \exp(s_j x), \\ \tilde{M}_x^{(0)} &= D_{11} \sum_{j=1}^4 d_j^{(0)} s_j^2 \exp(s_j x), & \tilde{H}_{xz}^{(0)} &= D_{13} \sum_{j=1}^4 B_j c_j^{(0)} r_j \exp(r_j x),\end{aligned}\quad (19)$$

где приняты обозначения

$$A_j = 1 - \frac{G_{13}^0 h}{2B_{13}} + \left(1 + \frac{2G_{13}^0 t}{3B_{13}} \right) \beta_j^{(0)}, \quad B_j = -\frac{G_{13}^0 h}{2D_{13}} + \left(1 + \frac{G_{13}^0 t h^2}{6D_{13}} \right) \alpha_j^{(0)}. \quad (20)$$

Для получения решений уравнений движения (2) незакрепленного участка стержня можно воспользоваться прежними соотношениями упругости (17) (отбрасывая в них верхние индексы со скобками) и представлениями

$$u = \tilde{u} \exp(i\omega\tau), \quad w = \tilde{w} \exp(i\omega\tau), \quad \gamma = \tilde{\gamma} \exp(i\omega\tau), \quad \varphi = \tilde{\varphi} \exp(i\omega\tau),$$

$$\begin{aligned} T_x &= \tilde{T}_x \exp(i\omega\tau), \quad T_{xz} = \tilde{T}_{xz} \exp(i\omega\tau), \\ M_x &= \tilde{M}_x \exp(i\omega\tau), \quad M_{xz} = \tilde{M}_{xz} \exp(i\omega\tau). \end{aligned} \quad (21)$$

С учетом этих представлений, а также закона нагружения (3) из (2) следуют две системы уравнений:

$$\tilde{u}_{,xx} + k_1 \tilde{\Phi}_{,x} - k_2 \tilde{u} = 0, \quad \tilde{\Phi}_{,xx} - k_3 \tilde{u}_{,x} - k_4 \tilde{\Phi} = 0, \quad (22)$$

$$\tilde{\gamma}_{,xx} - k_5 \tilde{w}_{,x} - k_6 \tilde{\gamma} = 0, \quad \tilde{w}_{,xx} + k_7 \tilde{\gamma}_{,x} - k_8 \tilde{w} = -\tilde{p}_z / B_{13} \quad (23)$$

с коэффициентами $k_1, \dots, k_8$, которые можно получить из соответствующих коэффициентов $k_1^{(0)}, \dots, k_8^{(0)}$, определяемых выражениями (7), при отбрасывании в них верхних индексов со скобками, а также слагаемых, содержащих величины G_{13}^0 , E_3^0 и ρ_0 .

При введении разрешающей функции Φ в соответствии с зависимостями

$$\tilde{u} = \Phi_{,x}, \quad \tilde{\Phi} = \frac{1}{k_1} (k_2 \Phi - \Phi_{,xx}) \quad (24)$$

первое уравнение системы (22) удовлетворяется тождественно, а второе принимает вид

$$\Phi_{,xxxx} - 2m\Phi_{,xx} + n\Phi = 0, \quad (25)$$

где $2m = k_2 + k_4 - k_1 k_3$, $n = k_2 k_4$.

Решение системы уравнений (23) зависит от характера зависимости $\tilde{p}_z(x)$. Если в простейшем случае величину $\tilde{p}_z$ считать по длине незакрепленной части стержня постоянной, то можно ввести еще одну разрешающую функцию F с использованием соотношений

$$\tilde{\gamma} = F_{,x}, \quad \tilde{w} = \frac{1}{k_5} (-k_6 F + F_{,xx}) + \frac{\tilde{p}_z}{k_8 B_{13}}, \quad (26)$$

которые обращают в тождество первое уравнение системы (23), а второе уравнение этой системы записывается в виде

$$F_{,xxxx} - 2bF_{,xx} + cF = 0, \quad (27)$$

где $2b = k_6 + k_8 - k_5 k_7$, $c = k_6 k_8$.

Решения полученных уравнений (25) и (27) имеют вид

$$\Phi = \sum_{j=1}^4 c_j \exp(p_j x), \quad F = \sum_{j=1}^4 d_j \exp(q_j x). \quad (28)$$

Здесь c_j, d_j – постоянные интегрирования; p_j, q_j – корни характеристических уравнений, составленных соответственно для (25) и (27), определяемые выражениями

$$p_1 = \left(m + \sqrt{m^2 - n} \right)^{1/2}, \quad p_2 = -\left(m + \sqrt{m^2 - n} \right)^{1/2}, \quad (29)$$

$$p_3 = \left(m - \sqrt{m^2 - n} \right)^{1/2}, \quad p_4 = -\left(m - \sqrt{m^2 - n} \right)^{1/2},$$

$$q_1 = \left(b + \sqrt{b^2 - c} \right)^{1/2}, \quad q_2 = -\left(b + \sqrt{b^2 - c} \right)^{1/2}, \quad (30)$$

$$q_3 = \left(b - \sqrt{b^2 - c} \right)^{1/2}, \quad q_4 = -\left(b - \sqrt{b^2 - c} \right)^{1/2}.$$

Полученные решения (28) с использованием соотношений (24) и (26) дают возможность найти функции $\tilde{u}$, $\tilde{\phi}$, $\tilde{\gamma}$, $\tilde{w}$, определяющие движение незакрепленного участка стержня:

$$\begin{aligned}\tilde{u} &= \sum_{j=1}^4 c_j p_j \exp(p_j x), \quad \tilde{\phi} = \sum_{j=1}^4 c_j \alpha_j \exp(p_j x), \\ \tilde{\gamma} &= \sum_{j=1}^4 d_j q_j \exp(q_j x), \quad \tilde{w} = \sum_{j=1}^4 d_j \beta_j \exp(q_j x) + \frac{\tilde{p}_z}{k_8 B_{13}},\end{aligned}\quad (31)$$

где введены обозначения

$$\alpha_j = \frac{k_2 - p_j^2}{k_1}, \quad \beta_j = \frac{-k_6 + q_j^2}{k_5}. \quad (32)$$

Величины $\tilde{T}_z$, $\tilde{T}_{xz}$, $\tilde{M}_x$, $\tilde{M}_{xz}$, участвующие в представлениях (21), на основании зависимостей (31) и соотношений упругости (17) (при отбрасывании в них последних верхних индексов со скобками) будут определяться выражениями

$$\begin{aligned}\tilde{T}_x &= B_{11} \sum_{j=1}^4 c_j (p_j^2 + \nu_{31} \alpha_j) \exp(p_j x), \quad \tilde{T}_{xz} = B_{13} \sum_{j=1}^4 (1 + \beta_j) d_j q_j \exp(q_j x), \\ \tilde{M}_x &= D_{11} \sum_{j=1}^4 d_j q_j^2 \exp(q_j x), \quad \tilde{M}_{xz} = D_{13} \sum_{j=1}^4 \alpha_j c_j p_j \exp(p_j x).\end{aligned}\quad (33)$$

Полученные решения (14) и (31) содержат шестнадцать постоянных интегрирования $c_j^{(0)}$, c_j , $d_j^{(0)}$, d_j , $j = 1, 4$, для нахождения которых можно использовать очевидные условия

$$(u^{(0)} - u)|_{x=0} = 0, \quad (\gamma^{(0)} - \gamma)|_{x=0} = 0, \quad (w^{(0)} - w)|_{x=0} = 0, \quad (\phi^{(0)} - \phi)|_{x=0} = 0, \quad (34)$$

а также граничные условия для уравнений движения (1), (2) и силовые условия сопряжения закрепленного и незакрепленного участков стержня, записанные в перемещениях [1]:

$$\begin{aligned}(u_{,x}^{(0)} + \nu_{31} \phi^{(0)})|_{x=-l} &= 0, \quad \gamma_{,x}^{(0)}|_{x=-l} = 0, \\ \left[B_{13} (\gamma^{(0)} + w_{,x}^{(0)}) + \frac{2}{3} G_{13}^0 t w_{,x}^{(0)} - \frac{h}{2} G_{13}^0 \gamma^{(0)} \right]|_{x=-l} &= 0,\end{aligned}\quad (35)$$

$$\left[\left(D_{13} + \frac{G_{13}^0 h^2 t}{6} \right) \phi_{,x}^{(0)} - \frac{h}{2} G_{13}^0 u^{(0)} \right]|_{x=-l} = 0,$$

$$(u_{,x} + \nu_{31} \phi)|_{x=a} = 0, \quad \phi_{,x}|_{x=a} = 0, \quad \gamma_{,x}|_{x=a} = 0, \quad (\gamma + w_{,x})|_{x=a} = 0, \quad (36)$$

$$(u_{,x}^{(0)} - u_{,x})|_{x=0} = 0, \quad \left[\left(D_{13} + \frac{G_{13}^0 h^2 t}{6} \right) \phi_{,x}^{(0)} - \frac{h}{2} G_{13}^0 u^{(0)} - D_{13} \phi_{,x} \right]|_{x=0} = 0, \quad (37)$$

$$(\gamma_{,x}^{(0)} - \gamma_{,x})|_{x=0} = 0, \quad \left[B_{13} (\gamma^{(0)} + w_{,x}^{(0)} - \gamma - w_{,x}) + \frac{2}{3} G_{13}^0 t w_{,x}^{(0)} - \frac{h}{2} G_{13}^0 \gamma^{(0)} \right]|_{x=0} = 0.$$

Подставляя функции (14) и (31) в условия (34)–(37) и учитывая представления

(4), (16), (21), а также зависимости (19) и (33), приходим к системе шестнадцати линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^4 (c_j^{(0)} r_j - c_j p_j) = 0, \quad \sum_{j=1}^4 (d_j^{(0)} s_j - d_j q_j) = 0, \\
& \sum_{j=1}^4 (d_j^{(0)} \beta_j^{(0)} - d_j \beta_j) = \tilde{p}_z / (k_8 B_{13}), \quad \sum_{j=1}^4 (c_j^{(0)} \alpha_j^{(0)} - c_j \alpha_j) = 0, \\
& \sum_{j=1}^4 c_j^{(0)} (r_j^2 + v_{31} \alpha_j^{(0)}) \exp(-r_j l) = 0, \quad \sum_{j=1}^4 d_j^{(0)} s_j^2 \exp(-s_j l) = 0, \\
& \sum_{j=1}^4 A_j d_j^{(0)} s_j \exp(-s_j l) = 0, \quad \sum_{j=1}^4 B_j c_j^{(0)} r_j \exp(-r_j l) = 0, \\
& \sum_{j=1}^4 c_j (p_j^2 + v_{31} \alpha_j) \exp(p_j a) = 0, \quad \sum_{j=1}^4 (1 + \beta_j) d_j \exp(q_j a) = 0, \\
& \sum_{j=1}^4 d_j q_j^2 \exp(q_j a) = 0, \quad \sum_{j=1}^4 \alpha_j c_j p_j \exp(p_j a) = 0, \\
& \sum_{j=1}^4 [c_j^{(0)} (r_j^2 + v_{31} \alpha_j^{(0)}) - c_j (p_j^2 + v_{31} \alpha_j)] = 0, \quad \sum_{j=1}^4 (B_j c_j^{(0)} r_j - \alpha_j c_j p_j) = 0, \\
& \sum_{j=1}^4 (d_j^{(0)} s_j^2 - d_j q_j^2) = 0, \quad \sum_{j=1}^4 [A_j d_j^{(0)} s_j - (1 + \beta_j) d_j q_j] = 0,
\end{aligned} \tag{38}$$

которая распадается на две независимые системы: первая система уравнений в качестве неизвестных содержит постоянные интегрирования $c_j^{(0)}, c_j (j = \overline{1, 4})$, соответствующие продольно-поперечным колебаниям стержня, а вторая система – постоянные $d_j^{(0)}, d_j (j = \overline{1, 4})$, отвечающие его изгибно-сдвиговым колебаниям. При этом практический интерес представляет последний тип колебаний, происходящих в сравнительно низком диапазоне частот, в котором продольно-поперечные колебания стержня можно не учитывать.

Систему уравнений относительно постоянных интегрирования $d_j^{(0)}, d_j (j = \overline{1, 4})$ можно представить в виде

$$[A]\{X\} = \{B\}, \tag{39}$$

где $[A], \{X\}, \{B\}$ – соответственно квадратная матрица и столбцы, состоящие из элементов a, x, b с индексами (не указанные элементы матрицы $[A]$ и столбца $\{B\}$ имеют нулевые значения):

$$\begin{aligned}
a_{11} &= s_1, \quad a_{12} = s_2, \quad a_{13} = s_3, \quad a_{14} = s_4, \quad a_{15} = -q_1, \quad a_{16} = -q_2, \quad a_{17} = -q_3, \\
a_{18} &= -q_4, \quad a_{21} = \beta_1^{(0)}, \quad a_{22} = \beta_2^{(0)}, \quad a_{23} = \beta_3^{(0)}, \quad a_{24} = \beta_4^{(0)}, \quad a_{25} = -\beta_1, \\
a_{26} &= -\beta_2, \quad a_{27} = -\beta_3, \quad a_{28} = -\beta_4, \quad a_{31} = A_1 s_1 \exp(-s_1 l), \quad a_{32} = A_2 s_2 \exp(-s_2 l), \\
a_{33} &= A_3 s_3 \exp(-s_3 l), \quad a_{34} = A_4 s_4 \exp(-s_4 l), \quad a_{41} = s_1^2 \exp(-s_1 l), \\
a_{42} &= s_2^2 \exp(-s_2 l), \quad a_{43} = s_3^2 \exp(-s_3 l), \quad a_{44} = s_4^2 \exp(-s_4 l), \quad a_{55} = (1 + \beta_1) q_1 \exp(q_1 a), \\
a_{56} &= (1 + \beta_2) q_2 \exp(q_2 a), \quad a_{57} = (1 + \beta_3) q_3 \exp(q_3 a), \quad a_{58} = (1 + \beta_4) q_4 \exp(q_4 a),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{65} &= q_1^2 \exp(q_1 a), \quad a_{66} = q_2^2 \exp(q_2 a), \quad a_{67} = q_3^2 \exp(q_3 a), \quad a_{68} = q_4^2 \exp(q_4 a), \\
a_{71} &= s_1^2, \quad a_{72} = s_2^2, \quad a_{73} = s_3^2, \quad a_{74} = s_4^2, \quad a_{75} = -q_1^2, \quad a_{76} = -q_2^2, \quad a_{77} = -q_3^2, \quad a_{78} = -q_4^2, \\
a_{81} &= A_1 s_1, \quad a_{82} = A_2 s_2, \quad a_{83} = A_3 s_3, \quad a_{84} = A_4 s_4, \quad a_{85} = -(1 + \beta_1) q_1, \quad a_{86} = -(1 + \beta_2) q_2, \\
a_{87} &= -(1 + \beta_3) q_3, \quad a_{88} = -(1 + \beta_4) q_4, \quad x_1 = d_1^{(0)}, \quad x_2 = d_2^{(0)}, \quad x_3 = d_3^{(0)}, \\
x_4 &= d_4^{(0)}, \quad x_5 = d_1, \quad x_6 = d_2, \quad x_7 = d_3, \quad x_8 = d_4, \quad b_2 = \tilde{p}_z / (k_8 B_{13}).
\end{aligned}$$

Решение $\{X\} = [A]^{-1}\{B\}$ системы (39) в конечном итоге полностью определяет параметры напряженно-деформированного состояния (НДС) стержня при вынужденных изгибно-сдвиговых колебаниях. Однако следует заметить, что разработанная методика не учитывает демпфирующие свойства материала стержня и упругих прослоек и поэтому может давать корректное решение только при частотах, находящихся вдали от резонансной зоны, в то время как наибольшие амплитуды колебаний обычно имеют место в резонансных режимах нагружения, при которых демпфирующие свойства материала необходимо обязательно учитывать [15]. При гармоническом законе деформирования стержня это можно сделать с использованием известной гипотезы комплексного внутреннего трения [16–18], заменяя величины E_1, E_3, G_{13}, E_3^0 и G_{13}^0 соответственно комплексными модулями упругости

$$\begin{aligned}
\bar{E}_1 &= E_1 + i \frac{E_1 \delta_1}{\pi}, \quad \bar{E}_3 = E_3 + i \frac{E_3 \delta_3}{\pi}, \quad \bar{G}_{13} = G_{13} + i \frac{G_{13} \delta_{13}}{\pi}, \\
\bar{E}_3^0 &= E_3^0 + i \frac{E_3^0 \delta_3^0}{\pi}, \quad \bar{G}_{13}^0 = G_{13}^0 + i \frac{G_{13}^0 \delta_{13}^0}{\pi},
\end{aligned} \tag{40}$$

где $\delta_1, \delta_3, \delta_{13}$ – логарифмические декременты колебаний (ЛДК) материала стержня соответственно при растяжении-сжатии в направлениях осей Ox, Oz и при сдвиге в плоскости Oxz ; $\delta_3^0, \delta_{13}^0$ – те же величины при поперечном обжатии и поперечном сдвиге материала прослоек.

2. Определение собственных форм и частот свободных изгибно-сдвиговых колебаний стержня (модальный анализ)

При наличии системы уравнений (39) задача определения собственных форм и частот изгибно-сдвиговых колебаний рассматриваемого стержня (см. рис. 1) сводится к решению системы однородных уравнений

$$[A]\{X\} = \{0\}, \tag{41}$$

где $[A]$ – матрица системы (39), вычисляемая без учета демпфирующих свойств материала; $\{X\}$ – столбец, состоящий из постоянных $d_j^{(0)}, d_j$ ($j = 1, 4$) (в обозначениях предыдущего раздела). Система уравнений (41) имеет нетривиальное решение $\{X\} \neq \{0\}$ при условии равенства нулю определителя матрицы $[A]$ ($\det [A] = 0$), из которого можно найти интересующие собственные частоты ω_k ($k = 1, 2, 3, \dots$), каждой из которых соответствует некоторое ненулевое решение $\{X\}_k$. Однако вычисления показали, что определитель матрицы $[A]$ при этом всегда получается комплексным и тогда решение частотного уравнения $\det [A(\omega)] = 0$ становится невозможным.

Причина появления комплексного определителя матрицы $[A]$ обусловлена тем, что коэффициенты b и c разрешающего уравнения (27) относительно функции F для

незакрепленного участка стержня всегда являются отрицательными, причем $|c| \gg \gg |b|$. В таком случае первые два корня q_1, q_2 характеристического уравнения, составленного для (27), как видно из (30), являются вещественными, причем $q_1 > 0$, $q_2 = -q_1$, а последние два корня q_3, q_4 являются мнимыми и связаны равенством $q_4 = -q_3$. Это позволяет вместо исходной функции F , определяемой вторым выражением в (28), использовать зависимость

$$\bar{F} = \bar{d}_1 \exp(\lambda_1 x) + \bar{d}_2 \exp(-\lambda_1 x) + \bar{d}_3 \sin(\lambda_2 x) + \bar{d}_4 \cos(\lambda_2 x), \quad (42)$$

где $\lambda_1 = q_1$, $\lambda_2 = -iq_3$ (i – мнимая единица), а $\bar{d}_j$ ($j = \overline{1, 4}$) – новые постоянные интегрирования.

Использование зависимости (42) дает вместо матрицы $[A]$ модифицированную матрицу $[\bar{A}]$, состоящую только из вещественных элементов (процесс получения матрицы $[\bar{A}]$ подобен процессу, который использовался при формировании матрицы $[A]$ системы (41), и в настоящей статье не приводится). Таким образом, приходим к частотному уравнению $\det[\bar{A}(\omega)] = 0$, из которого можно численно определить интересующие собственные частоты ω_k ($k = 1, 2, 3, \dots$) с использованием какой-либо подходящей итерационной процедуры.

Для определения собственных форм колебаний при наличии частот ω_k следует решить систему уравнений

$$[\bar{A}]\{\bar{X}\} = \{0\}. \quad (43)$$

Так как уравнения (43) являются однородными, то нетривиальное решение $\{\bar{X}\} \neq 0$ при условии $\det[A] = 0$ можно получить только с точностью до множителя. Для этого все неизвестные обычно выражаются через некоторую одну неизвестную величину, для которой впоследствии задается некоторое произвольное значение. Однако такой прием требует проведения длительных неформальных преобразований структуры исходной системы уравнений, которые трудно поддаются автоматизации вычислений. Наиболее простой способ получения нетривиального решения системы (43) (без преобразования ее структуры) может состоять в применении известного правила Пэйна – Айронса [19, 20]. Согласно этому правилу выбирается наибольший по модулю диагональный элемент $\bar{a}_{ii}$ матрицы $[\bar{A}]$, который затем умножается на параметр штрафа $\alpha = 10^{10} - 10^{12}$, а элементу с номером i правой части системы вместо нуля присваивается значение $\bar{a}_{ii}\alpha q$, где $q \ll \alpha$ – некоторая произвольная величина. Тогда уравнение с номером i системы (43) становится таким:

$$\bar{a}_{i1}\bar{x}_1 + \bar{a}_{i2}\bar{x}_2 + \dots + \bar{a}_{ii}\alpha\bar{x}_i + \dots + \bar{a}_{i8}\bar{x}_8 = \bar{a}_{ii}\alpha q. \quad (44)$$

Слагаемое $\bar{a}_{ii}\alpha\bar{x}_i$ в (44) получается по модулю примерно в α раз больше всех остальных. Это дает $\bar{x}_i \approx q$ (с точностью до $10^{-10} - 10^{-12}$), а все остальные неизвестные при решении отмеченной системы получаются выраженными через $\bar{x}_i$.

Необходимо заметить, что замена исходной функции F , определяемой вторым выражением в (28), зависимостью (42) необходима лишь при модальном анализе стержня, а при решении задачи о резонансных изгибно-сдвиговых колебаниях стержня можно брать исходную функцию F , поскольку в этом случае для учета демпфирующих свойств используются комплексные модули упругости (40), что приводит к необходимости проведения всех вычислений в области комплексных чисел. Для этого можно использовать любой пакет компьютерной математики, позволяющий работать с отмеченными числами, например MATLAB [21].

3. Численные эксперименты и анализ полученных результатов

Эксперимент 1. Проведен модальный анализ рассматриваемого стержня (см. рис. 1), выполненного из однонаправленного волокнистого композита на основе углеродной ЭЛУР-П и связующего ХТ-118 с характеристиками [22]: $E_1 = 104,7$ ГПа, $E_3 = 5,7$ ГПа, $G_{13} = 1,0$ ГПа, $\rho = 1500$ кг/м³, $\delta_1 = \delta_3 = 0,05$, $\delta_{13} = 0,10$. Размеры стержня: $l = 50$ мм, $a = 300$ мм, $h = 3$ мм. Упругие прослойки имеют толщину $t = 0,8$ мм и выполнены из твердого полиуретана PR700 с характеристиками: $E_3^0 = 2,3$ ГПа, $G_{13}^0 = 0,77$ ГПа, $\delta_3^0 = 0,60$, $\delta_{13}^0 = 0,75$, $\rho_0 = 1240$ кг/м³.

Частотное уравнение $\det[\bar{A}(\omega)] = 0$ решалось методом половинного деления [23] до выполнения условия $(\omega_{\max}^{(r)} - \omega_{\min}^{(r)})/(\omega_{\max}^{(r)}) \leq \psi$, где $\omega_{\max}^{(r)}$, $\omega_{\min}^{(r)}$ – границы текущего интервала поиска, в котором расположен корень уравнения; r – номер текущей итерации; $\psi = 10^{-6}$ – заданная точность. После выполнения этого условия был найден искомым корень $\omega = (\omega_{\max}^{(r)} + \omega_{\min}^{(r)})/2$. Для нахождения интервалов поиска корней уравнения $\det[\bar{A}(\omega)] = 0$ предварительно была проведена стандартная процедура отделения корней, в результате которой были выделены три интервала частоты $f = \omega/(2\pi)$: $20 \leq f \leq 60$ Гц, $240 \leq f \leq 280$ Гц и $720 \leq f \leq 760$ Гц, каждый из которых содержал один корень отмеченного уравнения. Таким образом, были найдены три низшие собственные частоты f_1, f_2, f_3 с точностью $\psi = 10^{-8}$, для достижения которой потребовалось соответственно 27, 24 и 23 итерации.

В таблице 1 приведены низшие собственные частоты f_1, f_2, f_3 изгибно-сдвиговых колебаний стержня, полученные с использованием трех различных расчетных моделей: первая строка соответствует предлагаемой уточненной модели; вторая – простейшей модели (без учета поперечного обжатия прослоек), рассмотренной в [21]; в третьей строке приведены значения f_1, f_2, f_3 , полученные в случае жесткого защемления сечения $x = 0$ с использованием известной формулы [24]

$$f_k = \frac{\eta_k^2}{2\pi} \sqrt{\frac{EI}{m_0 a^4}}, \quad k = 1, 2, 3, \quad (45)$$

где EI – жесткость стержня на изгиб, m_0 – погонная масса, $\eta_1 = 1,87510$, $\eta_2 = 4,69409$, $\eta_3 = 7,85476$ (для композитного стержня-полосы в формуле (45) вместо EI и m_0 следует брать соответственно величины D_{11} и ρh).

Таблица 1

Значения f_1, f_2, f_3 для трех различных расчетных моделей

Расчетная модель	f_1 , Гц	f_2 , Гц	f_3 , Гц
Уточненная модель	43,045	269,456	742,644
Простейшая модель	43,374	272,413	764,136
Жесткое защемление сечения	44,987	281,928	789,409

Из таблицы видно, что наименьшие значения f_1, f_2, f_3 , как и следовало ожидать, соответствуют уточненной модели, учитывающей поперечное обжатие прослоек, что несколько увеличивает податливость закрепленного участка стержня, а наибольшие значения f_1, f_2, f_3 получаются при жестком защемлении сечения $x = 0$.

На рис. 2 представлены нормированные формы прогибов $W_1 = \tilde{w}_1/|\tilde{w}_1|_{\max}$ и $W_2 = \tilde{w}_2/|\tilde{w}_2|_{\max}$ незакрепленного участка рассматриваемого стержня (см. рис. 1) при его свободных колебаниях на полученных частотах $f_1 = 43,045$ Гц и $f_2 = 269,456$ Гц. Значения $\tilde{w}_1$ и $\tilde{w}_2$ на каждой частоте определялись с использовани-

ем второй зависимости в (29) при $\tilde{p}_z = 0$ и функции $F = \bar{F}$, определяемой выражением (42).

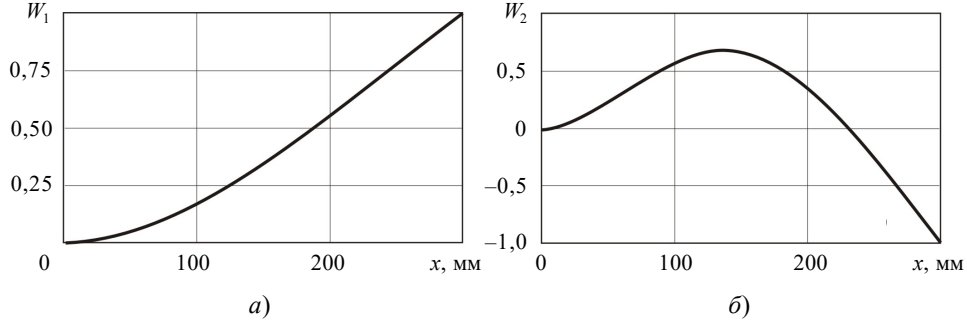


Рис. 2. Нормированные формы прогибов W_1 (а) и W_2 (б) незакрепленного участка стержня

Эксперимент 2. Определялась динамическая реакция того же стержня-полосы при резонансных колебаниях, возбуждаемых поверхностной нагрузкой $p_z = \tilde{p}_z \exp(i\omega t)$ с амплитудой $\tilde{p}_z = 64 \text{ Н/м}^2$ и круговой частотой $\omega = \omega_k = 2\pi f_k$, $k = 1, 2$. На рис. 3 приведены амплитуды резонансных колебаний $\tilde{w}_1, \tilde{w}_2$ незакрепленного участка стержня соответственно на частотах $f_1 = 43,045 \text{ Гц}$ и $f_2 = 269,456 \text{ Гц}$, по форме совпадающие (с точностью до множителя) с соответствующими формами W_1, W_2 свободных колебаний (см. рис. 2), что находится в соответствии с известным в теории колебаний положением о подобии отмеченных форм.

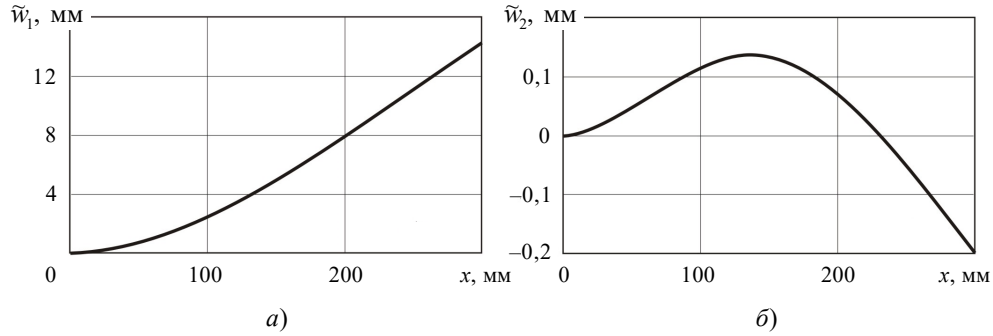


Рис. 3. Амплитуды резонансных колебаний $\tilde{w}_1$ (а) и $\tilde{w}_2$ (б) незакрепленного участка стержня

На рис. 4 приведены амплитуды нормальных напряжений $\tilde{\sigma}_x^{(0)}, \tilde{\sigma}_x$ на поверхности $z = h/2$ соответственно закрепленного и незакрепленного участков при резонансных колебаниях стержня на частотах f_1, f_2 . В обоих случаях наблюдается ярко выраженная локализация значений $\tilde{\sigma}_x^{(0)}$ вблизи сечения $x = 0$ закрепленного участка стержня и стремление их к нулю по мере приближения к торцевому сечению $x = -l = -50 \text{ мм}$. В сечении $x = 0$ при переходе от закрепленного участка к незакрепленному напряжения $\tilde{\sigma}_x^{(0)}, \tilde{\sigma}_x$ получаются одинаковыми.

Необходимо отметить, что результаты, приведенные на рис. 3 и 4 для предлагаемой уточненной модели деформирования стержня, получились практически совпадающими с аналогичными результатами, приведенными в статье [25], в которой рассматривался такой же стержень при использовании простейшей модели, построенной без учета поперечного обжатия упругих прослоек, из чего можно сделать вывод о том, что поперечное обжатие прослоек практически не влияет на амплитуды резонанс-

ных колебаний $\tilde{w}_1$, $\tilde{w}_2$ и амплитуды нормальных напряжений $\tilde{\sigma}_x^{(0)}$ и $\tilde{\sigma}_x$ соответственно на закрепленном и незакрепленном участках стержня.

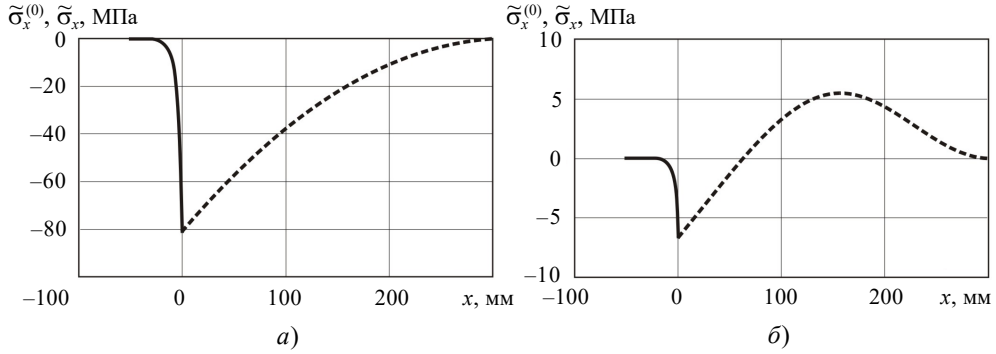


Рис. 4. Амплитуды нормальных напряжений $\tilde{\sigma}_x^{(0)}$ (сплошные линии) и $\tilde{\sigma}_x$ (штриховые линии) на поверхности $z = h/2$ при резонансных колебаниях стержня на частотах f_1 (а) и f_2 (б)

На рис. 5а представлены амплитуды касательных напряжений $\tilde{\sigma}_{xz}^{(0)}$ и $\tilde{\sigma}_{xz}$ при использовании предлагаемой уточненной модели, полученные соответственно на закрепленном и незакрепленном участках стержня при резонансных колебаниях на частоте f_1 , а также амплитуды касательных напряжений $\tilde{\sigma}_{xz}^{(1)}$, $\tilde{\sigma}_{xz}^{(2)}$ в середине прослоек, которые получаются одинаковыми и обозначены как $\tilde{\sigma}_{xz}^{(r)}$. На рис. 5б для сравнения приведены аналогичные результаты, полученные в [25] при использовании простейшей модели. Нетрудно видеть, что на графике уточненной модели значения напряжений $\tilde{\sigma}_{xz}^{(r)}$ в прослойках получаются заметно выше, а значения касательных напряжений $\tilde{\sigma}_{xz}^{(0)}$ в стержне по модулю, наоборот, ниже тех, что имеют место в простейшей модели. При этом максимальные по модулю напряжения $\tilde{\sigma}_{xz}^{(0)}$ в уточненной модели получаются не в сечении $x = 0$ закрепленного участка стержня, как было в простейшей модели, а несколько смещенными влево относительно отмеченного сечения (см. рис. 5а), что можно объяснить учетом в уточненной модели поперечного обжатия прослоек.

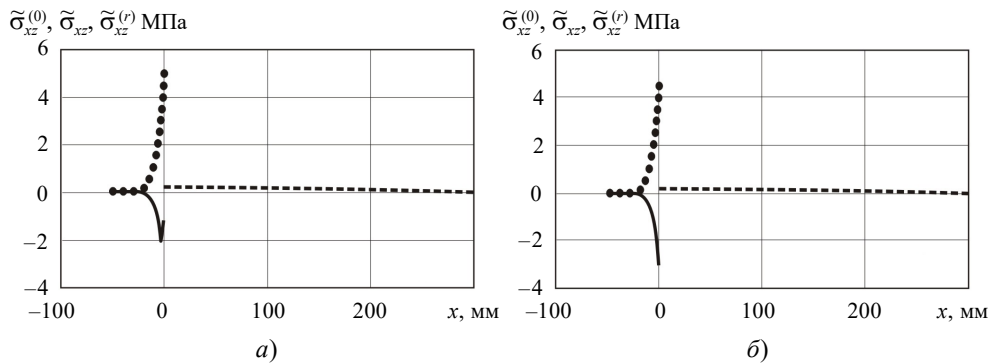


Рис. 5. Амплитуды касательных напряжений $\tilde{\sigma}_{xz}^{(0)}$ (сплошные линии), $\tilde{\sigma}_{xz}$ (штриховые линии) и $\tilde{\sigma}_{xz}^{(r)}$ (точки) при резонансных колебаниях стержня на частоте f_1 в уточненной (а) и простейшей (б) моделях

Необходимо отметить еще одну отличительную особенность, относящуюся к распределению касательных напряжений $\tilde{\sigma}_{xz}^{(r)}$ по толщине прослоек: в простейшей модели эти напряжения по толщине прослоек были постоянными, а в уточненной модели

они линейно зависят от координат $z_{(1)}, z_{(2)}$, так что максимальные значения их получаются на поверхностях $z_{(1)} = t/2, z_{(2)} = -t/2$, примыкающих к стержню, а минимальные – на поверхностях $z_{(1)} = -t/2, z_{(2)} = t/2$, контактирующих с опорным элементом. Вычисления показали, что в сечении $x = 0$, где напряжения $\tilde{\sigma}_{xz}^{(r)}$ по длине закрепленного участка стержня получаются наибольшими, $\tilde{\sigma}_{xz,\max}^{(r)} = 5,757$ МПа, $\tilde{\sigma}_{xz,\min}^{(r)} = 4,373$ МПа, что указывает на заметный градиент $\tilde{\sigma}_{xz}^{(r)}$ в направлении оси Oz стержня. По поводу касательных напряжений $\tilde{\sigma}_{xz}$ на незакрепленном участке можно отметить, что указанные напряжения в обеих моделях деформирования стержня получаются практически одинаковыми.

При переходе от закрепленного участка стержня к незакрепленному касательные напряжения в стержне в обеих моделях испытывают ярко выраженную трансформацию, обусловленную различием моделей деформирования отмеченных участков стержня. При этом наиболее значительной она является в простейшей модели (см. рис. 5б), для которой отношение максимального по модулю значения $\tilde{\sigma}_{xz}^{(0)}$ на закрепленном участке стержня к значению $\tilde{\sigma}_{xz}$ в сечении $x = 0$ незакрепленного участка равно приблизительно пятнадцати.

На рис. 6 приведены амплитуды $\tilde{\sigma}_z^{(1)}, \tilde{\sigma}_z^{(2)}$ напряжений поперечного обжатия в прослойках, которые являются одинаковыми по величине и противоположными по знаку. Наблюдается ярко выраженная локализация значений $\tilde{\sigma}_z^{(1)}, \tilde{\sigma}_z^{(2)}$ вблизи сечения $x = 0$ и весьма быстрое стремление их к нулю по мере удаления от этого сечения.

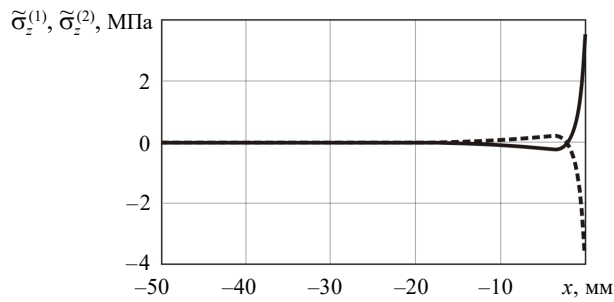


Рис. 6. Амплитуды нормальных напряжений $\tilde{\sigma}_z^{(1)}$ (сплошная линия) и $\tilde{\sigma}_z^{(2)}$ (штриховая линия) в прослойках при резонансных колебаниях стержня на частоте f_1

Эксперимент 3. Проведен анализ структуры безразмерных корней $\bar{s}_j = s_j l$ ($j = 1, 4$) характеристического уравнения, составленного для (11), определяющих характер зависимости параметров НДС прослоек и закрепленного участка стержня от безразмерной координаты $\bar{x} = x/l$. При исходных данных, приведенных в эксперименте 1, все указанные корни $\bar{s}_j$ получились вещественными: $\bar{s}_1 = 64,838$, $\bar{s}_2 = -\bar{s}_1$, $\bar{s}_3 = 8,804$, $\bar{s}_4 = -\bar{s}_3$, что должно указывать на затухание отмеченных параметров по мере удаления от сечения $x = 0$ внутрь закрепленного участка стержня (при этом значения этих корней при изгибно-сдвиговых колебаниях стержня оказываются практически не зависящими от циклической частоты f). Однако при введении для анализа резонансных колебаний стержня комплексных модулей упругости (40) все корни отмеченного характеристического уравнения оказались комплексными: $\bar{s}_1^* = 65,232 + 4,345i$, $\bar{s}_2^* = -\bar{s}_1^*$, $\bar{s}_3^* = 8,834 + 0,602i$, $\bar{s}_4^* = -\bar{s}_3^*$. Сравнение полученных безразмерных корней $\bar{s}_j$ и $\bar{s}_j^*$ показывает, что вещественные части $\bar{s}_j^*$ получаются достаточно близкими к соответствующим корням $\bar{s}_j$, а мнимые части $\bar{s}_j^*$ намного (примерно в пятнадцать раз) меньше соответствующих вещественных частей $\bar{s}_j$.

В связи с этим возникает вопрос о степени влияния мнимых частей комплексных корней $\bar{s}_j^*$ на параметры НДС рассматриваемого стержня и о том, для каких корней это влияние является наибольшим. Проведенные вычисления показали, что неучет мнимых частей только в комплексных корнях $\bar{s}_1^*$ и $\bar{s}_2^*$ дает практически те же результаты, что и при их наличии, а существенное влияние на НДС закрепленного участка стержня и прослоек оказывают мнимые части корней $\bar{s}_3^*$ и $\bar{s}_4^*$: неучет мнимых частей повышает максимальные нормальные напряжения $\tilde{\sigma}_x^{(0)}$ в стержне и максимальные касательные напряжения $\tilde{\sigma}_{xz}^{(r)}$ в прослойках по сравнению с их исходными значениями приблизительно на 30%, а максимальные по модулю касательные напряжения $\tilde{\sigma}_{xz}^{(0)}$ в стержне увеличиваются при этом примерно на 50%, но эти изменения отмеченных напряжений практически не влияют на степень локализации их в окрестности сечения $x = 0$. Наибольший рост за счет неучета мнимых частей корней $\bar{s}_3^*$, $\bar{s}_4^*$ получается в отношении напряжений поперечного обжатия $\tilde{\sigma}_z^{(1)}$, $\tilde{\sigma}_z^{(2)}$ в прослойках: в сечении $x = 0$ они возрастают по сравнению с исходным решением (см. рис. 6) приблизительно в восемь раз, а степень локализации их в окрестности этого сечения, наоборот, значительно снижается.

Заключение

Найдено точное аналитическое решение задачи о свободных и вынужденных гармонических колебаниях стержня-полосы, закрепленного на двухстороннем опорном элементе через упругие прослойки. Для представления перемещений стержня и прослоек приняты аппроксимации по сдвиговой модели С.П. Тимошенко с учетом их поперечного обжатия. Показано, что в рамках используемых аппроксимаций найденное решение разделяется на уравнения, соответствующие независимым продольно-поперечным и изгибно-сдвиговым колебаниям, из которых наибольший интерес представляют изгибно-сдвиговые колебания, происходящие в сравнительно низком диапазоне частот. Проведены численные эксперименты по определению собственных форм и частот, а также динамической реакции при резонансных колебаниях стержня-полосы, выполненного из однонаправленного волокнистого композита на основе углеродной ЭЛУР-П и связующего ХТ-118 и закрепленного на двухстороннем опорном элементе через упругие полиуретановые прослойки. Показана значительная трансформация касательных напряжений $\tilde{\sigma}_{xz}^{(0)}$ в стержне при переходе через границу $x = 0$ от незакрепленного участка стержня к закрепленному (см. рис. 5а), а также ярко выраженная локализация напряжений поперечного обжатия $\tilde{\sigma}_z^{(1)}$, $\tilde{\sigma}_z^{(2)}$ в прослойках области закрепленного участка, расположенной вблизи отмеченной границы (см. рис. 6).

Проведен анализ структуры безразмерных корней $\bar{s}_j = s_j l$ ($j = \overline{1, 4}$) характеристического уравнения, составленного для (11), определяющих характер зависимости параметров НДС прослоек и закрепленного участка стержня от безразмерной координаты $\bar{x} = x/l$. Отмечено, что при анализе резонансных колебаний стержня корни являются комплексными, что обусловлено введением комплексных модулей упругости для учета демпфирующих свойств материала. Выявлено существенное влияние на НДС закрепленного участка стержня и прослоек мнимых частей комплексных корней $\bar{s}_3^*$ и $\bar{s}_4^*$.

Список литературы

1. Паймушин В.Н., Шишкин В.М. Уточненная трансформационная модель деформирования стержня-полосы, закрепленного на двухстороннем опорном элементе через упругие прослойки. 1. Основные соотношения и уравнения движения. *Проблемы прочности и пластичности*. 2024. Т. 86. №4. С. 471–483. DOI: 10.32326/1814-9146-2024-86-4-471-483.
2. Паймушин В.Н., Фирсов В.А. *Оболочки из стекла. Расчет напряженно-деформированного состояния*. М.: Машиностроение, 1993. 208 с.
3. Murugan R., Ramesh R., Padmanabhan K. Experimental study on fatigue-vibration interactions of cyclically loaded FRP composite cantilever beams made of Glass/Carbon-layered arrangements. In: *Advances in Structural Integrity*. Eds. R. Prakash, V. Jayaram, A. Saxena. Singapore: Springer, 2018. P. 579–591. https://doi.org/10.1007/978-981-10-7197-3_48.
4. Van Paepegem W., Degrieck J. Experimental set-up for and numerical modelling of bending fatigue experiments on plain woven glass/epoxy composites. *Composite Structures*. 2001. Vol. 51. Iss. 1. P. 1–8. [https://doi.org/10.1016/S0263-8223\(00\)00092-1](https://doi.org/10.1016/S0263-8223(00)00092-1).
5. Cicirello A., Langley R.S. The vibro-acoustic analysis of built-up systems using a hybrid method with parametric and non-parametric uncertainties. *Journal of Sound and Vibration*. 2013. Vol. 332. Iss. 9. P. 2165–2178. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2012.05.040>.
6. Cherki A., Plessis G., Lallemand B., Tison T., Level P. Fuzzy behavior of mechanical systems with uncertain boundary conditions. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2000. Vol. 189. Iss. 3. P. 863–873. [https://doi.org/10.1016/S0045-7825\(99\)00401-6](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(99)00401-6).
7. Frýba L., Nakagiri S., Yoshikawa N. Stochastic finite elements for a beam on a random foundation with uncertain damping under a moving force. *Journal of Sound and Vibration*. 1993. Vol. 163. Iss. 1. P. 31–45. <https://doi.org/10.1006/jsvi.1993.1146>.
8. Ritto T.G., Sampaio R., Cataldo E. Timoshenko beam with uncertainty on the boundary conditions. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences Engineering*. 2008. Vol. 30. Iss. 4. P. 295–303. <https://doi.org/10.1590/s1678-58782008000400005>.
9. Li S., Reynders E., Maes K., De Roeck G. Vibration-based estimation of axial force for a beam member with uncertain boundary conditions. *Journal of Sound and Vibration*. 2013. Vol. 332. Iss. 4. P. 795–806. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2012.10.019>.
10. Ahmadian H., Jalali H., Pourahmadian F. Nonlinear model identification of a frictional contact support. *Mechanical Systems and Signal Processing*. 2010. Vol. 24. Iss. 8. P. 2844–2854. <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2010.06.007>.
11. Ferri A.A., Bindemann A.C. Damping and vibrations of beams with various types of frictional support conditions. *Journal of Sound and Vibration*. 1992. Vol. 114. Iss. 3. P. 289–296. <https://doi.org/10.1115/1.2930260>.
12. Asadi K., Ahmadian H., Jalali H. Micro/macro-slip damping in beams with frictional contact interface. *Journal of Sound and Vibration*. 2012. Vol. 331. Iss. 21. P. 4704–4712. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2012.05.026>.
13. Wright G.P., O'Connor J.J. Finite-element analysis of alternating axial loading of an elastic plate pressed between two elastic rectangular blocks with finite friction. *International Journal of Engineering Science*. 1971. Vol. 9. Iss. 6. P. 555–570. [https://doi.org/10.1016/0020-7225\(71\)90038-3](https://doi.org/10.1016/0020-7225(71)90038-3).
14. Won Hong-I., Chung J. Numerical analysis for the stick-slip vibration of a transversely moving beam in contact with a frictional wall. *Journal of Sound and Vibration*. 2018. Vol. 419. Iss. 14. P. 42–62. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2017.12.037>.
15. Цейтлин А.И. Об учете внутреннего трения в нормативных документах по динамическому расчету сооружений. *Строительная механика и расчет сооружений*. 1981. №4. С. 33–38.
16. Сорокин Е.С. *К теории внутреннего трения при колебаниях упругих систем*. М.: Гостройиздат, 1960. 129 с.
17. Василенко Н.В. Учет несовершенной упругости материала при механических колебаниях методом комплексных модулей. *Рассеяние энергии при колебаниях механических систем: Матер. X Всесоюз. науч.-техн. совещания*. Киев, дек. 1974 г. Киев: Наукова думка, 1976. С. 5–12.

18. Рикардс Р.Б., Барканов Е.Н. Определение динамических характеристик вибропоглощающих покрытий методом конечных элементов. *Механика композитных материалов*. 1991. №5. С. 823–830.
19. Норри Д., де Фриз Ж. *Введение в метод конечных элементов*. М.: Мир, 1981. 304 с.
20. Зенкевич О. *Метод конечных элементов в технике*. М.: Мир, 1975. 541 с.
21. Кетков Ю.Л., Кетков А.Ю., Шульц М.М. *MATLAB 7: программирование, численные методы*. СПб.: БХВ-Петербург, 2005. 752 с.
22. Paimushin V.N., Kholmogorov S.A. Physical-mechanical properties of a fiber-reinforced composite based on an ELUR-P carbon tape and XT-118 binder. *Mechanics of Composite Materials*. 2018. Vol. 54. Iss. 1. P. 2–12. <https://doi.org/10.1007/s11029-018-9712-1>.
23. Шуп Т. *Решение инженерных задач на ЭВМ*. М.: Мир, 1982. 238 с.
24. Хазанов Х.С. *Механические колебания систем с распределенными параметрами*. Самара: СГАУ, 2002. 80 с.
25. Паймушин В.Н., Шишкин В.М., Чумакова С.Ф. Математическое моделирование динамического деформирования стержня-полосы, закрепленного на двухстороннем опорном элементе через упругие прослойки. *Ученые записки Казанского университета. Физико-математические науки*. 2024. Т. 166. №3. С. 407–425. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.3.407-425>.

References

1. Paimushin V.N., Shishkin V.M. Utochnennaya transformatsionnaya model deformirovaniya sterzhnya-polosy, zakreplennogo na dvukhstoronnem opornom elemente cherez uprugie prosloyki. 1. Osnovnye sootnosheniya i uravneniya dvizheniya [Refined transformation model of deformation of a rod-strip fixed on a double-sided support element through elastic interlayers. 1. Basic relations and motion equations]. *Problemy prochnosti i plastichnosti [Problems of Strength and Plasticity]*. 2024. Vol. 86. No 4. P. 471–483 (In Russian).
2. Paimushin V.N., Firsov V.A. *Obolochki iz stekla. Raschet napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya [Glass Shells. Calculation of Stress-Strain State]*. Moscow. Mashinostroenie Publ. 1993. 208 p. (In Russian).
3. Murugan R., Ramesh R., Padmanabhan K. Experimental study on fatigue-vibration interactions of cyclically loaded FRP composite cantilever beams made of Glass/Carbon-layered arrangements. In: *Advances in Structural Integrity*. Eds. R. Prakash, V. Jayaram, A. Saxena. Singapore. Springer. 2018. P. 579–591. https://doi.org/10.1007/978-981-10-7197-3_48.
4. Van Paeppegem W., Degrieck J. Experimental set-up for and numerical modelling of bending fatigue experiments on plain woven glass/epoxy composites. *Compos. Struct.* 2001. Vol. 51. Iss. 1. P. 1–8. [https://doi.org/10.1016/S0263-8223\(00\)00092-1](https://doi.org/10.1016/S0263-8223(00)00092-1)
5. Cicirello A., Langley R.S. The vibro-acoustic analysis of built-up systems using a hybrid method with parametric and non-parametric uncertainties. *J. Sound Vib.* 2013. Vol. 332. Iss. 9. P. 2165–2178. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2012.05.040>.
6. Cherki A., Plessis G., Lallemand B., Tison T., Level P. Fuzzy behavior of mechanical systems with uncertain boundary conditions. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2000. Vol. 189. Iss. 3. P. 863–873. [https://doi.org/10.1016/S0045-7825\(99\)00401-6](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(99)00401-6).
7. Frýba L., Nakagiri S., Yoshikawa N. Stochastic finite elements for a beam on a random foundation with uncertain damping under a moving force. *J. Sound Vib.* 1993. Vol. 163. Iss. 1. P. 31–45. <https://doi.org/10.1006/jsvi.1993.1146>.
8. Ritto T.G., Sampaio R., Cataldo E. Timoshenko beam with uncertainty on the boundary conditions. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences Engineering*. 2008. Vol. 30. Iss. 4. P. 295–303. <https://doi.org/10.1590/s1678-58782008000400005>.
9. Li S., Reynders E., Maes K., De Roeck G. Vibration-based estimation of axial force for a beam member with uncertain boundary conditions. *J. Sound Vib.* 2013. Vol. 332. Iss. 4. P. 795–806. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2012.10.019>.
10. Ahmadian H., Jalali H., Pourahmadian F. Nonlinear model identification of a frictional contact support. *Mech. Syst. Signal Process.* 2010. Vol. 24. Iss. 8. P. 2844–2854. <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2010.06.007>.

11. Ferri A.A., Bindemann A.C. Damping and vibrations of beams with various types of frictional support conditions. *J. Sound Vib.* 1992. Vol. 114. Iss. 3. P. 289–296. <https://doi.org/10.1115/1.2930260>.
12. Asadi K., Ahmadian H., Jalali H. Micro/macro-slip damping in beams with frictional contact interface. *J. Sound Vib.* 2012. Vol. 331. Iss. 21. P. 4704–4712. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2012.05.026>.
13. Wright G.P., O'Connor J.J. Finite-element analysis of alternating axial loading of an elastic plate pressed between two elastic rectangular blocks with finite friction. *Int. J. Eng. Sci.* 1971. Vol. 9. Iss. 6. P. 555–570. [https://doi.org/10.1016/0020-7225\(71\)90038-3](https://doi.org/10.1016/0020-7225(71)90038-3).
14. Won Hong-I., Chung J. Numerical analysis for the stick-slip vibration of a transversely moving beam in contact with a frictional wall. *J. Sound Vib.* 2018. Vol. 419. Iss. 14. P. 42–62. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2017.12.037>.
15. Tseytlin A.I. Ob uchete vnutrennego treniya v normativnykh dokumentakh po dinamicheskomu raschetu sooruzheniy [On accounting for internal friction in regulatory documents on the dynamic calculation of structures]. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy* [Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings]. 1981. No 4. P. 33–38 (In Russian).
16. Sorokin E.S. *K teorii vnutrennego treniya pri kolebaniyakh uprugikh sistem* [On the Theory of Internal Friction during Vibrations of Elastic Systems]. Moscow. Gosstroyizdat Publ. 1960. 129 p. (In Russian).
17. Vasilenko N.V. Uchet nesovershennoy uprugosti materiala pri mekhanicheskikh kolebaniyakh metodom kompleksnykh moduley [Accounting for imperfect elasticity of a material during mechanical vibrations using the complex modulus method]. *Rasseyaniye energii pri kolebaniyakh mekhanicheskikh sistem: Materialy X Vsesoyuznogo nauchno-tekhnicheskogo soveshchaniya* [Energy Dissipation during Vibrations of Mechanical Systems: Materials of the X All-Union Scientific and Technical Meeting]. Kiev. Dec. 1974. Kiev. Naukova dumka Publ. 1976. P. 5–12 (In Russian).
18. Rikards R.B., Barkanov E.N. Opredelenie dinamicheskikh kharakteristik vibropogloshchayushchikh pokrytiy metodom konechnykh elementov [Dynamic analysis of damping coatings by the finite element method]. *Mekhanika kompozitnykh materialov* [Mechanics of Composite Materials]. 1991. No 5. P. 823–830 (In Russian).
19. Norrie D.H., de Vries G. *An Introduction to Finite Element Analysis*. New York. San Francisco. London. Academic Press. 1978. 301 p.
20. Zienkiewicz O.C. *The Finite Element In Engineering Science*. London. New York. McGraw-Hill. 1971. 521 p.
21. Ketkov Yu.L., Ketkov A.Yu., Shults M.M. *MATLAB 7: programmirovaniye, chislennyye metody* [MATLAB 7: Programming, Numerical Methods]. Saint Petersburg. BKhV-Peterburg Publ. 2005. 752 p. (In Russian).
22. Paimushin V.N., Kholmogorov S.A. Physical-mechanical properties of a fiber-reinforced composite based on an ELUR-P carbon tape and XT-118 binder. *Mech. Compos. Mater.* 2018. Vol. 54. Iss. 1. P. 2–12. <https://doi.org/10.1007/s11029-018-9712-1>.
23. Shoup T.E. *A Practical Guide to Computer Methods for Engineers*. Englewood Cliffs, New Jersey. Prentice-Hall Inc. 1979. 255 p.
24. Khazanov Kh.S. *Mekhanicheskie kolebaniya sistem s raspredelennymi parametrami* [Mechanical Vibrations of Systems with Distributed Parameters]. Samara. SGAU Publ. 2002. 80 p. (In Russian).
25. Paymushin V.N., Shishkin V.M., Chumakova S.F. Matematicheskoe modelirovaniye dinamicheskogo deformirovaniya sterzhnya-polosy, zakreplennogo na dvukhstoronnem opornom elemente cherez uprugie prosloyki [Mathematical modeling of the dynamic deformation of a rod-strip fixed on a double-sided support element through elastic interlayers]. *Uchenye zapiski Kazanskogo universiteta. Fiziko-matematicheskie nauki* [Scientific Notes of Kazan University. Physical and Mathematical Sciences]. 2024. Vol. 166. No 3. P. 407–425 (In Russian).

**REFINED TRANSFORMATION MODEL OF DEFORMATION
OF A ROD-STRIP FIXED ON A DOUBLE-SIDED SUPPORT ELEMENT
THROUGH ELASTIC INTERLAYERS.**

2. ANALYNICAL SOLUTION. NUMERICAL EXPERIMENTS*

Paimushin V.N.¹, Shishkin V.M.²

¹*Kazan National Research Technical University n.a. A.N. Tupolev,
Kazan, Russian Federation*

²*Vyatka State University, Kirov, Russian Federation*

vpajmushin@mail.ru

Received by the Editor 2024/09/16

A rod-strip consisting of clamped and free sections along its length is considered. The clamped section of finite length is considered to be connected to a rigid and fixed support element through elastic layers. To represent the displacements of the rod and layers, approximations are adopted according to the S.P. Timoshenko's shear model taking into account their transverse compression. Based on the motion equations of the clamped and free sections of the rod, formulated in displacements, an exact analytical solution is found for the problem of free and forced harmonic vibrations. It is shown that within the framework of the approximations used, the solution found is divided into equations corresponding to mutually independent longitudinal-transverse and flexural-shear vibrations. From it the latter type of oscillations occurring in a comparatively low frequency range is of greatest interest. Numerical experiments were performed to determine the natural modes and frequencies, as well as the dynamic response to resonant vibrations of a rod clamped to a two-sided support element through elastic layers and made of a unidirectional fibrous composite based on ELUR-P unidirectional carbon fiber and XT-118 epoxy. A significant transformation of transverse shear stresses in the rod during the transition through the boundary from the free section of the rod to the clamped one is shown. The pronounced localization of transverse compression stresses in the region of the fixed section located near the noted boundary was revealed. An analysis of the structure of dimensionless roots of the characteristic equation corresponding to the rotation angles of the cross sections and deflections of the clamped section of the rod is performed. It is noted that when analyzing resonant vibrations of the rod, these roots are complex, which is due to the introduction of complex elastic moduli to take into account the damping properties of the material.

Keywords: vibrations, analytical solution, rod-strip, S.P. Timoshenko's shear model, transverse compression.

*The study was carried out with financial support allocated to the Kazan National Research Technical University n.a. A.N. Tupolev on a state assignment in the field of scientific activity (project No FZSU-2024-0010, section 1) and at the expense of the Russian Science Foundation (project No 23-19-00021, sections 2, 3).